

MATRICES Y DETERMINANTES

Guillermo Sánchez (<http://diarium.usal.es/guillermo>)

Departamento de Economía e Hª Económica. Universidad de Salamanca.

Actualizado : 2012-10-28

Sobre el estilo empleado

Mathematica las salidas (*Output*) por defecto las muestra utilizando el estilo: `StandardForm`. En su lugar preferíamos utilizar el estilo `TraditionalForm` que da una apariencia a las salidas (*Output*) coincidente con el habitualmente utilizado en la notación clásica utilizada en las matemáticas.

En cuanto a las entradas (*input*) hemos optado por escribirlas utilizando `StandardForm` y después la convertimos a `TraditionalForm` (esto se hace marcando la celda y en la barra de menú: > Cell:>Convert To:>TraditionalForm)

En el caso de las matrices lo más cómodo es escribirlas como una lista (también puede escribirse directamente como matriz utilizandono una de las paletas incluidas en la barra de menú, pero es más engorroso):

`{{a, b}, {c, d}} ;`

A continuación la convertimos al estilo tradicional según se ha indicado

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

Si en una celda el *input* está en notación `TraditionalForm` y quiere ver la forma de estándar de *Mathematica* convierta la celda a `StandardForm` marcando la celda y en la barra de menú: > Cell:>Convert To:>TraditionalForm)

Nota.- Algunas de las simulaciones se realizaron adaptando ejemplos encontrados en: Wolfram Demonstrations Project

Operaciones básicas con matrices

- Recuerde: Con *Mathematica* para introducir matrices podemos utilizar una paleta (seleccionarla de la barra de menú), la misma paleta nos permite introducir subíndices. Sin embargo es más cómodo introducirla como listas según se muestra en el ejemplo:

`{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

En el conjunto de matrices $M_{m \times n}$ de dimensión $m \times n$ (donde m es el número de filas y n el de columnas) se definen las siguientes operaciones

Para una mayor sencillez en la exposición, definimos las matrices siguientes A y B:

- Añadimos “;” para que no se nos muestre la salida, que en este caso coincidiría con el Input.

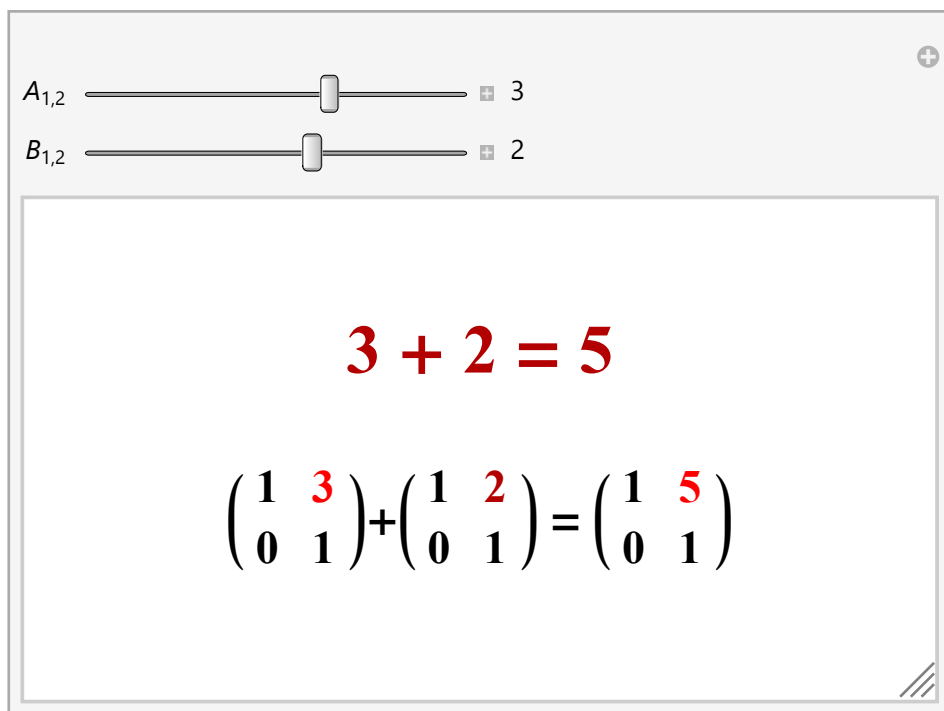
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix};$$

Suma de matrices

$A + B = C$, donde los elementos de C son $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A + B

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Adaptacion basada en Wolfram Demonstrations Project)**Multiplicación de una matrix A por una constante (producto externo)**

$k A = C$, con $k \in \mathbb{R}$, donde los elementos de C son $c_{ij} = k a_{ij}$

$k A$

$$\begin{pmatrix} k a_{11} & k a_{12} & k a_{13} \\ k a_{21} & k a_{22} & k a_{23} \\ k a_{31} & k a_{32} & k a_{33} \end{pmatrix}$$

Propiedades

Se puede comprobar que, dadas dos constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades:

Asociativa: $(\lambda \mu) A = \lambda (\mu A)$

Elemento unidad: $1 A = A$

Distributivas:

$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

Ejercicio :

$$5 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 4 & b & 1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 48 & 7b + 10 & 12 \\ 36 & 36 & 7a + 25 \\ 24 & 72 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

$A B = C$, donde los elementos de C son $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$. Esto es: El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

- En Mathematica en sumatorios cuando hay mas de un indice es conveniente separarlo por “,”. (escriba i, j en vez de ij)

$$\sum_{j=1}^3 a_{i,j} b_{j,k}$$

$$a_{i,1} b_{1,k} + a_{i,2} b_{2,k} + a_{i,3} b_{3,k}$$

El producto de las matrices A y B antes definidas es (**(En Mathematica para multiplicar matrices es fundamental emplear el símbolo “.”)**):

A . B

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que para multiplicar dos matrices A y B se requiere que el número de columnas de la primera matriz (A) coincida con el número de filas de la segunda (B).

Esto es: para multiplicar A.B se debe verificar que $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{n \times q}$

Pruebe con el siguiente simulador a efectuar multiplicación de matrices (Adaptación basada en Wolfram Demonstrations Project)

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 38 & 60 & 23 \\ 25 & 25 & 27 \\ 46 & 44 & 27 \end{pmatrix}$$

Paso a paso :

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 4 + 4 \times 3 + 7 \times 2 & 3 \times 2 + 4 \times 3 + 7 \times 6 & 3 \times 1 + 4 \times 5 + 7 \times 0 \\ 2 \times 4 + 5 \times 3 + 1 \times 2 & 2 \times 2 + 5 \times 3 + 1 \times 6 & 1 \times 2 + 5 \times 5 + 0 \times 1 \\ 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 7 & 3 \times 4 + 3 \times 6 + 2 \times 7 & 7 \times 1 + 4 \times 5 + 3 \times 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 60 & 23 \\ 25 & 25 & 27 \\ 46 & 44 & 27 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que no se verifica la propiedad conmutativa

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 23 & 30 & 33 \\ 50 & 47 & 39 \\ 18 & 38 & 20 \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo: Efectuamos la siguiente multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 38 & 60 \\ 25 & 25 \\ 46 & 44 \end{pmatrix}$$

Sin embargo si invertimos el orden la multiplicación no es posible ¿Por qué? (Observe el mensaje que nos da el programa)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Dot::dotsh : Tensors $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ have incompatible shapes. >>

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobar si hay valores de a, b y c que verifican la siguiente igualdad

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ -a + b \\ 2a + 2b + 4c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(1) : a + c = 5$$

$$(2) : b - a = -4$$

$$(3) : 2a + 2b + 4c = 18$$

De (1) + (2) = $b + c = 1$; y de 2. (2) + (3) = $4b + 4c = 10 \rightarrow b + c = 5/2$, Es decir: $b + c = 1$ y $b + c = 5/2$ que es una contradicción, por tanto no es posible encontrar valores de a, b y c que verifiquen la igualdad propuesta.

Es coherente con el resultado que da *Mathematica* que indica False que significa que no tiene sentido la ecuación.

Para resolver un sistema de ecuaciones se pueden utilizar las funciones Solve o Reduce. Observe que para indicar una igualdad se utiliza un doble igual "=="

$$\text{Reduce}\left[4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} == a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \{a, b, c\}\right]$$

False

Con las matrices que se indican compruebe que se verifican las siguientes propiedades

Propiedades respecto a la suma

Dadas las matrices A, B y C se puede comprobar que:

$\forall A, B, C \in M_{m \times n}$ la suma de matrices verifica las siguientes propiedades:

Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$

Conmutativa: $A + B = B + A$

Elemento neutro: $A + 0_M = 0_M + A = A$

Elemento simétrico: $A + (-A) = 0_M$

Nota : 0_M es una matriz $m \times n$ donde todos los elementos son 0

Para poder efectuar la operación suma ambas matrices deben tener la misma dimensión. ¿Por qué?

Propiedades respecto a la multiplicación

$\forall A \in M_{m \times n}, \forall B \in M_{n \times q}, \forall C \in M_{p \times q}$

Asociativa: $(A.B).C = A.(B.C)$

Distributiva:

$$(A + B).C = A.C + B.C$$

$$A.(B + C) = A.B + A.C$$

Compruebe que con las siguientes matrices que se verifican las propiedades anteriores

$$M1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}; M2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}; M3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 3+4 & 2+4 & 1+7 \\ 2+3 & 3+5 & 1+5 \\ 2+7 & 4+6 & 0+3 \end{pmatrix} =$$

$$M1 + M2$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 6 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M2 + M1$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 6 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Mathematica permite comprobar directamente si se verifica una propiedad escribiendola y comprobando si da "True" (verdadero), se verifica, o "False" (Falso), si no se verifica

$$(M1 + M2) + M3 == M1 + (M2 + M3)$$

True

El elemento neutro, que llamaremos E_n , en este caso es una matriz 3×3 en la que todos los elementos son cero. Podemos escribirla o utilizar ArrayPad

$$E_n = \text{ArrayPad}[\{\{0\}\}, 1]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M1 + E_n == E_n + M1$$

True

Matrices identidad, triangular y diagonal.

Se llama **matriz unitaria o identidad** de orden n , que denominaremos $I_d[n]$, a la matriz cuadrada de orden n en la que $a_{ij} = 1$; para $i = j$; y $a_{ij} = 0$; para $i \neq j$

La matriz identidad en Mathematica se escribe IdentityMatrix :

$$\text{IdentityMatrix}[4]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se llama **matriz diagonal** de orden n , que denominaremos I_n , a la matriz cuadrada de orden n en la que $a_{ij} = 0$; para $i \neq j$

La matriz diagonal en Mathematica se escribe DiagonalMatrix :

`DiagonalMatrix[{a, b, c, d}]`

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior $a_{ij} = 0$; para $i > j$

El siguiente comando permite obtener la matriz triangular superior

`UpperTriangularize[{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior $a_{ij} = 0$; para $i < j$

El siguiente comando permite obtener la matriz triangular inferior

`LowerTriangularize[{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

Transponer una matriz $m \times n$ consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, esto dados los elementos a_{ij} de la matriz A, convierten en los elementos a_{ji} . La matriz resultante se llama traspuesta de A, es de orden $n \times m$, y se denota como A^T o A' .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

Para transponer una matriz utilizamos `Transpose` y si queremos que se muestre con la notación tradicional a continuación convertimos la celda a `TraditionalForm`. Por ejemplo: Escriba `Transpose[{{a11, a12, a13}, {a21, a22, a23}, {a31, a32, a33}}]` o, en este caso `Transpose[A]`, entonces marque la celda vaya a la barra de menú y elija `Cell:>Convert To:>TraditionalForm`. No vale escribir A^T (es decir poner T como exponente de A)

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si una matriz es igual a su traspuesta de dice que es simétrica, esto es $A = A^T$. Para que esto ocurra la matriz debe ser cuadrada.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a & b \\ a & a_{22} & b \\ b & b & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a & b \\ a & a_{22} & b \\ b & b & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si una matriz es igual al negativo de su traspuesta de dice que es antisimétrica o hemisimétrica, esto es $A = -A^T$. A debe ser una matriz cuadrada y los elementos de la diagonal todos cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilice el simulador para practicar la obtención de traspuestas (Adaptacion basada en Wolfram Demonstrations Project)

matrix A

número de filas: 1 2 3 4 5 6 7

número de columnas: 1 2 3 4 5 6 7

fila elegida: 1 2 3

columna elegida: 1 2 3 4

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 2 & -7 \\ 2 & -7 & 1 & 3 \\ -8 & -9 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 \\ -9 & -7 & -9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Compruebe que se verifican las propiedades que se indican

Sea $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(A \cdot B)^T = B^T A^T$$

$$(A + B)^T = B^T + A^T$$

$$(k A)^T = k A^T$$

$$(A^T)^T = A$$

Aplíquelo a las siguientes matrices para un $k = -5$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix};$$

Traza de una matriz

Llamamos traza de una matriz A, $\text{tr}(A)$, a la suma de los elementos de la diagonal principal.

En Mathematica la traza se obtiene con Tr

$$\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right]$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Compruebe que verifican las siguientes propiedades :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix};$$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(k A) = k \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(A B) = \text{tr}(B A)$$

Rango, operaciones elementales

Rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. En la práctica consiste en obtener mediante operaciones elementales el menor número posible de filas o columnas no nulas.

En lo que sigue nos va ser útil conocer lo que llamamos **operaciones elementales**:

F_{ij} significa intercambiar la fila i con la fila j .

$F_i(r)$ significa multiplicar por r (distinto de cero) la fila i .

$F_{ij}(k)$ significa multiplicar la fila i por k y sumarla a la j .

Lo mismo es aplicable a las columnas utilizando C en vez de F .

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$.

$$A = \{ \{1, 4, -1\}, \{2, 5, 3\}, \{1, 10, -11\} \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz $A1$ mediante las operaciones: $F1$ la dejamos tal cual, $F2 \rightarrow F2 - 2 F1$, $F3 \rightarrow F3 - F1$

- La instrucción $A[[i]]$ extrae la sublista i (es decir la fila i) de la matriz A . En el ejemplo lo que se hace es construir una nueva matriz $A1$ donde la fila 1 ($F1$) es idéntica a $F1$ de A , la fila $F2$ de $A1$ se obtiene extrayendo la fila $F2$ de A y restandole la fila $F1$ de A multiplicada por 2 (esto es: $F2 \rightarrow F2 - 2 F1$) de la misma forma construimos la $F3$ de $A1$ extrayendo $F3$ de A y le restamos $F1$ de A (es decir, $F3 - F1$)

$$A1 = \{A[[1]], A[[2]] - 2 A[[1]], A[[3]] - A[[1]]\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz $A2$ mediante las operaciones: $F1$ y $F2$ la dejamos tal cual, $F3 \rightarrow F3 + 2F2$

$$A2 = \{A1[[1]], A1[[2]], A1[[3]] + 2 A1[[2]]\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango es 2.

- El rango se puede calcular directamente mediante `MatrixRank`.

$$\text{MatrixRank}[A]$$

$$2$$

Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada A , de orden n , es ortogonal si verifica que $A A^T = Id$

En el ejemplo se muestra una matriz M que se ortogonaliza

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

A = Orthogonalize[M]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz resultante es ortogonal

$$A.A^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Dada la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcule $A A^T$, $A^T A$, $(A A^T)^T$, $(A B)^T$, $B^T A^T$.

$$A = \{\{1, 2\}, \{2, 0\}, \{-1, 3\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \{\{2, -1, 2\}, \{-1, 1, 0\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.A^T$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^T.A$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(A.A^T)^T$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(A.B)^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^T.A^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Compruebe si para las matrices anteriores: $(A B)^T = B^T A^T$ y calcule $\frac{1}{2}(A + A^T)$

Del apartado anterior vemos que se verifica $(A . B)^T = B^T A^T$

$\frac{1}{2}(A + A^T)$: Ambas matrices son de orden diferente, por tanto no se pueden sumar.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ encuentre una matriz B tal que $A . B = B . A = Id$

- En lo que sigue vamos a utilizar los símbolos a, b, c y d. Para evitar conflictos con asignaciones que se hayan hecho a estos símbolo anteriormente (por ejemplo: si en la misma sesion a hecho una asignación a = 2, entonces cuando escriba de nuevo a, automaticamente se reemplazará a por 2) puede ser conveniente borrarlo antes de usarlos , eso puede hacerse con Clear[a,b,c,d]

`Clear[a, b, c, d]`

Se trata de encontrar los elementos de una matriz B que verifique la condición anterior

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \mathbf{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Calculamos los elementos de B para :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} == \mathbf{Id}$$

$$\begin{pmatrix} 4c - 2a & 4d - 2b \\ a - 2c & b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} == \mathbf{Id}$$

$$\begin{pmatrix} b - 2a & 4a - 2b \\ d - 2c & 4c - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iguando los elementos de las matrices anteriores obtenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas

$$-2a + 4c = 1, -2b + 4d = 0, a - 2c = 0, b - 2d = 1$$

$$-2a + b = 1, 4a - 2b = 0, -2c + d = 0, 4c - 2d = 1$$

Se obtiene que $1 = 0$ y $2 = 0$ que es una contradicción, por tanto no hay solución

- Con Mathematica se puede llegar a la misma conclusión directamente (no olvide que hay que indicarle a la función Reduce cuáles son las variables

`Reduce[A.B == B.A == Id, {a, b, c, d}]`

False

Ejercicios propuestos

2.1 Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **hallar** $6\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{Ce} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

- Utilizamos Ce en vez de C pues C es un símbolo reservado por Mathematica para denotar las constantes en las soluciones de ecuaciones o integrales

$$6\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Ce}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 7 & 6 \\ 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{Ce}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 6 \\ 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular $\mathbf{A}^n$, podemos proceder por inducción:

- No vale escribir $\mathbf{A}^2$ (es decir poner 2 como exponente de A,)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A . A . A

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A . A . A . A

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \times 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos damos cuenta que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que es la solución.

- A este mismo resultado podemos llegar directamente utilizando `MatrixPower[A,n]` que calcula la potencia n-ésima de una matriz A. **No vale escribir A^n (es decir poner n como exponente de A) pues $A^n = A \times A \times A$ que es distinto $A . A . A$.**

MatrixPower[A, n]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Demostrar que $A^2 - A - 2 \text{Id} = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$A.A - A - 2 \text{IdentityMatrix}[3]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Hallar una matriz cuadrada B de orden 2 con coeficientes reales, tal que $B.A = C_e$ siendo

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; C_e = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};$$

- La siguiente expresión borra todas las asignaciones a símbolos que se hayan hecho previamente.

Clear["Global`*"]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; C_e = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

Se trata de obtener los valores de a, b, c y d que verifican la igualdad anterior.

B . A == C_e

$$\begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de las matrices de ambos lados obtenemos las siguientes ecuaciones: (1) $a+2b=5$; (2) $b=2$; (3) $c+2d=6$; (4) $d=3$; Reemplazando (2) en (1) obtenemos $a=1$; reemplazando (4) en (3) obtenemos $c=0$. Por tanto, la igualdad anterior se verifica para $a=1$, $b=2$, $c=0$ y $d=3$.

- A la misma solución llegamos directamente con *Mathematica* como sigue:

Reduce[B.A == C_e, {a, b, c, d}]

$$a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = 0 \wedge d = 3$$

2.4 Hallar todas las matrices que conmuten con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se trata de calcular una matriz B que verifique:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

$$A.B == B.A$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de las matrices de ambos lados obtenemos las siguientes ecuaciones: (1) $a+c = a$; (2) $b+d=a+b$; (3) $c=c$ (4) $d=c+d$;

De (1) y (3) se obtiene $c=0$. De (2) y (4) se obtiene $a = d$. Por tanto $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

- A la misma solución llegamos directamente con *Mathematica* como sigue:

```
Reduce[A.B == B.A, {a, b, c, d}]
```

$$c = 0 \wedge d = a$$

Indicar si son verdaderas las siguientes afirmaciones, referida a matrices cuadradas del mismo orden:

a) El producto de dos matrices triangulares es siempre una matriz triangular.

b) El producto de dos matrices triangulares de dos matrices triangulares superiores o dos matrices triangulares inferiores es otra matriz triangular.

a) Falsa. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) Verdadera

Aunque no es una demostración rigurosa puede comprobarse como sigue para una matriz 3×3 (puede ampliarse para verificar que se cumple para órdenes superiores)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Demuestre que $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

```
MatrixPower[{{a, 1, 0}, {0, a, 1}, {0, 0, a}}, n]
```

$$\begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}n & \frac{1}{2}a^{n-2}(n-1)n \\ 0 & a^n & a^{n-1}n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Determinantes

- Cuando se inicie una nueva sección (por precaución) es conveniente borrar todas las asignaciones previas. Recuerde que esto puede hacerse con `Clear["Global`*"]`.

```
Clear["Global`*"]
```

Un determinante, de manera informal, consiste en transformar una matriz cuadrada A a un sólo término o valor aplicando una serie de reglas. El determinante de la matriz A lo denotamos por $\det A$ o $|A|$.

En el caso de matrices de orden 2 y 3 el cálculo del determinante es sencillo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$-a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} + a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}$$

3x3 Cálculo directo (Adaptación basada en Wolfram Demonstrations Project)

Nuevos números

$$\therefore \begin{vmatrix} 7 & -8 & 10 \\ 0 & 5 & 9 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 175 + -504 + 0 - (350 + 567 + 0) = -1246$$

¿Es posible encontrar el determinante de una matriz que no es cuadrada? ¿Por qué?

Calcular el determinante de $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

140

3x3 Cálculo mediante adjuntos

Para calcular determinantes de matrices mayores a 3×3 es conveniente introducir el concepto de **adjunto**.

Sea $a_{i,j}$ un elemento cualquiera de una matriz cuadrada $A \in M_n$ de orden n . Se llama **adjunto** de $a_{i,j}$, denotado $\alpha_{i,j}$, al escalar $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$ donde $m_{i,j}$ es determinante de la matriz $A_{i,j}$ de la matriz cuadrada $A_{i,j}$, de orden $n-1$ (con $n > 2$), que se obtiene de suprimir en A la fila i y la columna j .

Ejemplo :

$$\text{dado } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; m_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}; \alpha_{i,j} = (-1)^{1+2} m_{1,2} = - \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se llama **matriz adjunta** de A , denotado $\text{adj } A$, a la matriz A definida por $(\text{adj } A)_{i,j} = \alpha_{i,j}$, con $i, j = \{1, \dots, n\}$

Sea A una matriz cuadrada de orden n . El determinante de A puede desarrollarse por los adjuntos de los elementos de una fila o de una columna como:

$$\det A = |A| = a_{i,1} \alpha_{i,1} + a_{i,2} \alpha_{i,2} + \dots + a_{i,n} \alpha_{i,n}$$

$$= a_{1,j} \alpha_{1,j} + a_{2,j} \alpha_{2,j} + \dots + a_{n,j} \alpha_{n,j}$$

$$i, j = \{1, \dots, n\}$$

expandir eligiendo: +

fila

1	2	3
---	---	---

columna

1	2	3
---	---	---

genera un nuevo determinante

Expandir fila 1:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-1(-3) - 2(-78) + 3(67) =$$

$$3 + 156 + 201 =$$

$$360$$

(Adaptacion basada en Wolfram Demonstrations Project)

Calcular por el método del adjunto el determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Podemos resolverlo descomponiendolo en cuatro determinantes de orden 3, desarrollandolo por los elementos de la segunda fila (observese que es conveniente elegir filas con el mayor numero de ceros)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} 1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} 0 \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} (-3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4} 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - (-37) + 0 + 3 \cdot 42 + 2 \cdot (-7) = 149$$

Comprobamos que la solución es correcta

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

149

Propiedades a aplicar en el cálculo de determinantes.

Una forma de simplificar el cálculo de un determinante es procurando que una fila o columna tenga el máximo número de ceros.

Para ello se puede aplicar las siguientes propiedades:

- 1) Si intercambiamos dos filas o columnas cambia el signo del determinante.
- 2) Si todos los términos de una fila o columna son 0, el determinante es 0.
- 3) Si multiplicamos por k todos los elementos de una fila o columna el determinante queda multiplicada por k .
- 4) Si en un determinante a una fila o columna se le suma otra paralela multiplicada por k el resultado no cambia.
- 5) $|A| = |A^T|$

Notación en operaciones entre filas o columnas dentro de una misma matriz A :

$F_{i,j}$ intercambiar la fila i con la fila j

$F_i(k)$ multiplicar por k , con $k \neq 0$, la fila i

$F_{i,j}(k)$ multiplicar por k , con $k \neq 0$, la fila i y sumarla a la fila j .

Ejercicio. Calcular el determinante de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$: a) Mediante operaciones elementales b)

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \{F_{4,3}(-1), F_{4,2}(-1), F_{4,1}(-3)\} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 48$$

- Comprobamos que el resultado es correcto

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

48

Ejercicio: Sea A una matriz cuadrada de orden 3 de una matriz de filas F_1 , F_2 y F_3 cuyo determinante es -4 . ¿Cuál será el determinante de la matriz $-F_3$, $5F_1+F_2$ y $2F_1$?

Método de Gauss para el cálculo de determinantes

`Clear["Global`*"]`

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2a \\ 0 & b & 3a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix};$$

Det[A]

abc

El método de Gauss de cálculo del determinante consiste en triangularizar una matriz teniendo en cuenta a la hora de calcular el determinante que:

- 1) Si intercambiamos dos filas o columnas cambia el signo del determinante.
- 3) Si multiplicamos por k todos los elementos de una fila o columna el determinante queda multiplicado por k.
- 4) Si en un determinante a una fila o columna se le suma otra paralela multiplicada por k el resultado no cambia.

Ejercicio : Aplique el método de Gauss al cálculo del determinante de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{pmatrix};$$

Realizamos las siguientes operaciones : {F1, F2-> F2+F1, F3: F3->F3+F1, F4:F4->F1} (en estas operaciones el signo no cambia o cambia dos veces por lo que se queda como estaba)

- La forma de realizar las transformaciones anteriores con *Mathematica* es la siguiente:

A1 = {A[[1]], A[[2]] + A[[1]], A[[3]] + A[[1]], A[[4]] + A[[1]]}

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

El determinante es :

Det[A1] // Simplify

$(x+1)^3$

Comprobamos que el resultado es el correcto :

Det[A] // Simplify

$(x+1)^3$

Matriz Inversa

Clear["Global`*"]

Una matriz B se dice que es inversa de A si $A \cdot B = B \cdot A = \text{Id}$ (matriz identidad), entonces B se denota como A^{-1} (que no es lo mismo que $1/A$)

Matriz 2x2

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix};$$

Su determinante es

Det[A]

$a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}$

Su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} & \frac{a_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} \end{pmatrix}$$

- Inverse[A] calcula la inversa de A

Inverse[A]

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} & \frac{a_{1,1}}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}} \end{pmatrix}$$

Calcular la inversa $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

A = {{3, 4}, {2, 1}};

Det[A]

-5

- Aquí hemos escrito Inverse[A] y convertido la celda a TraditionalForm. No vale escribir A^{-1} (es decir A elevado a -1).

A^{-1}

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Matriz 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

Su determinante es

Det[A]

$$-a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{11} a_{22} a_{33}$$

Su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,2} \\ a_{3,3} & a_{3,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{2,3} & a_{2,1} \\ a_{3,3} & a_{3,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} \\ a_{2,3} & a_{2,1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{3,2} & a_{3,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Calcule la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Inverse[A]

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{70} & \frac{1}{70} & \frac{11}{70} \\ \frac{23}{140} & -\frac{31}{140} & \frac{9}{140} \\ \frac{13}{140} & \frac{19}{140} & -\frac{1}{140} \end{pmatrix}$$

Comprobar las siguientes propiedades:

Si A es invertible entonces: $(A^{-1})^{-1} = A$

Si A . B es invertible entonces $(A.B)^{-1} = A^{-1} . B^{-1}$

Metodo de inversión de Gauss - Jordan

Dada un matriz

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Construimos la matriz ampliada que consiste en añadirle a la derecha una matriz identidad del mismo orden

```
ma = Transpose[Join[Transpose[m], IdentityMatrix[Length[m]]]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mediante operaciones elementales convertimos la matriz cuadrada de la derecha en una matriz identidad.

```
RowReduce[ma]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observe que si tomamos los elementos de la mitad derecha de la matriz tenemos la matriz inversa

m^{-1}

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Para que valores de t no tiene inversa la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$?

Ayuda : Una matriz de dimension 3 tiene inversa si rango es 3, por tanto se trata de obtener los valores de t para los que la matriz tiene un rango menor a 3 . Sol.:t=1 o t=3

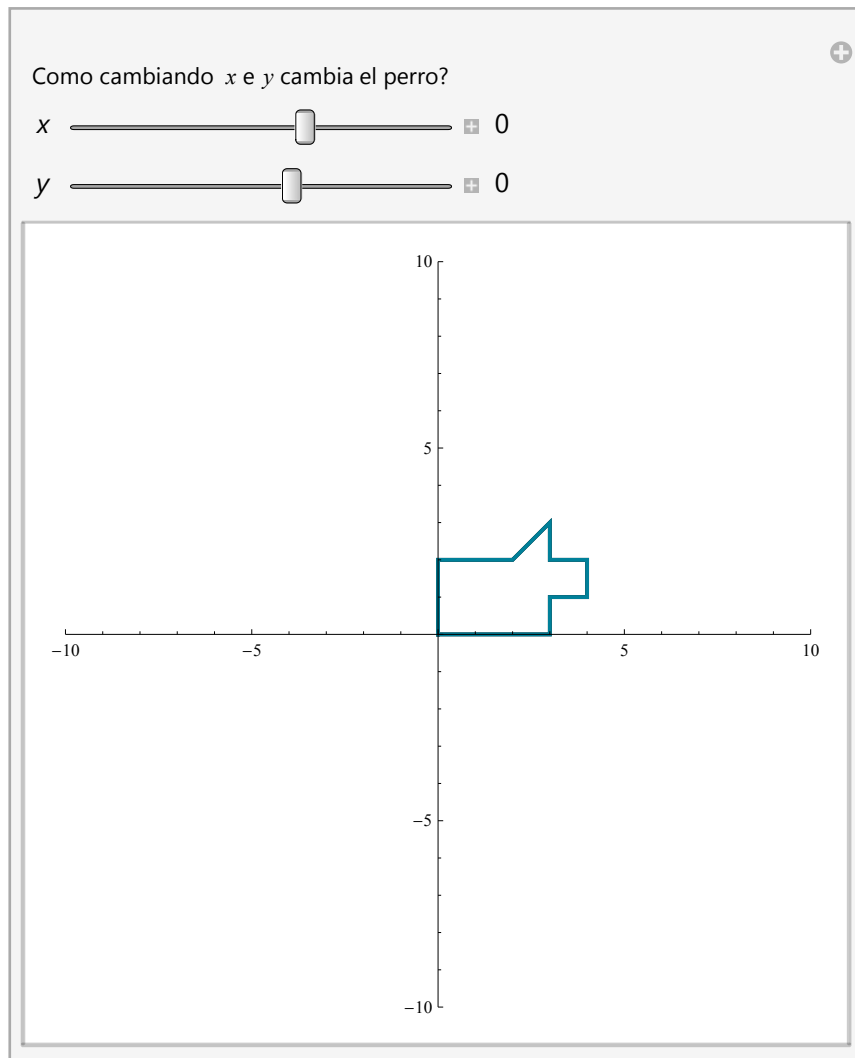
Pero, ¿las matrices valen para algo?

Las matrices se utilizan en todas las áreas de la ciencias. A modo de divertimento se muestran como operaciones con matrices son utilizadas en el tratamiento de imagenes (en este caso caricaturas) en juegos para consola, cine, etc. Recuerde que un punto $P(x, y)$ en un plano se trasforma en otro $P'(x', y')$ mediante trasformaciones.

Ejemplos :(Adaptacion basada en Wolfram Demonstrations Project)

Traslaciones

Debajo se muestran traslaciones horizontales y verticales. 'Recuerde que un desplazamiento de (x, y) a $(x+a, y+b)$ es la ecuación matricial $(x', y') = (x, y) + (a, b)$

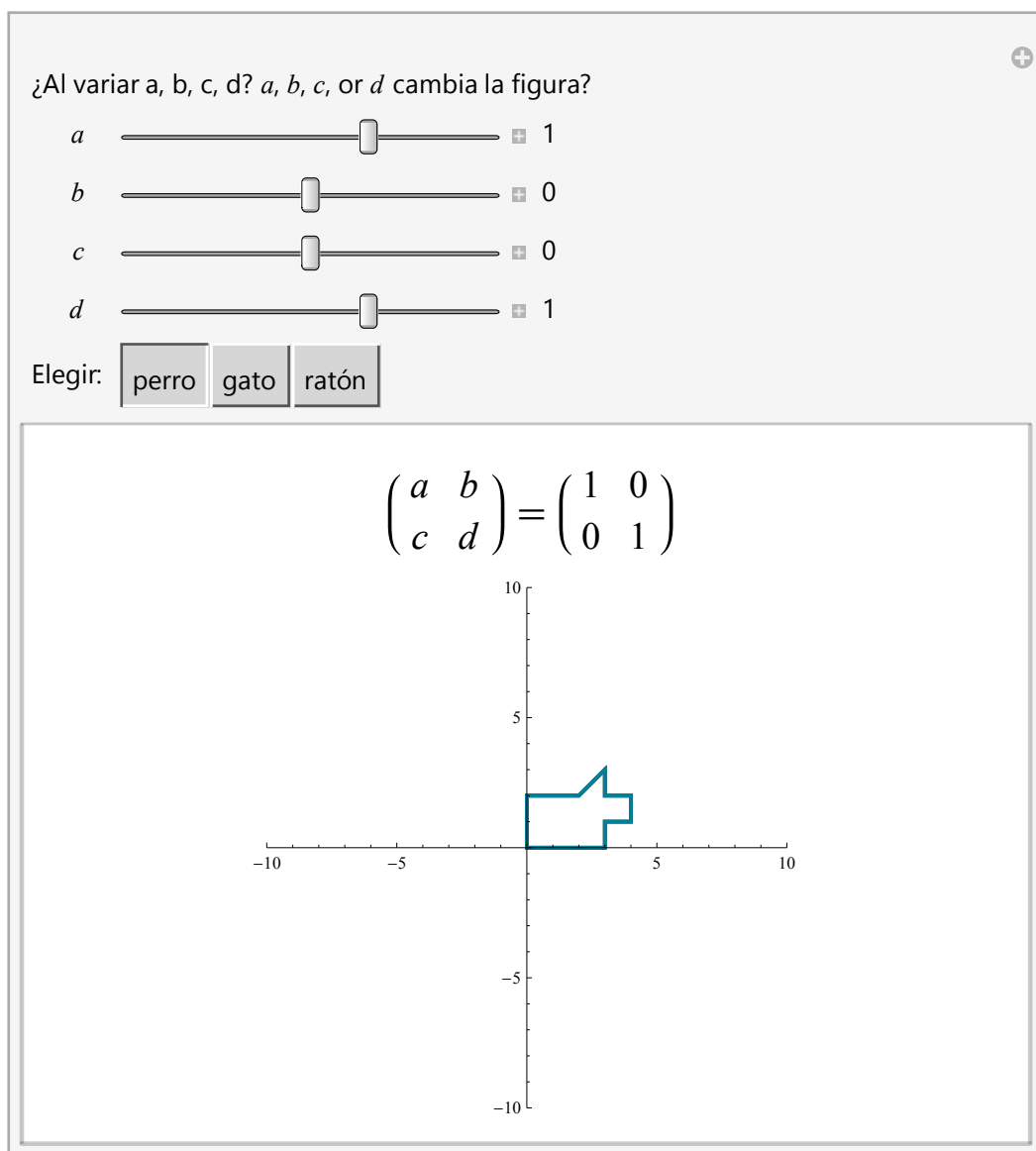


Transformación geométrica de una matriz

La multiplicación de matrices puede ser modificada para cambiar los gráficos en las figuras. La matriz $A =$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ representa un perro. Los términos de la matriz B se pueden variar actuando sobre $a, b, c, y d$. El resultado

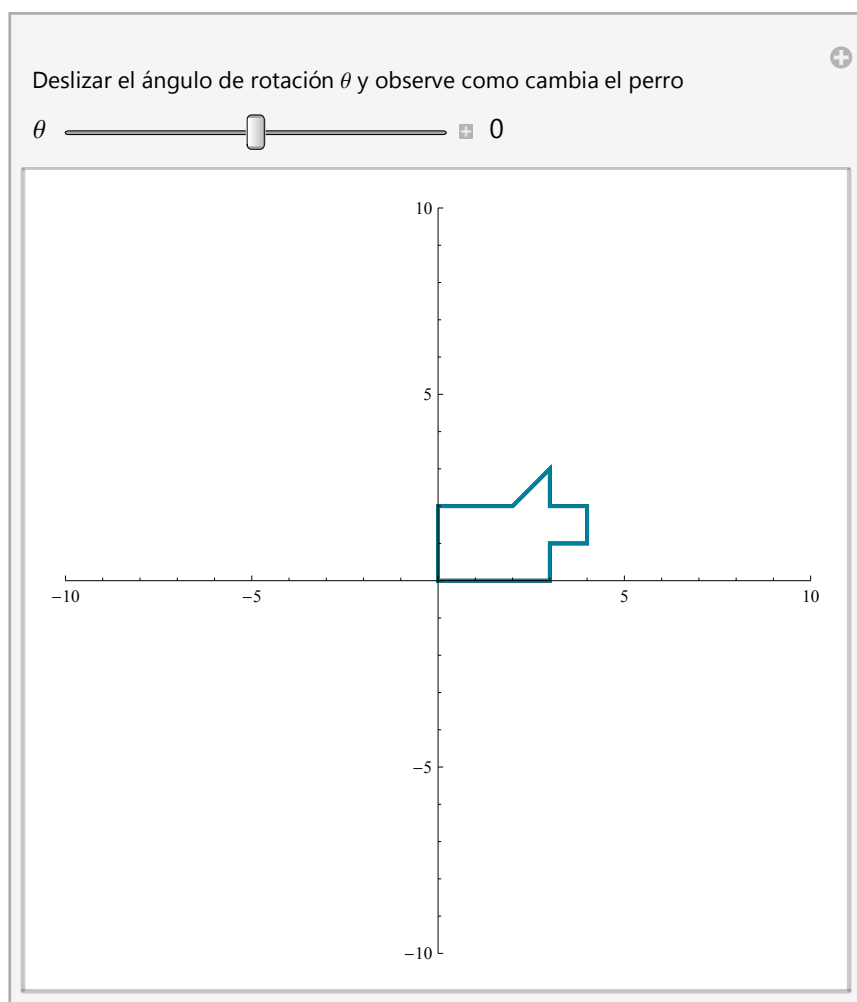
es la matriz BxA , observe el efecto sobre la figura. Nota que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no modifica el gráfico.



Rotaciones

Aque se utiliza la siguiente propiedad Para girar en sentido antihorario multiplicar por $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ y en el antihorario por $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, donde θ es el ángulo con el que desea girar.

Por ejemplo, para girar en sentido antihorario 90° multiplicar por $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para girar 180° multiplicar por $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Para girar 270° (antihorario) multiplicar por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para girar 360° (es decir queda lo mismo) multiplicar por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.



Sobre el estilo empleado

Mathematica las salidas (*Input*) por defecto las muestra utilizando el estilo: `StandardForm`. En su lugar preferiamos utilizar el estilo `TraditionalForm` que da una apariencia a las salidas (*Output*) coincidente con el habitualmente utilizado en la notación clásica utilizada en las matemáticas. Esto puede hacerse para cada celda añadiendo `// TraditionalForm` al final de cada *input*. Sin embargo puede hacerse que este estilo (`TraditionalForm`) se aplique a todas las salidas del cuaderno (o notebook) añadiendo la siguiente sentencia (en este caso hemos definido la celda para que se ejecute automáticamente al inicio):

```
SetOptions[EvaluationNotebook[],
  CommonDefaultFormatTypes -> {"Output" -> TraditionalForm}]
```