Una introducción a la hipotesis de Riemann con Mathematica

Guillermo Sánchez (http://diarium.usal.es/guillermo)

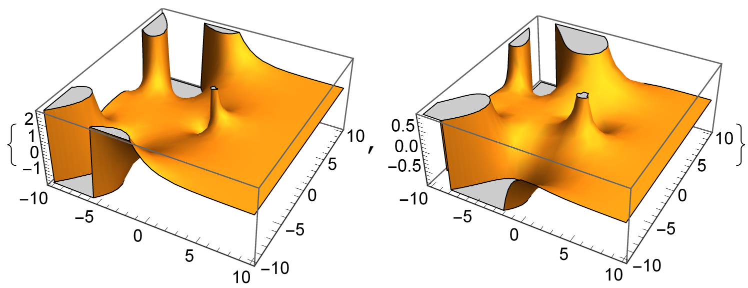
Actualizado : 2014 - 05- 24

Nota : Incluye gráficos interactivos. Puede actuar sobre ellos descargando el fichero en formato cdf. Si no tiene *Mathematica* puede utilizar cdfplayer (puede descargarlo gratuitamente de: http://www.wolfram.com/cdf-player; si no lo tiene el navegador le pedirá permiso para instalarlo, acéptelo no tiene riesgo). Dependiendo se su navegador el fichero se abrirá dentro del mismo o tendrá que descargarlo y abrirlo.

- La función Z de Riemann se define:

Sea $s = a + b\,i \in \mathbb{C}$, para $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

Al tratarse *s* una variable compleja $\zeta(s)$ sera también compleja. Representamos graficamente, la parte real Re (s) y la parte imaginaria Im (s)



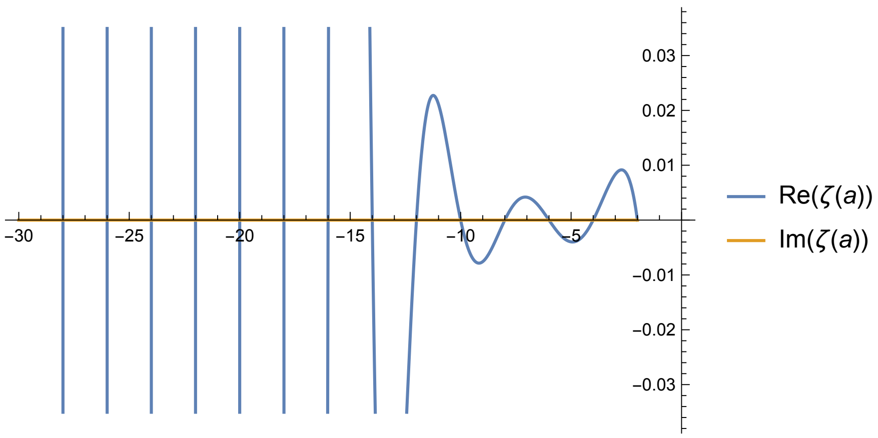
En http://functions.wolfram.com/webMathematica/FunctionPlotting.jsp?name=Zeta puede representarse ζ (s) utilizando un navegador, sin necesidad de *Mathematica*.

Se puede demostrar (utizando la extensión analítica de la función, un concepto de análisis complejo), que para los pares negativos, esto es $s = -2\,n$, $\zeta\,(s) = 0$. Podemos comprobarlo para algunos casos (en el ejemplo calculamos para *n*= {-1 a - 100, de 10 en 10})

```
Table[Zeta[-2 n], {n, 1, 100, 10}]
```

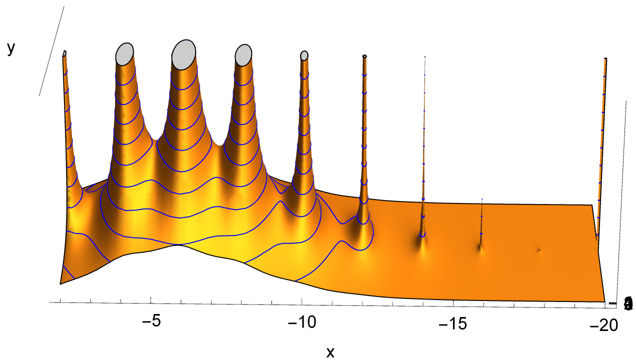
```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Graficamente puede verse representando $s = a + b\,i$ con $b = 0$, se observa que $s = 0$ para $a = \{-2, \;\ldots,\; -2\,n\}$



Otra forma de verlo es representando 1/ $|\zeta(s)|$, con $|\zeta(s)| = |x + y\,i|$. Recuerde que $|x + y\,i| =$

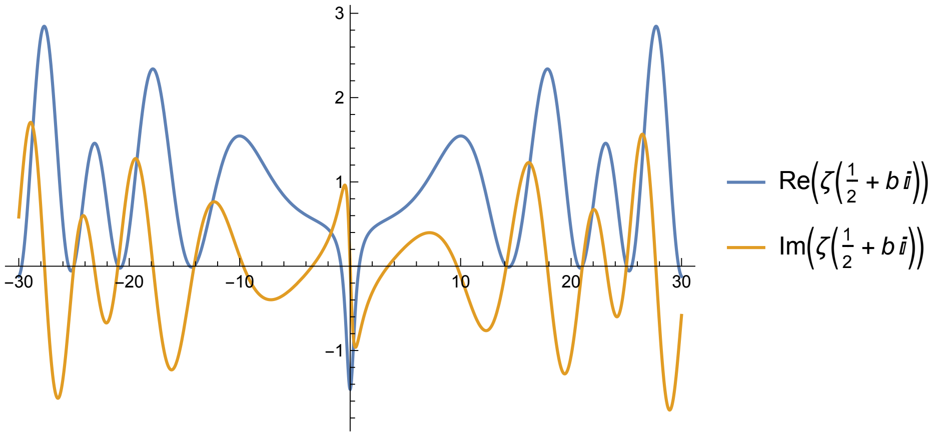
$\sqrt{x^2+y^2}$. Al usar la inversa los ceros se convierten en asintotas que se ven como columnas. Podemos ver las “columnas” que corresponden a los ceros aparecen en $s = -2n$.



A estos ceros $\zeta(-2n) = 0$ se les denominan **ceros triviales**.

Ademas de los ceros triviales existen otros valores complejos s, con $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, para los cuales la función zeta también se anula, llamados **ceros “no triviales”**. La conjetura de Riemann dice que estos ceros no triviales se encuentran en $s = \frac{1}{2} + b\,i$ (observese que es la ecuación de una recta, se le denomina linea crítica) o lo que es equivalente: **La parte real de todo cero no trivial de la función zeta de Riemann es 1/2**.

Puede verse en la gráfica que para el intervalo representado así ocurre.



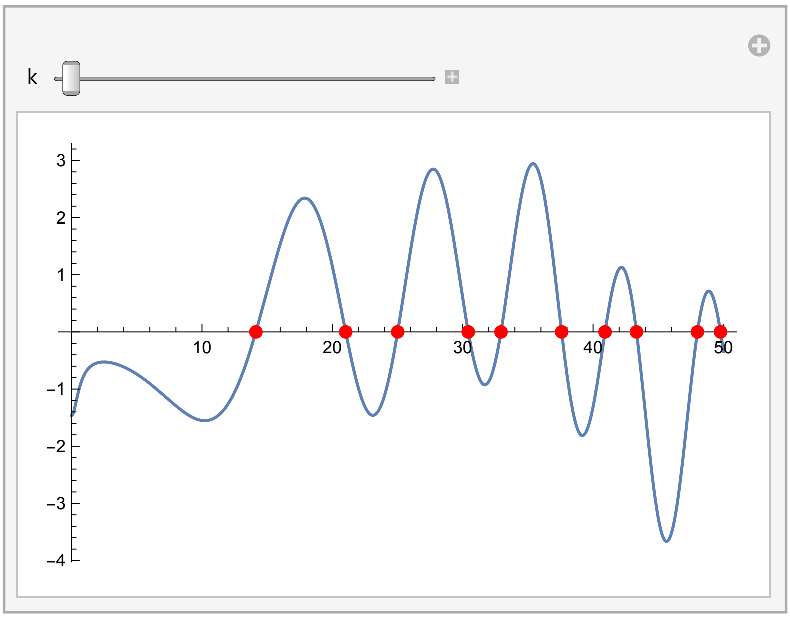
En *Mathematica* la función `ZetaZero[k]` representa el cero *k*-ésimo de $\zeta(s)$ en la linea crítica $s = \frac{1}{2} + i\,b$ cuya parte imaginaria positiva es la más pequeña. Por ejemplo el primer cero corresponde a:

0.5000000000000 + 14.1347251417347 i

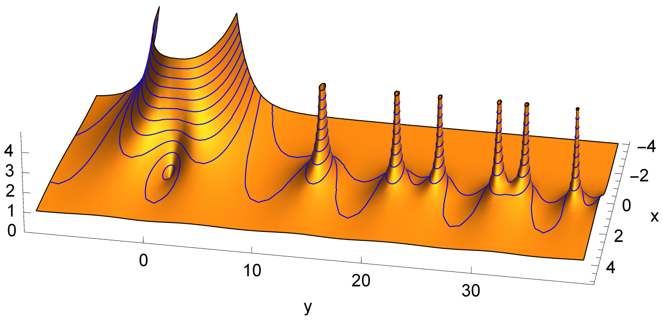
como podemos ver para ese valor $\zeta(s) = 0$.

0

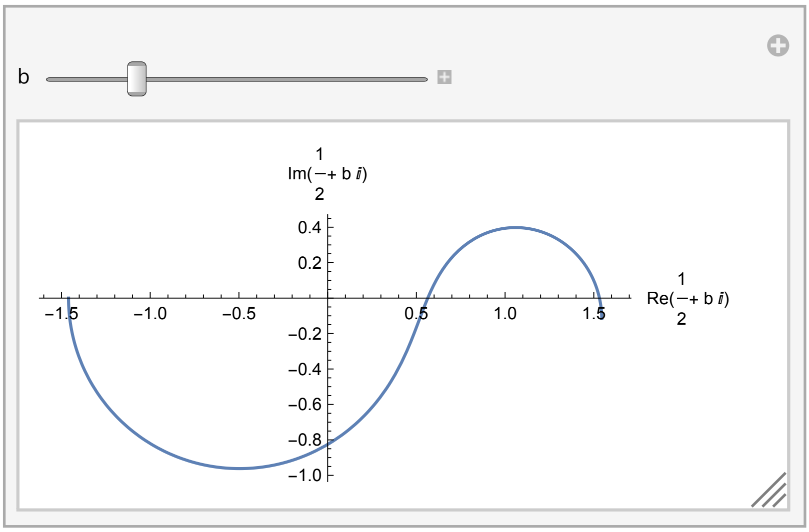
Hemos visto que en el primer cero esta aproximadamente en 14.1347251417347 i. Si queremos representar este cero y los que siguen podemos utilizar la siguiente función que representa al valor de la parte imaginaria (recordar que la parte real siempre es 1/2).



Se puede comprobar que todos los ceros (columnas) están claramente alineados.



En la siguiente representación se muestra en un gráfico polar de la función zeta de Riemann a lo largo de la recta crítica $s = \frac{1}{2} + b\,i$. Los ceros corresponden al pasa de la curva por el origen, puede verse que para el intervalo elegido (0, 26) ocurre cuatro veces.
Las coordendas polares corresponden a la parte real e imaginaria de $\zeta(s)$



La función z y los números primos

Una de las características principales de la función z es su conexión con los números primos.Recordemos que un número primo *p* es aquel que solo es divisible por si mismo o por 1. El conjunto de los números primos (que desde Euclides sabemos que es infinito) le llamamos $\wp$.

Se puede demostrar que $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, también puede obtenerse de la siguiente forma (http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_de_Euler _para _la _función _zeta _de _Riemann):

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right) + \ldots = \prod_{p \in \wp} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

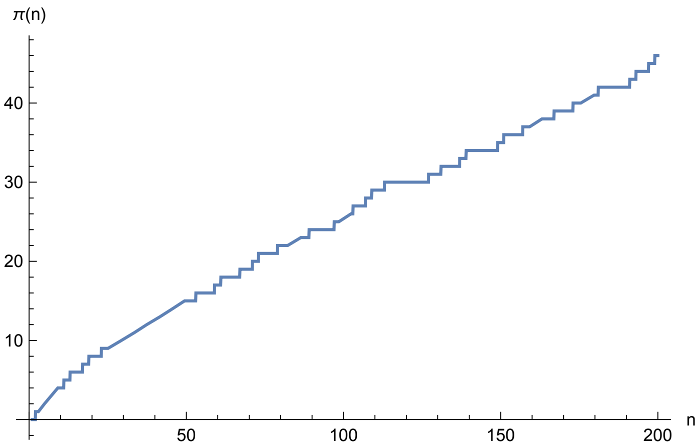
Los números primos aparentemente se distribuyen aleatoriamente. Si tenemos un número primo no hay una formula (excepto verificar que el número es primo) que permite determinar el siguiente.

```
{197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281}
```

Cualquier número natural se puede obtener de forma única como factores de numeros primos. En el ejemplo se eligen varios números y se muestra su factores como números primos, asi ocurre con cualquier número.

1234	$2^1 \cdot 617^1$
3281	$17^1 \cdot 193^1$
4352	$2^8 \cdot 17^1$
5529	$3^1 \cdot 19^1 \cdot 97^1$

En la gráfica vamos representando los números primos acumulados hasta el número natural *n*, que denotamos π(n) (en el ejemplo $n = 200$).

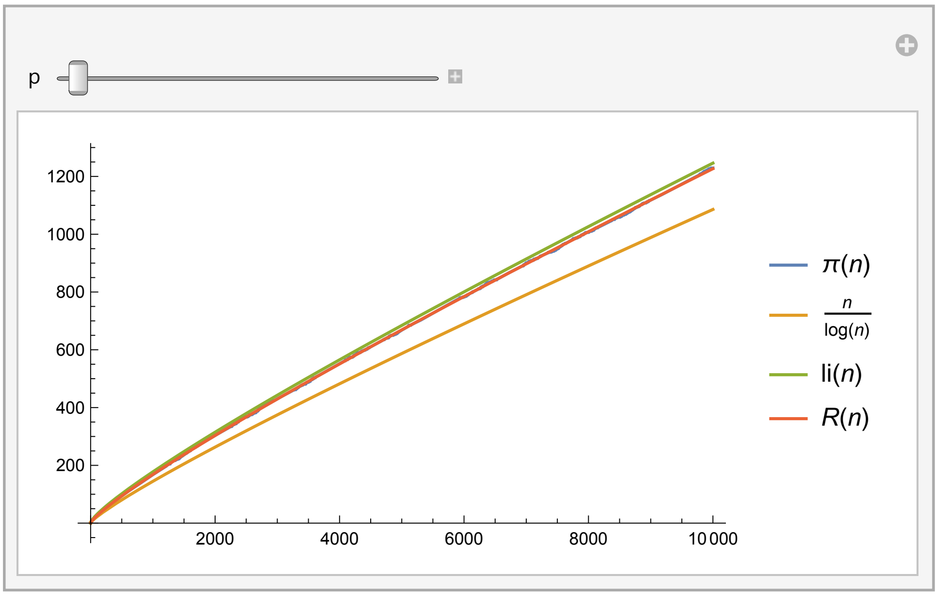


La tendencia es a que la frecuencia de aparición de números primos disminuya cuando *n* aumenta.

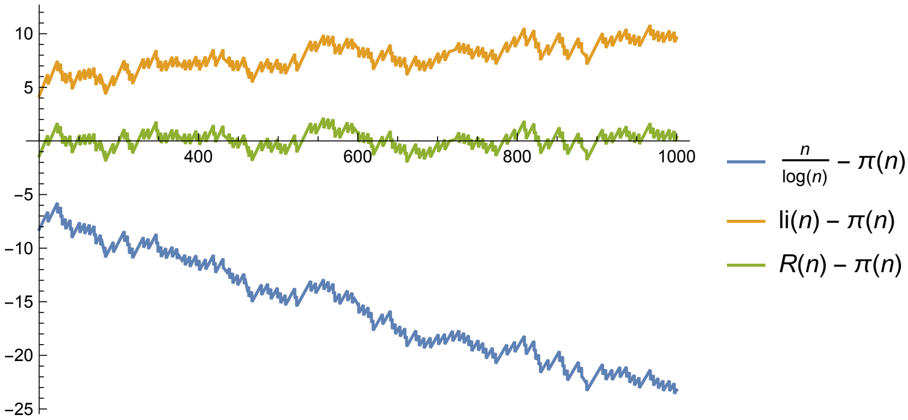
Hay varias aproximaciones para calcular π (n):*t*/Log(*t*), o $\text{li}(n) = \int_0^z dt/\log t$ (en *Mathematica* **`LogIntegral[x]`**), pero la mejor es utilizar una función basada en la z de Riemann. En concreto *Mathematica* utiliza la función $R(n)$ =RiemannR[x].

Para $x > 0$, $R(x) = \sum_n^{\infty} \mu(n)\, \text{li}(x^{1/n}) / n$.

En la siguiente gráfica comparamos el valor real de π(n) comparandolo con las estas aproximaciones.



Puede visualizarse mejor si representamos la diferencia entre las distintas funciones y $\pi(n)$. En el casa de R(n) la aproximación es extraordinaria pues al menos en el intervalo elegido no presenta sesgo alguno



En la siguiente tabla se compara $\pi(n)$, con n = 10^{13} (diez billones), para distintas aproximaciones de π(n).

Legendre:n/(Log[n]−1.08366)	346 621 096 885
Chebyshev:n/(Log[n]−1	345 618 860 221
Gauss: li(n)	346 065 645 810
Riemann: R(n)	346 065 531 066
π(n)	346 065 536 839

Referencias

Se pueden encontrar infinidad de referencias en internet. Por ejemplo: http://mathworld.wolfram.-com/RiemannZetaFunction.html o http://es.wikipedia.org/wiki/Función_zeta_de _Riemann.