Sistema posicionamiento global (GPS) y las teorías de la relatividad

Guillermo Sánchez (http://web.usal.es/guillermo)

Actualizado: 2012-01-13

Nota : este documento está realizado utilizando el programa Mathematica.

¿Trascurre igual el tiempo en un satélite que en un receptor en Tierra?

El sistema GPS lo forman un conjunto de satélites que orbitan a 20200 km sobre la superficie de la Tierra. En el sistema GPS es fundamental determinar con gran precisión el tiempo. El problema que se presenta es que el tiempo en un satélite GPS ocurre de forma distinta a la del receptor situado en la superficie terrestre. Es así debido que la que velocidad y la gravedad en el satélite son distintas a la del receptor y como consecuencia, según la teoría especial de la relatividad o TER, que aplica a la velocidad, y la teoría general de la relatividad o TGR, que se refiere a la gravedad, el tiempo ocurre de forma distinta.

De hecho, si colocamos un reloj en un satélite GPS y otro idéntico en Tierra observaríamos que uno retrasa respecto a otro en una cantidad que si no se tiene en cuenta se cometerían imprecisiones inaceptables en la determinación de la posición. Pero ¿cual es el que retrasa, cuánto retrasa y por qué? Ese es el objeto de esta breve nota. Utilizaremos algunas sencillas ecuaciones. Los que tengan aversión a las matemáticas pueden saltárselas sin que se pierdan las ideas fundamentales del razonamiento.

Para un visión general del sistema GPS la información que da Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System) es suficiente para la mayoría de los casos. Respecto a las implicaciones que la TGR y TER tienen en el sistema GPS hay referencias en muchos sitios pero no se muestran los cálculos detallados (al menos yo no los he encontrado), esta nota pretende cubrir ese vacio. Si se quiere obtener una información detallada de los cálculos utilizados en el sistema GPS la cita más frecuente es : Parkinson, B. W., Spilker, J.J. Jr., Global Positioning System: Theory and Applications, vols.1 and 2, American Institute of Aeronautics, 370 L'Enfant Promenade, SW, Washington, DC,1996 (casi 800 páginas).

Efecto que sobre la medida del tiempo tiene la velocidad

Para la determinación de la posición de un receptor de GPS situado en Tierra se necesita que este reciba al menos la señal de cuatro satélites. Estas señales incluye la hora en cada satélite en el momento que este emite la señal pero estos están en movimiento a una velocidad constante v_s respecto a cualquier punto situado sobre la superficie terrestre. La velocidad de acuerdo a la TER introduce un retraso en el reloj del satelite respecto al situado en Tierra.

Realmente no hay ningún punto en reposo en el Universo pero en este caso consideramos fijo (sistema no inercial) la superficie terrestre desde la que ha sido lanzado el satélite respecto al cual ha estado sometido a una aceleración hasta alcanzar la velocidad v_s. Influyen otros efectos, como la aceleración de coriolis, que por simplicidad no consideraremos. Además afectan muy poco a los cálculos a los que aquí nos referiremos.

La velocidad v_s puede obtenerse a partir de las leyes de Newton (supondremos el satélite en orbita ecuatorial). En efecto: Para que un objeto este en órbita su fuerza centrípeta, F_c, debe ser igual a la gravitatoria, F_g.

$$F_c = m_s\, a_c \;=\; m_s\, \frac{{v_s}^2}{R_s}$$

$$F_s = G\, \frac{m_c\, M_\oplus}{{R_s}^2}$$

siendo m_s= masa del satélite, a_c = aceleración centrípeta del sátelite, R_s = distancia al centro de la Tierra (está será la del radio terrestre, $R_\oplus$, más la altura del satelite sobre la superficie que es 20 200 km), $M_\oplus$= masa de la Tierra, G = constante de gravitación universal.

Igualando F_c y F_g, se puede calcular v_s

$$G\, \frac{M_\oplus}{{R_s}^2} = \;\frac{{v_s}^2}{R_s} \Rightarrow v_s = \sqrt{G\, \frac{M_\oplus}{R_s}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior G, $M_\oplus$ y R_s por sus valores se obtiene que v_s (v en la expresion de abajo), en el SI (m/s), es:

Los valores de G (GravitationalConstant), $M_\oplus$(EarthMass) y $R_\oplus$(EarthRadius) pueden obtenerse en *Mathematica* utilizando el paquete PhysicalConstants .

```
Needs["PhysicalConstants`"]
```

```
v =
 Round[√(GravitationalConstant[[1]] EarthMass[[1]] / (EarthRadius[[1]] + 20 200 000))]
```

```
3873
```

Como hemos indicado según la TER el tiempo entre dos sucesos será distinto para el observador en reposo (no inercial) y para el objeto que se mueve a una velocidad v respecto al observador en resposo (Una excelente explicación no matematica de este efecto puede encontrarse en http://eltamiz.com/relatividad-sin-formulas). En concreto están relacionados por la siguiente ecuación:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

donde Δt es el tiempo (llamado tiempo propio) entre los dos sucesos para el observador en resposo (en nuestro caso el receptor GPS) y $\Delta\tau$ para el satelite GPS, que se mueve a una velocidad v_s; c es la velocidad de la luz en el vacio.

De la ecuación anterior se deduce que el tiempo trascurre más lentamente en el objeto en movimiento, en nuestro caso en el satelite.

Vamos a calcular la relacion entre $\Delta\tau$ y Δt, previamente necesitamos conocer cual es la velocidad de la luz en el vacio, en m/s. que es

```
c = SpeedOfLight[[1]]
```

```
299 792 458
```

Para 1 segundo medido en el observador en la superficie trascurrirán en el satelite GPS:

```
Δτ = N[√(1 - (v/c)^2), 15]
```

```
0.999999999916551
```

Es decir, teniendo en cuenta solo el efecto de la velocidad por cada segundo medido por el observador en tierra el reloj GPS se retrasará :

```
ΔτTER = 1 - Δτ
```

8.3449×10^{-11}

El retraso que experimentará el reloj del satélite en 24 h respecto al terrestre será, en microsegundos :

```
cTER = 24 × 60 × 60 ΔτTER 10^6
```

```
7.2100
```

Efecto que sobre la medida tiene el campo gravitario

Sin embargo hay otro efecto que debemos tener en cuenta: La gravedad.

Según la Teoría General de la Relatividad (TGR) el tiempo trascurre de distinta forma para un observador situado en un campo gravitario dependiendo de su distancia, R, al centro de masas del campo gravitatorio de acuerdo a la ecuación:

fg(fracción a corregir según el potencial gravitario) = $G\,\frac{M_{\oplus}}{R\,c^2}$

La deducción de esta forma puede hacerse calculando el denominado desplazamiento al rojo en un campo gravitario (una forma sencilla de hacerlo puede encontrarse en : El legado de Einstein de J. Schwinger).

Calculamos la diferencia por segundo que se produce entre el tiempo medido entre el satélite GPS y el receptor GPS, esto es

$\Delta\tau_{\text{TGR}} = G\,\frac{M_{\oplus}}{R_s\,c^2} - G\,\frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}\,c^2}$

```
ΔτTGR = N[Round[GravitationalConstant[[1]]
      EarthMass[[1]] / (((EarthRadius[[1]] + 20 200 000)))] / SpeedOfLight [[1]]^2 -
   Round[GravitationalConstant[[1]] EarthMass[[1]] / (((EarthRadius[[1]])))] /
    SpeedOfLight [[1]]^2]
```

-5.28659×10^{-10}

En este caso el reloj en el satelite GPS adelanta respecto al receptor GPS. Es decir: el tiempo va más rápido en el satélite que en Tierra, lo opuesto que ocurre aplicando la corrección relativista de la velocidad.

En este caso el reloj del satélite experimentará un adelanto que en 24 h será, en microsegundos :

```
cTGR = 24 × 60 × 60 ΔτTGR 10^6
```

-45.6761

Efecto combinado

Si combinamos ambos efectos y lo expresamos en desviación diaria, vemos que en 24 horas el tiempo en el satélite adelanta (en microsegundos):

```
correciondiariasatelite = cTER + cTGR
```

-38.4661

Nota : Esta es la cifra que se referencia en libros como en El telescopio de Einstein de E. Gates (pág. 76)

El error tipico admitido en la medida del tiempo es 6 ns (con lo que la incertidumbre en la determinación de la posición es):

```
(6 * c * 10^-9 // N) "m"
```

1.79875 m

Si no aplicasemos las correcciones relativistas el error sería de varios km al día

```
(correciondiariasatelite * 10^-6 * c * 10^-3 // N) "km/día"
```

-11.5318 km/día

En la práctica lo que se hace es calibrar los relojes en los satelites GPS antes de su lanzamiento de forma que una vez en órbita el tiempo lo midan ya corregido, como si estuviesen en Tierra. Es decir: el reloj en tierra antes del lanzamiento retrasa respecto a otro reloj idéntico situado en su misma posición, de forma que una vez en órbita ambos relojes estén sincronizados.