Problema 1 – El vuelo del Apolo XI

a) Si el satélite describe una órbita circular, la fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta que origina dicho movimiento

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fuerza gravitatoria: } F_g = G\,\frac{M\cdot m}{r^2} \\ \\ \text{Fuerza centrípeta: } \mathrm{F_c = m\,\frac{v^2}{r}} \end{array}\right\} \quad G\,\frac{M\cdot m}{r^2} = \mathrm{m}\,\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\,\frac{M}{r}}$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\ m^2}}{\mathrm{kg^2}}$$

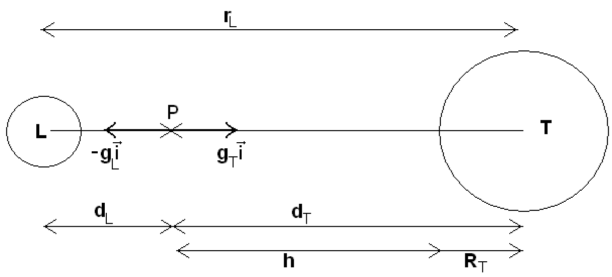
$$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{kg}$$

$$r = R_T + h = 6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m} + 1{,}85 \cdot 10^5\ \mathrm{m} = 6{,}57 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\ m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{kg}}{6{,}57 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}} = 7{,}79 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\boxed{v = 7{,}79 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

b)



La suma de los campos en el punto P es cero:

$$g_T + g_L = 0 \quad \Rightarrow \quad g_T \imath - g_L \imath = 0 \quad \Rightarrow \quad g_T = g_L$$

Los módulos de los campos son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} g_T = G\,\dfrac{M_T}{{d_T}^2} \\ g_L = G\,\dfrac{M_L}{{d_L}^2} \\ d_T = r_L - d_L \\ M_L = \frac{M_T}{81} \end{array}\right\} \begin{array}{l} G\,\dfrac{M_T}{{d_T}^2} = G\,\dfrac{M_L}{{d_L}^2} \quad \Rightarrow \quad G\,\dfrac{M_T}{{d_T}^2} = G\,\dfrac{M_T}{81\cdot {d_L}^2} \\ \dfrac{1}{{d_T}^2} = \dfrac{1}{81\cdot {d_L}^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{{d_T}^2} = \dfrac{1}{81\cdot {d_L}^2} \\ d_T = 9\cdot d_L \quad \Rightarrow \quad d_T = 9\;\; r_L - d_T \quad \Rightarrow \quad d_T = \dfrac{9\cdot r_L}{10} \\ r_L = 3{,}80\cdot 10^8\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad d_T = 3{,}42\cdot 10^8\ \text{m} \end{array}$$

$$h = d_T - R_T \qquad h = 3{,}42\cdot 10^8\ \text{m} - 6{,}38\cdot 10^6\ \text{m} = 3{,}36\cdot 10^8\ \text{m}$$

$$\boxed{h = 3{,}36\cdot 10^8\ \text{m}}$$

El potencial es la suma de los potenciales del campo de la Tierra y del campo de la Luna.

El potencial gravitatorio es siempre negativo y su valor es: $V = -G\,\frac{M}{r}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Potencial del campo terrestre: } V_T = -G\,\frac{M_T}{d_T} \\ \\ \text{Potencial del campo lunar. } V_L = -G\,\frac{M_L}{d_L} \end{array}\right\} \quad V = -G\,\frac{M_T}{d_T} - G\,\frac{M_L}{d_L}$$

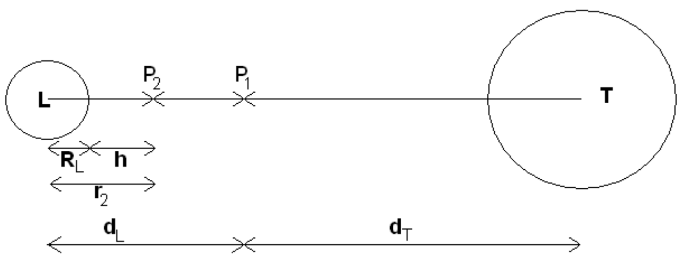
$$M_L = \frac{M_T}{81}\ ;\ d_T = 3{,}42\cdot 10^8\ \text{m}\ ;\ d_L = r_L - d_T = 3{,}80\cdot 10^8\ \text{m} - 3{,}42\cdot 10^8\ \text{m} = 3{,}80\cdot 10^7\text{m}$$

$$V = -G\cdot M_T\ \ \frac{1}{d_T} + \frac{1}{81\cdot d_L}$$

$$V = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\ \ \frac{1}{3{,}42\cdot 10^8\text{m}} + \frac{1}{81\cdot 3{,}80\cdot 10^7\text{m}}$$

$$\boxed{V = -1{,}30\cdot 10^6\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}}$$

c)



El movimiento entre P_1 y P_2 no es uniformemente acelerado puesto que g no es constante.

Como solamente actúan fuerzas gravitatorias la energía mecánica se conserva:

$$E_{c1} + U_1 = E_{c2} + U_2$$

PUNTO P$_1$.- Actúan el campo gravitatorio terrestre y el campo gravitatorio lunar y el cohete tiene una velocidad $v_1 = 122\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

El potencial de un punto es la energía potencial de la unidad de masa en ese punto:

Energía potencial: $V_1 = \frac{U_1}{m} \Rightarrow U_1 = V_1 \cdot m\,,\;\; V_1 = -1{,}30 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ (calculado en el apartado anterior)

Energía cinética: $E_{c1} = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 122\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

PUNTO P$_2$.- El campo gravitatorio terrestre es despreciable

Energía potencial: $U_2 = -G\,\frac{M_L \cdot m}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = R_L + h = 1{,}74 \cdot 10^6\ \mathrm{m} + 8{,}00 \cdot 10^4\ \mathrm{m}$

Energía cinética: $E_{c2} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = ?$ (es lo que pide el problema)

$$V_1 \cdot m + \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = -G\,\frac{M_L \cdot m}{r_2} + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$-1{,}30 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} + \frac{1}{2}\left(122\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\;\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}}{81 \cdot 1{,}82 \cdot 10^6\mathrm{m}} + \frac{1}{2} v_2^2$$

$$\boxed{v_2 = 1{,}68 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Problema 2

a) $v_{x0} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 2.3 \times 10^{7}\ \mathrm{m/s}$

b) $t_1 = \frac{l_1}{v_{x0}} = 2.17 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}$

c) $t_2 = \frac{l_2}{v_{x0}} = 4.35 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}$

d) $\Delta y_p = \frac{1}{2} a t_1^2 ; a = \frac{eE}{m} = \frac{eV_p}{md}$

$$\Delta y_f = \Delta y - \Delta y_p = v_{yf} t_2 ;\ v_{yf} = a t_1 = \frac{eV_p}{md} t_1$$

$$\Delta y = \Delta y_p + \Delta y_f = \frac{1}{2}\frac{eV_p}{md} t_1^2 + \frac{eV_p}{md} t_1 t_2$$

$$V_p = \frac{\Delta y}{\frac{et_1}{md}\ \frac{1}{2} t_1 + t_2} = 724\ \mathrm{V}$$

e) $E = \frac{V_p}{d} = 24.13\ \mathrm{kV/m} = 24.13\ \mathrm{kN/C}$

f) $\Delta y_p = \frac{1}{2}\frac{eV_p}{md} t_1^2 = 10^{-2}\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{cm}$

g) $\alpha = \arctan \frac{v_{yf}}{v_{x0}} = \arctan 0.4 = 0.38\ \mathrm{rad} = 21.8°$

$$v_{yf} = \frac{eV_p}{md} t_1 = 9.2 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

Problema 3

a) Conservación de la energía para el sistema muelle-flecha:

$$\frac{1}{2}K\,x^2 = \frac{1}{2}m v_0^2 \;\rightarrow\; v_0 = \sqrt{\frac{500}{0{,}05}}\cdot 0{,}1 = 10\ \text{m/s}$$

Movimiento de la flecha hasta la manzana:

- eje x : movimiento uniforme con velocidad v_{0x}
- eje y movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial v_{0y} y aceleración la gravedad a_y = -9,8 m/s^2

$$v_{fy} = v_{0y} + a_y t \;\rightarrow\; 0 = v_{0y} - 9{,}8\cdot t \;\rightarrow\; t = \frac{v_{0y}}{9{,}8}$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2}a_y t^2 \;\rightarrow\; 2 = v_{0y}\frac{v_{0y}}{9{,}8} - \frac{1}{2}9{,}8\cdot\left(\frac{v_{0y}}{9{,}8}\right)^2$$

Luego v_{0y} = 6,26 m/s

$$v_{0y} = v_0\ sen\theta \;\rightarrow\; sen\theta = \frac{6{,}26}{10} \;\rightarrow\; \theta = 38{,}8^{\text{o}}$$

$$d_x = v_{0x}\cdot t = v_{0x}\cdot\frac{v_{0y}}{9{,}8} = 4{,}98\ \text{m}$$

b) El movimiento del conjunto flecha+manzana acaba en la posición (x'_f, 0) después de un tiempo t'. Vuelve a ser uniformemente acelerado en la dirección y con y_0= 2 m, v'_{0y}=0, a_y=-9,8 m/s^2 ; en la dirección x se trata de un movimiento uniforme con velocidad v'_x .

$$y' = y'_0 + v'_{0y} t + \frac{1}{2}a_y t^2 \;\rightarrow\; 0 = 2 - \frac{1}{2}9{,}8\cdot t'^2 \;\rightarrow\; t' = 0{,}64\ s$$

$$x'_f = x'_i + v'_x\cdot t' \;\rightarrow\; 6{,}25 = 4{,}98 + v'_x\cdot t' \;\rightarrow\; v'_x = \frac{1{,}27}{0{,}64} = 1{,}98\ \text{m/s}$$

Conservación del momento lineal en la dirección x:

$$m\cdot v_{0x} = (m + M)\cdot v'_x$$

Donde m es la masa de la flecha y M la de la manzana.

$$0{,}05\cdot 10\cos(38{,}8) = (0{,}05 + M)\cdot 1{,}98 \;\rightarrow\; M = 0{,}15\,\text{kg}$$