XXI Olimpiada Española de Física 5 de marzo de 2010

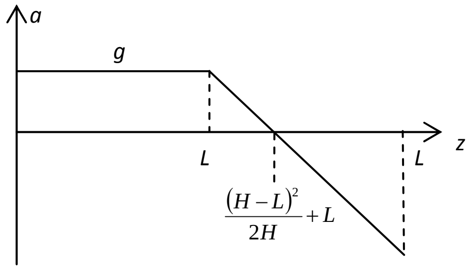
Fase Local, Universidad de Salamanca

Nombre y apellidos: Centro:

Problema 1 – Subidón de adrenalina bajo el puente (4 puntos)

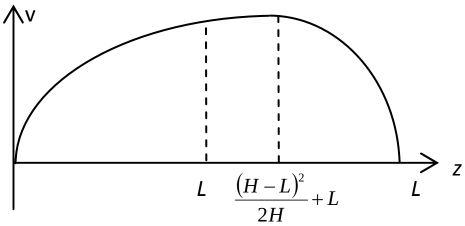
I. El balance de energía permite escribir: $MgH = \frac{1}{2}k(H-L)^2$.

a. Por tanto: $k = \dfrac{2MgH}{(H-L)^2}$.



b. En la primera parte, $0<z<L$, y $a=g$. En la segunda y tercera partes, $L<z<H$, y $a = g - \frac{k}{M}(z-L)$, como se ve en la gráfica.

c. La velocidad es máxima cuando $a=0$, y por tanto para $z_0 = \frac{Mg}{k} + L = \frac{(H-L)^2}{2H} + L$. El balance de energía se escribe ahora $Mgz_0 = \frac{1}{2}k(z_0-L)^2 + \frac{1}{2}M\mathrm{v}_m^2$. Sustituyendo *k* y z_0 por las expresiones obtenidas anteriormente, podemos llegar a la expresión para la velocidad máxima del saltador: $\mathrm{v}_m = \sqrt{2gL + \frac{g(H-L)^2}{2H}}$.



d. La gráfica aproximada de la velocidad es como se muestra en la figura. Nótese cómo para $0<z<L$ v crece linealmente con el tiempo, pero cuando representamos v(*z*) obtenemos evidentemente una parábola.

e. Los valores extremos de la aceleración corresponden a sus valores inicial y final $a_i = g$ y $a_f = g - \frac{k}{M}(H-L) = g\left(1 - \frac{2H}{H-L}\right)$. Para cualquier valor de la longitud de la cuerda $0<L<H$ el valor máximo del módulo de la aceleración es su valor final. Así, $a_m = g\left(1 - \frac{2H}{H-L}\right)$.

II. Con esos datos numéricos tenemos:

a. $k = \dfrac{2MgH}{(H-L)^2} = 100\,\mathrm{N/m}$.

b. $\mathrm{v}_m = \sqrt{2gL + \frac{g(H-L)^2}{2H}} = \sqrt{450}\,\mathrm{m/s} = 21.21\,\mathrm{m/s} = 76.37\,\mathrm{km/h}$ y $a_m = g\left(1 - \frac{2H}{H-L}\right) = -30\,\mathrm{m/s^2}$ (dirigida hacia arriba).

III. Se trata de oscilaciones amortiguadas por lo que no corresponden exactamente a un movimiento armónico. Su periodo es $T \approx 2\pi\sqrt{M/k} = \pi\sqrt{2}\,\mathrm{s}$. Además la cuerda sólo tiene comportamiento elástico cuando se estira. Cuando el saltador está por encima de su punto final de equilibrio, *L*+*Mg*/*k*, y si la amplitud de oscilación es grande y la cuerda se destensa, sube y baja libremente con aceleración *g* durante una parte de la oscilación mientras que cuando está por debajo experimenta la aceleración correspondiente a la fuerza recuperadora elástica.

Nombre y apellidos: Centro:

IV. Si con una masa de 50 kg se llega justo a rozar la superficie del agua, está claro que con 100 kg el saltador chocaría violentamente con ella. Para evitarlo hay dos procedimientos. Si disminuimos la longitud de la cuerda reducimos también su elongación y aumentamos su constante elástica. Y si ponemos varias cuerdas en paralelo sumamos sus constantes elásticas.

a. Si doblamos la cuerda tendremos una constante $2k$ en cada una de sus mitades y, sumando, la constante recuperadora elástica de la cuerda doblada será $k' = 4k = 400$ N/m.

b. Si la masa del nuevo saltador es 100 kg, la distancia mínima alcanzada, h, sobre el nivel del agua cumplirá $Mg(H-h)=\frac{1}{2}4k\left[\left(H-\frac{L}{2}\right)-h\right]^2$ y $100g(40-h)=\frac{1}{2}400\left[\left(40-\frac{20}{2}\right)-h\right]^2$, cuyas solución es $h = 20$ m. (La otra solución, $h = 35$ m, no vale pues la cuerda mide solamente 10 m). Luego el saltador no llega a mojarse.

Nombre y apellidos: Centro:

Problema 2 (1,5 puntos)

a) Según la tercera ley de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

con T período de rotación, M masa de la Tierra y r distancia al centro de la Tierra. En este caso r=6971 km.

$$T = \frac{2\pi}{(6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24})^{1/2}} (6,97 \cdot 10^6)^{3/2} = 5794\ s = 96,5\ \min.$$

Durante la mitad del período pueden trabajar: es decir, durante 48,2 min.

b) El período no depende de la masa del satélite, luego no cambia por el incremento de masa.

c) La energía total del satélite de masa m girando en órbita circular de radio r es:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

La energía necesaria para ponerlo en órbita es la diferencia entre la energía total en la órbita y la energía en la superficie terrestre. La energía cinética que tiene en la superficie de la Tierra es muy pequeña frente a la energía potencial, por lo que se puede despreciar.

$$\Delta E = -\ GMm\left(\frac{1}{2r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$= -\ 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1,1 \cdot 10^4 \left(\frac{1}{2 \cdot 6,97 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,37 \cdot 10^6}\right) = 3,73 \cdot 10^{11}\ J$$

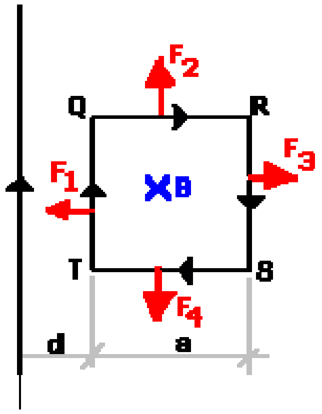
Nombre y apellidos: Centro:

Problema 3 (1,5 puntos)

$$P = E \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{cases} m\,g = \rho_{MM} \, {}^{V}\!/_{2}\, g \\ (m+70)\,g = \rho_{MM}\, V\, g \end{cases} \right\} \quad \Rightarrow \quad \rho_{MM} \, {}^{V}\!/_{2} = 70 \quad \Rightarrow \quad \rho_{MM} = 1.24 \times 10^{3} \, {}^{kg}\!/_{m^{3}}$$

Nombre y apellidos: Centro:

Problema 4 (1,5 puntos)



El conductor rectilíneo crea a su alrededor un campo magnético cuyo sentido viene dado por la regla de la mano derecha, por lo que en el dibujo el campo entraría en el papel, y su valor es:

$$B = \mu_o \cdot I / (2\cdot\pi \cdot x)$$

siendo x la distancia del punto al conductor.

Como por la espira circula una corriente eléctrica, aparecerá una fuerza magnética de valor $\mathbf{F} = I \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{B})$

Lado QT: Todos sus puntos están a la misma distancia del conductor por lo que el campo magnético en ellos es el mismo y de valor:

$$B = \mu_o \cdot I / (2\cdot\pi \cdot x) = 4\cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 / (2\cdot \pi \cdot 0.03) = 3.33\cdot 10^{-5}\ T$$

la fuerza será: $F_1 = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 3.33\cdot 10^{-5} = 6.67\cdot 10^{-7}$ N

Lado RS: Todos sus puntos están a la misma distancia del conductor por lo que el campo magnético en ellos es el mismo y de valor:

$$B = \mu_o \cdot I / (2\cdot \pi \cdot x) = 4\cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 / (2\cdot \pi \cdot 0.13) = 7.69\cdot 10^{-6}\ T$$

la fuerza será: $F_3 = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 7.69\cdot 10^{-6} = 1.53\cdot 10^{-7}$ N

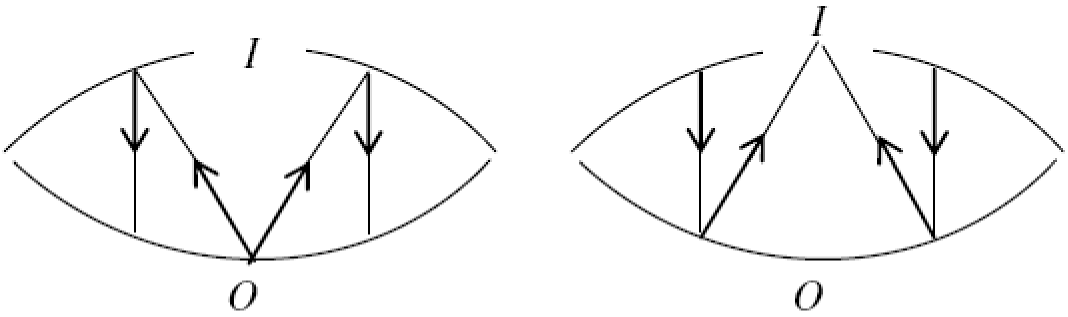
Lados QR y ST: cada punto está a una distancia diferente del conductor, por lo que en cada punto el campo magnético es distinto, variando desde $3.33\cdot 10^{-5}$ T en el punto más próximo hasta $7.69\cdot 10^{-6}$ T en el más lejano.

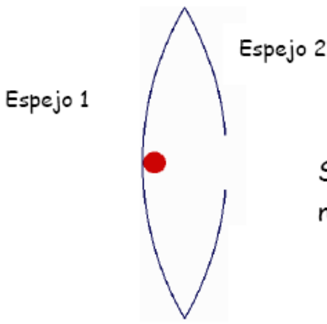
Para determinar la fuerza sobre estos lados habría que resolver la integral:

$$dF = I\cdot B\cdot dx = I\frac{\mu_0\cdot I_c}{2\cdot\pi\cdot x}dx \rightarrow F = \int_d^{d+a} I\cdot\frac{\mu_0\cdot I_c}{2\cdot\pi\cdot x}dx = \frac{\mu_0\cdot I\cdot I_c}{2\cdot\pi}\int_d^{d+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0\cdot I\cdot I_c}{2\cdot\pi}\left[\ln x\right]_d^{d+a} = \frac{\mu_0\cdot I\cdot I_c}{2\cdot\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$F_2 = F_4 = \frac{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 0.2}{2\cdot\pi}\ln\frac{0.13}{0.03} = 2.93\cdot 10^{-7}\ N$$

Problema 5 (1,5 puntos)





Si la distancia entre espejos es d, la fórmula de los espejos nos permite obtener s' (distancia espejo 2 -imagen):

$$\frac{1}{-d}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{-16} \qquad s'=\frac{8d}{8-d}$$

La imagen O' es objeto para la segunda reflexión, esta vez en el espejo 1, luego la distancia se incrementa en d. En este caso sabemos la posición de la imagen, por lo que la fórmula de los espejos nos permite obtener d.

$$\frac{1}{-\left[d+\frac{8d}{8-d}\right]}+\frac{1}{-d}=\frac{2}{-16} \Rightarrow d=8\text{cm}$$