Funciones de varias variables. Derivación. Optimización

Guillermo Sánchez (http://diarium.usal.es/guillermo)

Departamento de Economia e Hª Económica. Universidad de Salamanca.

Actualizado : 2012-12-18

Sobre el estilo utilizado

Mathematica las salidas (*Input*) por defecto las muestra utilizando el estilo: `StandardForm`. En su lugar preferiamos utilizar el estilo `TraditionalForm` que da una apariencia a las salidas (*Output*) coincidente con el habitualmente utilizado en la notación clásica utilizada en las matemáticas. Esto puede hacerse para cada celda añadiendo // TraditionalForm al final de cada *input* . Sin embargo puede hacerse que este estilo (TraditionalForm) se aplique a todas las salidas del cuaderno (o notebook) añadiendo la siguiente sentencia (en este caso hemos definido la celda para que se ejecute automaticamente al inicio):

```
SetOptions[EvaluationNotebook[],
 CommonDefaultFormatTypes -> {"Output" -> TraditionalForm}]
```

FUNCIONES

Definición de función en varias variables

El concepto de función puede extenderse a dos o mas variables.

Función de dos variables: Una funcion $f(x_1, x_2)$, donde $\{x_1, x_2\} \in R^2$, es una regla que asigna un número específico $f(x_1, x_2)$ a cada elemento $\{x_1, x_2,\}$.

Ejemplo: El volumen de un cilindro es V(r, h) = $\pi r^2 h$, por tanto depende de dos variables: el radio, r, y la altura h. .

```
v[r_, h_] = π r^2 h;
```

Para r = 3 y h = 2, el volumen es :

```
v[3, 2] // N
```

56.5487

2) $z = f(x, y) = 2x + x^2 y^3$. ¿Cuanto valen $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(-2, 3)$ y $f(a+1, b)$?

Sol:

```
f[x_, y_] = 2 x + x^2 y^3;
```

```
f[1, 0]
```

2

```
f[0, 1]
```

0

$2x + x^2 y^3 = 2(-2) + (-2)^2 3^3 = 104$

```
f[-2, 3]
```

104

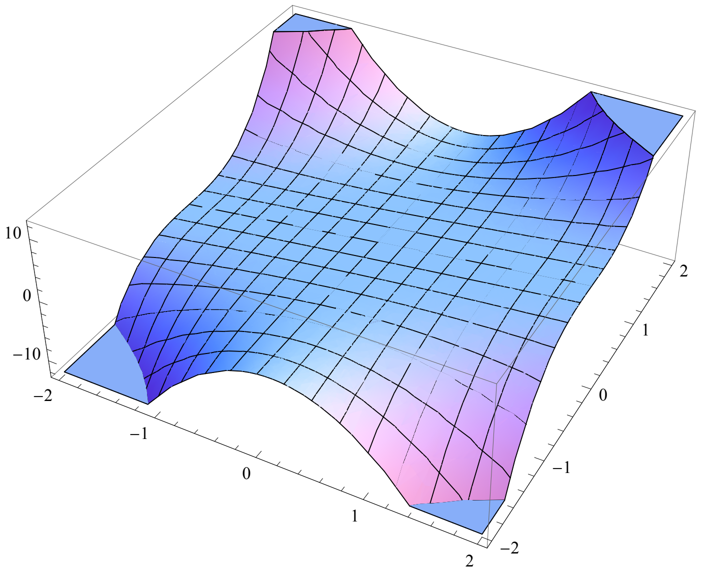
$2x + x^2 y^3 = 2(a+1) + (a+1)^2 b^3$

```
f[a + 1, b]
```

$(a+1)^2 b^3 + 2(a+1)$

La función Plot3D nos permite representar funciones en tres dimensiones

```
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Un ejemplo de función de dos variables ampliemente usada en economia es la funcion de Cobb-Douglas; $f(x,\ y) = \mathrm{A}\ x^a y^b$ siendo $a,\ b$ y A constantes.

Función de n variables: Una funcion $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, donde $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\} \in R^n$, es una regla que asigna un número específico $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ a cada elemento $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$.

Ejemplo: Funcion $d(p, w, t) = 108 - 6.03\ p + 0.164\ w - 0.42\ t$ siendo d la demanda de azucar (toneladas), p el precio de la azucar (€/kg), w un indice de producción y t el año (tomando t=0 a 1929)

¿Cual será la demanda este año (2012) suponiendo que el precio del azucar es 0.12 €/kg , w = 1.03)?

```
108 - 6.03 × 0.12 + 0.164 × 1.03 - 0.42 (2012 - 1929)
```

72.5853

Función escalar

Se define **función escalar** o real de n variables como cualquier aplicación

f: $\mathrm{A} \subset R^n \longrightarrow R$

$\forall\, x \in A \longrightarrow f(x) = y \in R$

siendo

$x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)^T \in \mathrm{A} \subset R^n$

Ejemplo: Función escalar de dos variables:

$f:\ R^2 \longrightarrow R$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow f(x) = \sqrt{x_1} - 3\, x_1^2\, x_2$$

Ejemplo

Función escalar de dos variables:

$f:\ R^2 \longrightarrow R$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow f(x) = \sqrt{x_1} - 3\,x_1^2\,x_2$$

Derivación de funciones en varias variables

Derivadas parciales

Sea $y = f(x_1, x_2, .., x_i, ..., x_n)$. La derivada parcial de f con respecto a x_i, denotada por $\partial f / \partial x_i$, es la derivada de f con respecto a x_i, manteniendo las otras variables $\{x_1, x_2, .., x_{j \neq i}, ..., x_n\}$ constantes

Las derivadas parciales se pueden denotar de distintas formas

$$f_i'(x) = D_i\, f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \partial_{x_i}(f)$$

con $x = \{x_1, x_2, .., x_i, ..., x_n\}$

El concepto de derivada parcial en varias variables es similar al derivada en una variable

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\Delta x_i} (f(x_1, x_2, .., x_i + \Delta x_i +, ..., x_n) - f(x_1, x_2, .., x_i, ..., x_n))$$

Calcular las derivadas parciales primeras de $f(x, y) = y\,x^3 + y^2\,x^2 + x + y^2$

$$\mathbf{f(x\_, y\_) = y\,x^3 + y^2\,x^2 + x + y^2;}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3\,x^2\,y + 2\,x\,y^2 + 1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^3 + 2\,y\,x^2 + 2\,y$$

y de

$$\mathbf{f(x\_, y\_) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2};}$$

Observe que al derivar respecto de x la y se comporta como una constante (puede ayudarnos verla mentalmente como k), entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\,x}{k^2 + x^2}\right) = \frac{k(k^2 + x^2)}{(k^2 + x^2)^2} - \frac{2\,k\,x^2}{(k^2 + x^2)^2}$$ por tanto (recuerde que a y le hemos llamado k)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{2\,x^2\,y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}$$

De la misma manera :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2\,x\,y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Límites reiterados

Sea $f : C \to \mathbb{R}$ una función real definida en un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de C.

- *Se llama límite reiterado de f cuando x tiende a a primero e y tiende a b después, al límite $\lim_{y \to b}\left(\lim_{x \to a} f(x, y)\right)$ si este límite existe.*
- *Se llama límite reiterado de f cuando y tiende a b primero y x tiende a a después, al límite $\lim_{x \to a}\left(\lim_{y \to b} f(x, y)\right)$ si este límite existe.*

Utilizar los limites reiterados para estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales en el origen de la función que sigue. ¿Es f diferenciable en (0,0)?

$$f(x, y) = \frac{x^6}{(x^2 - y)^2 + x^6} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(x, y) = 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0)$$

Puesto que Dom(f) = (x,y) $\in R^2/ \ (x^2 - y)^2 + x^6 \neq 0 \cup \{(0,0)\}$, la función anterior es continua en Dom(f) = (x,y) $\in R^2/ \ (x^2 - y)^2 + x^6 \neq 0$ ya que en el entorno de cada punto de Dom(f) , está definida como combinación de funciones continuas. El único problema está en (0,0) que aunque pertenece a Dom(f) está en su frontera. Para ello estudiamos los límites reiterados

$$\lim_{y \to 0} \frac{x^6}{x^6 + (x^2 - y)^2}$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^6}{x^6 + (x^2 - y)^2}$$

$$0$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$0$$

Como existen y son iguales podemos considerar que en prinpipio es diferenciable. Habria que estudiar además los limites direccionales pero no entraran en el examen

Derivadas parciales de ordenes superiores

Las derivadas parciales $\partial f / \partial x_i$ que acabamos de definir son las **derivadas parciales de primer orden**. A partir de $\partial f / \partial x_i$ pueden aplicarse derivadas sucesivas.

Así, a las siguientes derivadas se llaman **derivadas parciales de segundo orden** de una función $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

En la mayoria de los casos (pero no siempre) se verifica que las derivadas cruzadas son identicas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

Ejemplo. Calcular las derivadas segundas del ejemplo anterior

$$f(x\_, y\_) = y x^3 + y^2 x^2 + x + y^2;$$

Segun un ejercicio anterior

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3 x^2 y + 2 x y^2 + 1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^3 + 2 y x^2 + 2 y$$

Derivamos lo anterior como sigue :

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6 x y + 2 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2x^2 + 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 4yx$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 4yx$$

Ejemplo de aplicación de derivadas parciales en Economía : Consideremos la función productiva agricola Y =$F(K, L) = A K^a L^b$, donde Y es el número de unidades producidas, K el capital invertido, y L el trabajo . Entonces a $\partial Y / \partial K$ se llama productividad marginal del capital. De manera analoga $\partial Y / \partial L$ es la productividad marginal del trabajo. Calcular las pruductividades marginales

$F(\text{K\_}, \text{L\_}) = A K^a L^b;$

A, a, b, son ctes positivas

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = a A K^{a-1} L^b$$

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = A b K^a L^{b-1}$$

La regla de la cadena

Sea $z = F(x, y)$, donde $x = f(t)$ e $y = g(t)$ su derivada total (dz/dt) es

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo.- La derivada total de la función z = $x^2 + y^3$, donde $x = t^2$, $y = 2t$ es

$z(\text{x\_}, \text{y\_}) = y^3 + x^2;$
$x(\text{t\_}) = t^2;$
$y(\text{t\_}) = 2t;$

$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 3y^2$; $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = 2t$; $\frac{\partial y(t)}{\partial t} = 2$ y de aquí:

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 3y^2\frac{dy}{dt} = 2x \times 2t + 3y^2 \times 2$$

y finalmente

$$\frac{\partial z(x(t), y(t))}{\partial t} = 4t^3 + 24t^2$$

Ejercicios

Compruebense las siguientes expresiones

Ejercicio.- Dada la función (Nota: recuerde que Log es el logaritmo neperiano, frecuentemente se le denota por ln)

$$z(\text{x\_}, \text{y\_}) := \frac{1}{2}\text{Log}\left[\frac{x+y}{x-y}\right]$$

Compruebese que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución :

$$\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}$$

$$\frac{(x-y)\left(\frac{1}{x-y}-\frac{x+y}{(x-y)^2}\right)}{2\,(x+y)}$$

Simplificamos la expresión anterior

$$\frac{y}{y^2-x^2}$$

$$\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}$$

$$\frac{(x-y)\left(\frac{x+y}{(x-y)^2}+\frac{1}{x-y}\right)}{2\,(x+y)}$$

Simplificamos la expresión anterior

$$\frac{x}{x^2-y^2}$$

Sustituimos $x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}$ y simplificamos y vemos que se cumple que $x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$x\,\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}+y\,\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\ \text{// Simplify}$$

0

```
Clear[z]
```

Ejercicio.- Dada la función

$$z(\text{x\_},\ \text{y\_}) := \frac{1}{2}\,\text{Log}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]$$

Compruebese que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Solución :

$$\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}$$

$$\frac{x}{2\,(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\ y)}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2\,x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Simplificamos la expresión anterior

$$\frac{y^2-x^2}{2\,(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}$$

$$\frac{y}{2\,(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\ y)}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2\,y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Simplificamos la expresión anterior

$$\frac{x^2-y^2}{2\,(x^2+y^2)^2}$$

Sustimos $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, simplicamos y vemos que se cumple que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$$\frac{\partial^2 z(x,\ y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z(x,\ y)}{\partial y^2}\ \text{// Simplify}$$

0

Optimización en varias variables

Definición de máximo y de mínimo

Sea f una función de n variables $\{x_1,\ ..,x_n\}$ definida en un dominio de $S\subset R^n$. Se $c=\{c_1,\ ..,c_n\}\in R$ y supongamos que f toma un valor en c que es mayor o igual que los que toma para cualquier otro punto $x=\{x_1,\ ..,x_n\}$. Esto es:

$f(x)\leq f(c)\qquad \forall\, x\in R$

Entonces decimos que c es un maximo global de f en S y $f(c)$ es el valor máximo.

De la misma forma definimos mínimo global: $f(x)\geq f(c)\qquad \forall\, x\in R$

Optimización

Teorema.- Una condición necesaria para que una función $f(x,\ y)$ diferenciable tenga un máximo o mínimo en un punto interior $(x_0,\ y_0)$ de su dominio S es que $(x_0,\ y_0)$ sea un punto estacionario o singular de f, esto es:

$f_1'(x,\ y)=0$

$f_2'(x,\ y)=0$

Ejemplo 1

Una empresa produce dos tipos distintos A y B de un bien. El coste diario de producir x unidades de A e y unidades de B es

$$c[x\_,\ y\_]=0.04\,x^2+0.01\,x\,y+0.01\,y^2+4\,x+2\,y+500;$$

Supongamos que el producto A lo vende a 15 € y el B a 9 €. Hallar que número de unidades hay que vender de A y B para máximizar el beneficio.

$$b(x\_,\ y\_)=-c(x,\ y)+15\,x+9\,y$$

$$-0.04\,x^2-0.01\,x\,y+11\,x-0.01\,y^2+7\,y-500$$

$$\frac{\partial b(x,\ y)}{\partial x}$$

$$-0.08\,x-0.01\,y+11$$

$$\frac{\partial b(x,\ y)}{\partial y}$$

$$-0.01\,x-0.02\,y+7$$

Igualamos a cero ambas derivadas

$$-0.08\,x-0.01\,y+11==0$$

$$-0.01\,x-0.02\,y+7==0;$$

y resolvemos el sistema

```
Solve[{D[b[x, y], x] == 0, D[b[x, y], y] == 0}, {x, y}]
```

$\{\{x \to 100., \ y \to 300.\}\}$

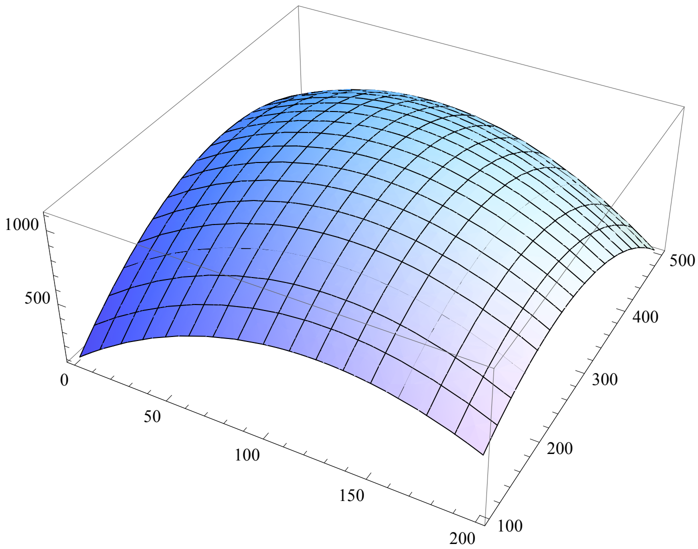
Por tanto en los valores anteriores hay un punto critico cuyo valor es

```
b[100, 300]
```

1100.

El problema es determinar si es un máximo o un mínimo. Una forma facil de verlo es hacer una representación gráfica. Se ve que es una curva que tiene forma de montaña por tanto el único punto crítico será un máximo

```
Plot3D[b[x, y], {x, 0, 200}, {y, 100, 500}]
```



Teorema: Criterio de las derivadas de segundo orden

Sea $z = f(x, y)$ tal que en el punto (x_0,y_0) $f_1'(x, y) = 0$, $f_2'(x, y) = 0$,

y

$\Delta = (\partial^2 z/\partial x^2)(\partial^2 z/\partial y^2) - (\partial^2 z/\partial x\,\partial y)^2$

, o, llamando

A= $\partial^2 z/\partial x^2$; C = $\partial^2 z/\partial y^2$; B = $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$
$\Delta = A\,C - B^2$

Entonces:

Si $\Delta > 0$ y $A < 0$ hay un máximo
Si $\Delta > 0$ y $A > 0$ hay un mínimo

Ejemplo :

En el ejercio anterior obtuvimos que era un máximo a partir de la representación gráfica. A la misma conclusión podemos llegar calculando Δ y A y comprobando quei $\Delta > 0$ y $A < 0$

$$A = \frac{\partial^2 b(x, y)}{\partial x^2}$$

-0.08

$$c = \frac{\partial^2 b(x, y)}{\partial y^2}$$

-0.02

$$B = \frac{\partial^2 b(x, y)}{\partial x \partial y}$$

```
-0.01
```

```
Δ = A c - B^2
```

```
0.0015
```

Como Δ > 0 y A <0 se trata de un máximo

```
Clear[b, A, c, B, Δ]
```

EJERCIOS PARA RESOLVER

Resolver las derivadas parciales primera ($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$) y segunda (esto es $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$) de las siguientes funciones en las que a y b son constantes reales.

Ejemplo resuelto

```
f[x_, y_] = a x + b y
```

$a x + b y$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

a

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

0

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

b

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

0

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

0

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

0

```
f[x_, y_] = a x^2 + b y^2
f[x_, y_] = 3.2 x^1.1 y^0.7
f[x_, y_] = a x^3 + b y^3
f[x_, y_] = a x^3 y + b y^3 x^2
```

Aplicar la regla de la cadena para calcular dz/dt a las funciones siguientes de la forma $z = F(x, y)$, donde $x = f(t)$ e $y = g(t)$:

$z(x, y) = a x^2 + b y^2$, con $x(t) = t^2$; $y(t) = 2 t$

$$z'(t) = \frac{d z}{d t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{d x}{d t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d y}{d t}$$

```
f[x_, y_] = a x^2 + b y^2
```

$a x^2 + b y^2$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$2 a x$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$2 b y$

$x(t) = t^2$; $y(t) = 2 t$

$$\frac{d x}{d t} = 2 t$$

$$\frac{d y}{d t} = 2$$

$$z'(t) = \frac{d z}{d t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d x}{d t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d y}{d t} =$$

$$2 a x \frac{d x}{d t} + 2 b y \frac{d y}{d t} = 2 a x\ 2 t + 2 b y\ 2 = 2 a t^2\, 2 t + 2 b\, 2 t\ 2 = 4 a t^3 + 8 b t$$

$z(x, y) = 3.2 x^{1.1} y^{0.7}$ con $x(t) = 1/t$; $y(t) = t^3$

$z(x, y) = a x^3 + b y^3$ con con $x(t) = t/a^3$; $y(t) = t/b^3$

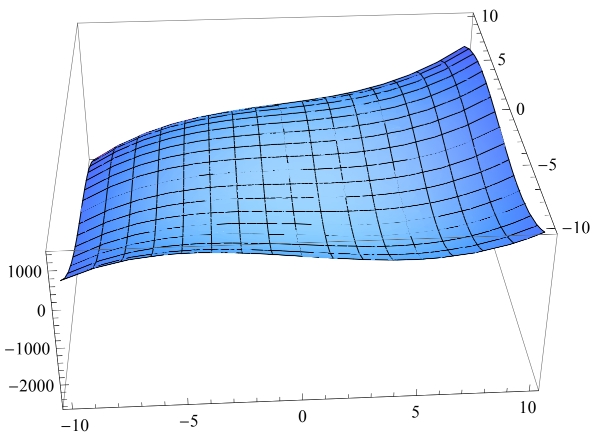
Indique en que puntos las siguientes funciones tienen máximos o mínimos:

$f(x, y) = x^2 + y^2$

```
f[x_, y_] = x^3 - y^3 + 6 x y
```

$x^3 + 6 x y - y^3$

```
Plot3D[f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```



$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$3 x^2 + 6 y$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$6 x$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$6 x - 3 y^2$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$-6 y$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

0

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

6

$\Delta = (\partial^2 z/\partial x^2)\,(\partial^2 z/\partial y^2) - (\partial^2 z/\partial x\,\partial y)^2$

, o, llamando

$A = \partial^2 z/\partial x^2$; $C = \partial^2 z/\partial y^2$; $B = \partial^2 z/\partial x\,\partial y$
$\Delta = A\,C - B^2$

Entonces:

Si $\Delta > 0$ y $A < 0$ hay un máximo
Si $\Delta > 0$ y $A > 0$ hay un mínimo

Optimización con restricciones: El método de los multiplicadores de Lagrange

Calcular los puntos extremos de la función

```
z[x_, y_] = 6 - 4 x - 3 y;
```

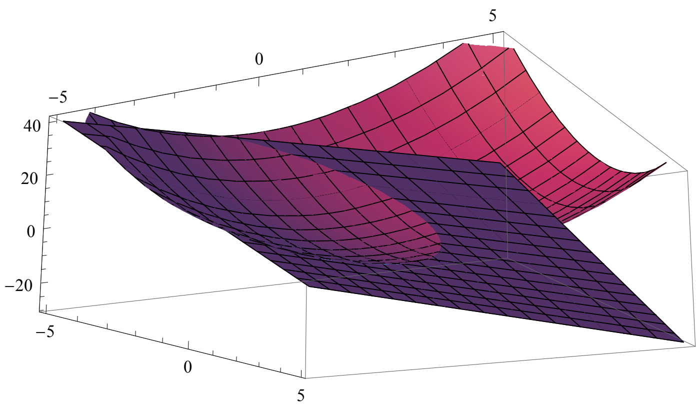
Con la condición

$x^2 + y^2 = 1$

```
φ[x_, y_] = x^2 + y^2 - 1;
```

Observe que visualmente el problema equivale a buscar el máximo dentro de la región limitada por una curva que es cortada por un plano

```
Show[Plot3D[z[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}],
 Plot3D[φ[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}], ViewPoint -> {1.567, -2.893, -0.790}]
```



Sol: El método de los multiplicadores de Lagrange consite en construir una función w[x, y] formada por la suma de funcion z[x, y] mas las restricción φ[x, y] multiplicada por λ. Entonces hay que encontrar los puntos extremos de w[x, y] por el procedimiento ya visto.

```
w[x_, y_] = z[x, y] + λ φ[x, y]
```

$6 - 4 x - 3 y + \left(-1 + x^2 + y^2\right) \lambda$

```
derivadaWdex = D[w[x, y], x]
```

$-4 + 2\,x\,\lambda$

```
derivadaWdey = D[w[x, y], y]
```

$-3 + 2\,y\,\lambda$

Necesitamos una tercera ecuación para poder determinar x, y, λ, utilizamos φ[x, y]

```
Solve[{derivadaWdex == 0, derivadaWdey == 0, φ[x, y] == 0}, {x, y, λ}]
```

$$\left\{\left\{\lambda \to -\frac{5}{2},\ x \to -\frac{4}{5},\ y \to -\frac{3}{5}\right\},\ \left\{\lambda \to \frac{5}{2},\ x \to \frac{4}{5},\ y \to \frac{3}{5}\right\}\right\}$$

Determinamos para ambos puntos si se trata de máximos o mínimos

$$A = \frac{\partial^2 w(x,\ y)}{\partial x^2}$$

$2\,\lambda$

$$c = \frac{\partial^2 w(x,\ y)}{\partial y^2}$$

$2\,\lambda$

$$B = \frac{\partial^2 w(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}$$

0

$$\Delta = A\,c - B^2$$

$4\,\lambda^2$

$$\left\{\left\{\lambda \to -\frac{5}{2},\ x \to -\frac{4}{5},\ y \to -\frac{3}{5}\right\},\ \left\{\lambda \to \frac{5}{2},\ x \to \frac{4}{5},\ y \to \frac{3}{5}\right\}\right\}$$

Para $\lambda = -\frac{5}{2}$ $\Delta > 0$, y $A < 0$, luego hay un máximo

$$A\ /.\ \left\{\lambda \to -\frac{5}{2}\right\}\ (*\text{Maximo}*)$$

-5

El máximo está en

$$z\left[-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right]$$

11

Para $\lambda = \frac{5}{2}$ $\Delta > 0$, y $A > 0$, luego hay un mínimo

$$A\ /.\ \left\{\lambda \to \frac{5}{2}\right\}\ (*\text{Mínimo}*)$$

5