Funciones, límites y continuidad.

Guillermo Sánchez (http://diarium.usal.es/guillermo)

Departamento de Economia e Hª Económica. Universidad de Salamanca.

Actualizado : 2012-11-24

Sobre el estilo utilizado

Mathematica las salidas (*Ouput*) por defecto las muestra utilizando el estilo: `StandardForm`. En su lugar preferiamos utilizar el estilo `TraditionalForm` que da una apariencia a las salidas (*Output*) coincidente con el habitualmente utilizado en la notación clásica utilizada en las matemáticas. Para aplicar este estilo (TraditionalForm) a todas las salidas del cuaderno (o notebook) añadimos la siguiente sentencia (en este caso hemos definido la celda para que se ejecute automaticamente al inicio):

```
SetOptions[EvaluationNotebook[],
 CommonDefaultFormatTypes -> {"Output" -> TraditionalForm}]
```

Funciones

Una funcion de A en B es una regla que asigna a cada elemento del conjunto A un elemento en B y sólo uno del conjunto B

f: A→B Si designamos por f a la función, el conjunto A se llama **dominio** (o conj. origen o campo de veriabilidad) y B se llama el conjunto final. Formalmente:

$$\operatorname{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle/\; \exists \; y \in \mathbb{R},\; f(x) = y\right\} = A \subset \mathbb{R}$$

Se llama **imagen** del elemento x a $f(x)$

$$\operatorname{Im}(f) = f(A) = \left\{y \in \mathbb{R} \;\middle/\; \exists \; x \in \mathbb{R},\; f(x) = y\right\}$$

Obsérvese que un elemento de B puede ser asignado a más de un elemento de A. En el caso particular que corresponda a cada elemento de A corresponda un sólo elemento de B dedimos que la función es inyectiva (ej.: A cada contribuyente debe corresponder un sólo NIF)

Las funciones reales de variable real pueden representarse gráficamente en el plano XY, en X (eje horizontal o de abcisas) se representa x y en Y (eje vertical o de ordenadas) $f(x)$.

Dominio. Calcular el dominio para las funciones que se indican

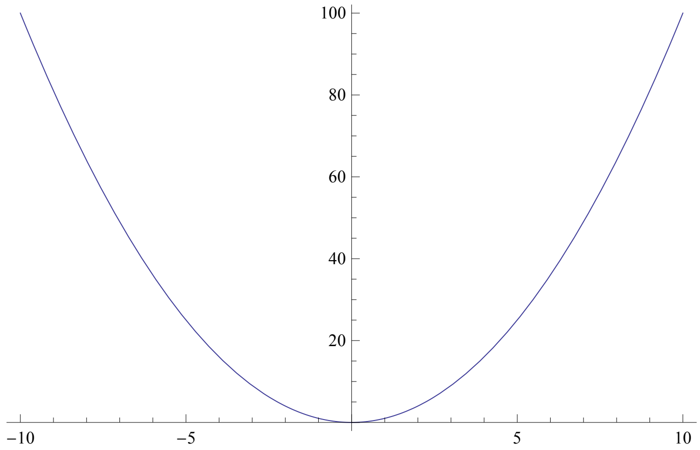
Las funciones polinomicas tiene como dominio $\mathbb{R}$.

Ejemplo $y = x^2$

Su dominio es $\mathbb{R}$ por que se puede calcular el cuadrado de cualquier número real.
Su imagen es $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ / x \geq 0\}$, ya que los cuadrados son siempre positivos.

Su representación gráfica es

```
Plot[x^2, {x, -10, 10}]
```



Las funciones racionales f(x) = P(x)/Q(x) existen en R excepto para Q(x)=0,

Ejemplo : $y = \dfrac{x - 2}{x - 5}$

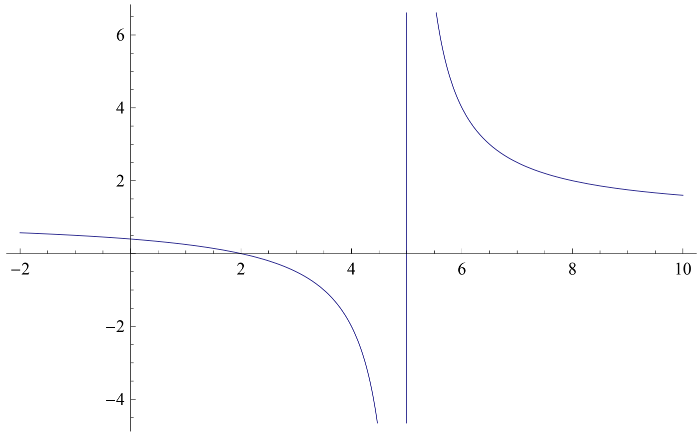
Su dominio es $\mathbb{R}$-{5}, porque su cociente está definido para cualquier valor de $\mathbb{R}$ - 5 (porque para x =5 se hace cero el denominador y por tanto *x* toma un valor infinito)

Para determinar su imagen ponemos *x* en función de *y* (es decir: buscamos los números que tienen antiimagen) .

$$x = \frac{2 - 5\,y}{1 - y}$$

Vemos que existe para y∈$\mathbb{R}$ excepto para y = 1, es decir: Im[f] = $\mathbb{R}$-{1}

$\text{Plot}\left[\dfrac{x-2}{x-5}, \{x, -2, 10\}\right]$



Las funciones logaritmicas f(x)= ln(x) solo existen en R^+ , es decir: x no debe ser 0 ni negativo

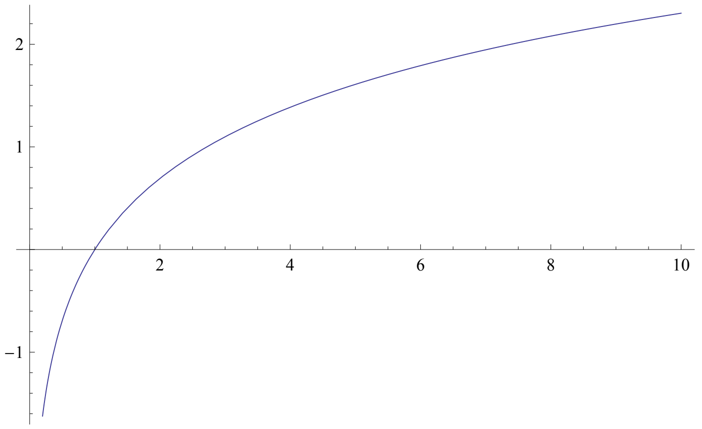
$y = \ln x$

Su dominio es $x \in \mathbb{R}^+ (x > 0)$ y su imagen es $\mathbb{R}$.

> Nota : En Matematica para calcular el logaritmo natural (Ln o ln) se utiliza Log. Para calcular el logaritmo en otra base se utiliza `Log[b, z]` siendo b la base. Por ejemplo: el logaritmo en base 10 de z se escribe:

Log[10, z] .

```
Plot[Log[x], {x, 0.001, 10}]
```

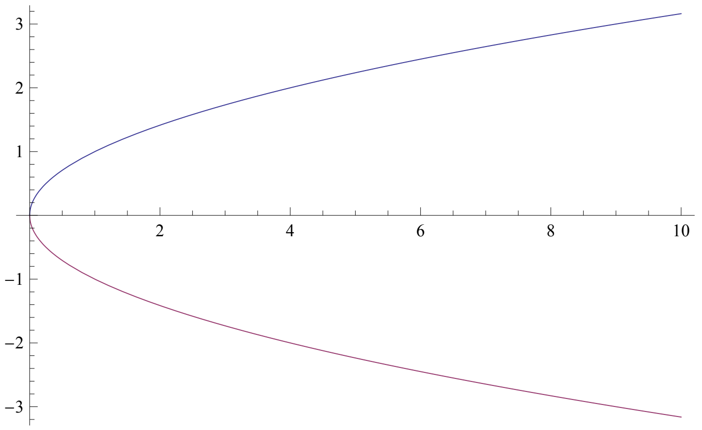


Las funciones irracionales f(x) = $\sqrt[n]{P(x)}$ existen en $\mathbb{R}^+$ si n par y en $\mathbb{R}$ si n impar.

***y* = $\sqrt{x}$ e *y* = – $\sqrt{x}$**

Su imagen es $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, / x \geq 0\}$, e imagen $\mathbb{R}^+$(para $+\sqrt{x}$) o $\mathbb{R}^-$(para $-\sqrt{x}$)

```
Plot[{√x, -√x}, {x, 0, 10}]
```



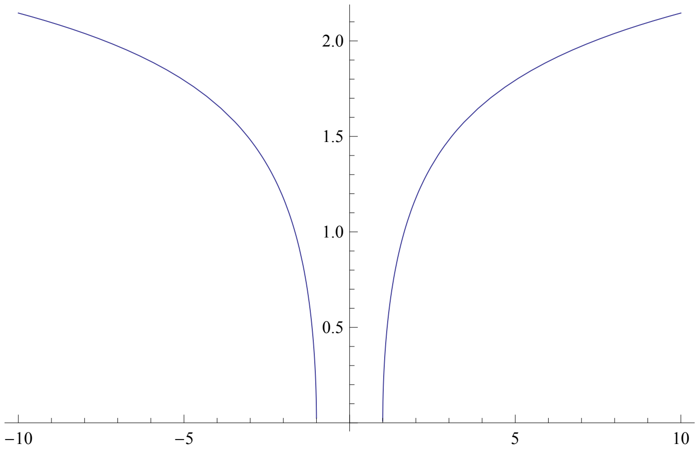
f (x) = $\sqrt{\text{Ln}[x^2]}$;

Por ser una raiz la función no existe para valores negativos de $\text{Ln}[x^2]$, es decir existe para valores de $x > 1$ y $x < -1$, por tanto la función existe para todo x ∈ (-∞, -1] ⋃ [1,∞)

```
Reduce[√(Log[x^2]) == 0, x]
```

$x = -1 \lor x = 1$

```
Plot[√Log[x²], {x, -10, 10}]
```



Ejercicio propuesto. Indicar el dominio de las funciones :

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{8-x}} \; ; \; f(x) = \frac{6x}{(x-5)(x-9)}$$

Límites

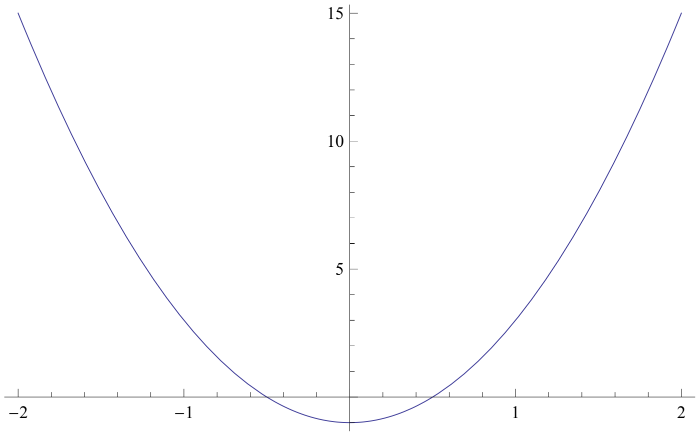
Definición

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se lee límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(4x^2 - 1\right)$$

0

```
Plot[4 x² - 1, {x, -2, 2}]
```



¿Que valor toma la siguiente función en x = 2?

$$\frac{x^2-1}{x-1} == \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

Definición de límite (no rigurosa) es la siguiente:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ quiere decir $f(x)$ se puede hacer tan próximo a L como queramos, para todo x próximo (pero no igual) a x_0.

La próximidad, o mas generalmente la distancia, en $\mathbb{R}$, es el valor absoluto de la diferencia entre ellos.

¿Que números x distan de 5 menos de 0.1?

Resp.: $|x-5|<0.1$, que es equivalente a $-0.1<x-5<0.1$ o $4.9<x<5.1$. Es decir, los números que distan de 5 menos de 0.1 son los comprendidos entre 5.1 y 4.9.

¿Que números x distan de x_0 menos de δ?

Resp.: $|x-x_0|<\delta$, que es equivalente a $-\delta<x-x_0<\delta$ o $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, que tambien se puede escribir: x $\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

Podemos ahora reformular la definición de límite como sigue:

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ quiere decir que podemos hacer $|f(x)-L|$ tan pequeño como queramos $\forall\ x\neq x_0$ con $|x-x_0|$ suficientemente pequeño. (Observese que $x\neq x_0$ es equivalente a $0<|x-x_0|$)

La definición de límite puese aún precisarse más expresándola en términos de ε y δ (que es definición más utilizada).

$f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende a x_0 , y escribimos $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, si $\forall\ \epsilon>0$ $\exists\ \delta>0$ tal que $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ siempre que $0<|x-x_0|<\delta$

Ejemplo: el $\lim_{x\to 3}(3x-2)=7$ utilizando la definición de límite se calcula como sigue.

Sol.:

$f(x)=(3x-2),\ a=2,\ A=7$

$|f(x)-A|=|(3x-2)-7|=|3x-9|=3|x-3|<\epsilon$ que verifica siempre $0<|x-3|<\epsilon/3$.

Por tanto:

$|f(x)-A|<\epsilon$ si $|x-3|<\delta$, que se verifica para cualquier valor $\delta\leqslant\epsilon/3$

Ejemplo: Comprobar que $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ utilizando la definición de límite.

Sol.:

$$|f(x)-A|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\epsilon \text{ cuando } 0<|x-a|<\delta.$$

En este caso hacemos:

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\left|\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leq\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\epsilon$$

$\left\{\text{pues } \sqrt{x}+\sqrt{a}\geq\sqrt{a}\right\}$ y de aquí $0<\left|x-a\right|<\delta=\epsilon\sqrt{a}$

En la práctica raramente se calcula los limites a partir de la definicion

Algunas propiedades de las operaciones con límites

$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$

$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$, donde k $\in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} g(x)$, para $g(x) \neq 0$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

LÍMITES. Cálculo

Sea $f(x)$ definida para todo x en un entorno próximo a x_0 pero no necesariamente x_0 entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Para calcular $\lim_{x \to x_0} f(x)$ en f(x) se reemplaza x por x_0

En *Mathematica* el límite se calcula utilizando `Limit`[exp, x->a].

```
Limit[4 x^2 + 8 x + 3, x -> -1/2]
```

0

Si queremos verlo en notación tradicional: una vez escrita la expresión convertimos la celda a notación tradicional (Cell->Convert To->TraditionalForm) .

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(4 x^2 + 8 x + 3\right)$$

Calcula el siguiente límite?

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x}$$

0

Indeterminaciones

En algunos casos tras la sustitución directa en $\lim_{x \to x_0} f(x)$ de x por x_0 se obtiene una de las siguientes valores: $\{\infty\text{-}\infty, 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0^0, \infty^0, 1^\infty\}$. Esto se conoce como indeterminación pues no se puede asegurar nada sobre el límite de la funcion en ese punto. En ese caso hay que proceder a resolver la indeterminación.

Por ejemplo: $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{4 x^2 - 1}{4 x^2 + 8 x + 3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{4 x^2 - 1}{4 x^2 + 8 x + 3}$$

-1

Para una descripción detallada de como se resuelven los distintos tipos de inderminaciones puede consultar: http://www.u-nizar.es/aragon_tres/unidad7/u7fun/u7funte30.pdf

El límite siguiente es una indeterminación de la forma 0/0.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

En estos casos (numerador y denominador polinomios) se resuelven factorizando y simplificando, como se muestra

$$\lim \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} == \lim \frac{(x - 3) \left(x^2 + 3 x + 9\right)}{(x - 3) (x + 3)} = \frac{9}{2}$$

En ejemplos como el siguiente:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}$$

-32

El denominador incluye una raiz. Se pueden resolver multiplicando el denominador por el conjugado

$$\lim\frac{(x-4)(x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim\frac{(x-4)(x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)}{-(x-4)}=\lim\left(-(x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)\right)=-32$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+5}{2x^4-3}=\frac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por x^4, ya que es la potencia de mayor exponente que aparece en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+5}{2x^4-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{5}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{3}{x^4}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

En los casos siguientes, corresponde al cociente de polinomios que dan indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide el numerador y el denominador por el término de mayor grado de toda la expresión

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_h x^h+a_{h-1}x^{h-1}+\ldots+a_0}{b_k x^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_0}=\left\{\frac{a_h}{b_k}\text{ si } h=k,\ 0\text{ si } h<k,\ \pm\infty\text{ si } h>k\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5}{2x^4-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{5}{x^4}}{2\frac{x^4}{x^4}-\frac{3}{x^4}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-3x^4+5}{2x^4-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-3x^4+5}{2x^6-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5}{2x^4-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-3x^4+5}{2x^4-3}$$

∞

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-3x^4+5}{2x^6-3}$$

0

Las indeterminaciones 0^0, $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$ se pueden transformar en una del tipo $0.(\pm\infty)$ tomando logaritmos neperianos. Además, la indeterminación $1^{\pm\infty}$ se puede resolver aplicando que si $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to x_o}g(x)=\pm\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_o}g(x)(f(x)-1)}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x+3}{9x-1}\right)^{2x^2}$$

0

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8x+3}{9x-1}\right)^{2x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8x+3}{9x-1}\right)^{2x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{-\infty}==\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^{\infty}=\infty$$

A veces, algunas de estas indeterminaciones se resuelven usando los llamados infinitésimos equivalentes que son funciones cuyo límite vale 0 y que se pueden sustituir una por otra si están multiplicando o dividiendo dentro de un límite sin que éste se modifique. Algunos infinitésimos equivalentes cuando $f(x)\to 0$ son:

$\operatorname{sen} f(x)\approx f(x)$	$\operatorname{arcsen} f(x)\approx f(x)$
$\operatorname{tg} f(x)\approx f(x)$	$\operatorname{arctg} f(x)\approx f(x)$
$\ln(1+f(x))\approx f(x)$	$e^{f(x)}-1\approx f(x)$
$1-\cos f(x)\approx\dfrac{(f(x))^2}{2}$	

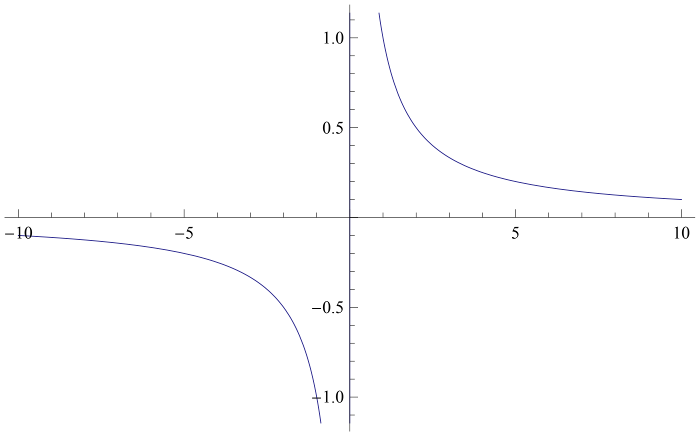
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$$

Por infinitesimos equivalentes $\sin(3x)\approx 3$, por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$

Límites laterales.

Observe la siguiente función ¿Que ocurre cuando x se aproxima a 0? Se dará cuente que eso depende de como se aproxime. Es distinto si lo hace por la derecha o por la izquierda.

```
Plot[1/x, {x, -10, 10}]
```



En el cálculo de $\lim_{x\to x_0} f(x)$ podemos aproximaros a x_0 :

a) por la derecha

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

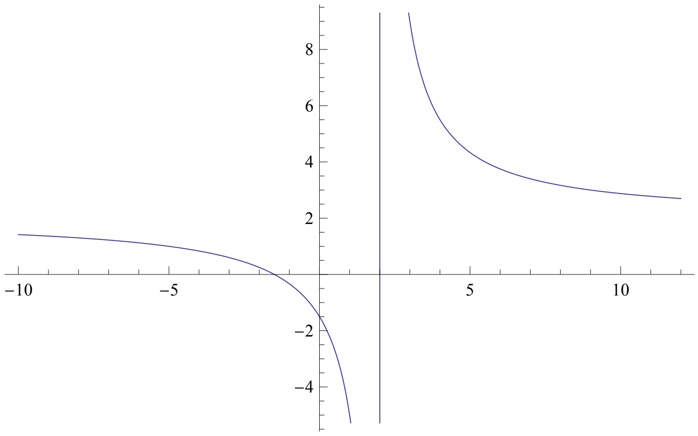
b) por la izquierda

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Ejemplo : Calcule el límite de la función $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ en x →2.

Observe que si se aproxima a 2 por la izquierda (por ej. x= 1.99999) f(x) va tomando cada vez valores mas negativos mientras que si lo hace por la derecha (por ej. x= 2.00001) ocurre lo contrario. Esto sugiere que algunas expresiones el límite depende de en la dirección por al que nos aproximamos a dicho límite.

```
Plot[(2 x + 3)/(x - 2), {x, -10, 12}]
```



En *Mathematica* el límite lateral se cálcula utilizando `Limit`[*exp, x→a, Direction→1*] para el límite por la izquierda y `Limit`[*exp, x→a, Direction→-1*] por la derecha

```
Limit[(2 x + 3)/(x - 2), x → 2, Direction → 1]
```

$-\infty$

Si queremos verlo en notación tradicional: una vez escrita la expresión convertimos la celda a notación tradicional (Cell->Convert To->TraditionalForm) y queda como sigue:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x+3}{x-2}$$

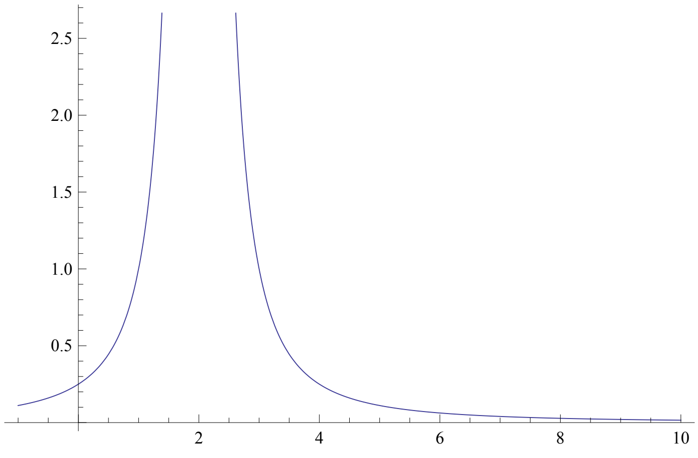
El limite por la derecha se calcula como sigue:

```
Limit[(2 x + 3)/(x - 2), x → 2, Direction → -1]
```

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x+3}{x-2}$$

∞

```
Plot[1/(x - 2)^2, {x, -1, 10}]
```



¿Es $\frac{1}{(x-2)^2}$ continua en el intervalo $(-\infty,\ \infty)$? El punto de duda es $x = 2$. Comprobamos si ambos limites coinciden

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2}$$

∞

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2}$$

∞

Ejercicios : Calcular los siguientes límites

$$\texttt{Limit}\left[4\,x^2-1,\ x\to -\frac{1}{2}\right]$$

0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$$

1

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}$$

-32

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{x}$$

2

$$\lim_{x\to 16} \frac{x^{3/4}-8}{x-16}$$

$\frac{3}{8}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{10^x-1}{x}$$

log(10)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2\,x)}{x}$$

0

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{\sin(x)}$$

0

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6\,x+9}}{x-3}$$

-1

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-6\,x+9}}{x-3}$$

1

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{x-5}{|x-5|}$$

-1

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{x-5}{|x-5|}$$

1

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

-1

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{z}{x} + 1\right)^x$$

e^z

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^3}{(n-1)^2}\right)$$

0

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2\, n + n)^3 - n^3}{n^2 - 2\sqrt{n^5}}$$

$-\infty$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$$

0

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2\, n + z}{2\, n - z}\right)^n$$

e^z

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log(x) \log(\log(x))}$$

∞

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{\log(x) - 1}\, \sqrt{\log(x) + 1}}$$

1

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

Continuidad

Definición

Una función f es continua en el punto $x_0 = x$ si el valor de la función en el punto x_0 coincide con el valor del límite de la función en ese punto;

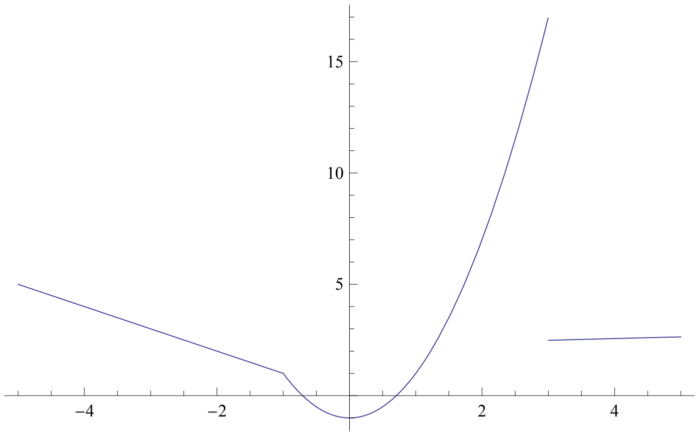
$$\lim_{x \to x_0} f\,(x) = f\,(x_0) = A$$

Debe verificarse que existe $f(x_0)$ y los límites laterales existen y cumplen, es decir:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Una manera bastante intuitiva para comprobar la continuidad de una función es representarla graficamente, si podemos dibujarla con un lapiz de un solo trazo la función será continua al menos en ese trazo

```
f[x_] := { -x          x ≤ -1
           2 x^2 - 1   -1 < x < 3
           Log[x + 9]   x ≥ 3
Plot[f[t], {t, -5, 5}, PlotRange → All]
```



Definición de continuidad en términos de ε y δ :

> $f(x)$ es continua en $x = a$ si $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$

Comparese esta definición con la de límite:

La diferencia está en que para que una función sea continua no es necesario exigir $0 < |x - x_0|$, pues si $|x - x_0| = 0$, entonces $x = x_0$ y $|f(x) - f(x_0)| = 0$

Teniendo en cuenta la relación entre límite y continuidad para que una función sea continua se debe verificar:

a) $\exists\ f(x_0)$

b) $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

c) Se verifica que $f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Si no se cumple alguna de las condiciones anteriores la función es discontinua en x_0.

Se distinguen los siguientes tipos de discontinuidades:

a) Una función f tiene un discontinuidad evitable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si existe el $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ pero $f(x_0) \neq A$ o no existe $f(x_0)$.

b) Una función f tiene un discontinuidad de 1ª especie en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ pero $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

c) Una tiene un discontinuidad de 2ª especie en $x_0 \in \mathbb{R}$ si no existe algún límite lateral

Propiedades

Si f y g son continuas en x_0, entonces se verifica que:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es continua en x_0.
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ es continua en x_0.

- $(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en x_0
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x) / g(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$
- $(f(x))^{p/g}$ es continua en x_0 si $(f(x_0))^{p/g}$está definida

Continuidad de funciones elementales

- La funciones polinomica es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.
- La función racional f(x) = P(x)/Q(x) con P(x) y Q(x) polinomios es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto para Q(x)=0,
- Las funciones logaritmicas f(x)= ln(x) es continua en $\mathbb{R}^+$, es decir: x no debe ser 0 ni negativo
- Las funciones irracionales f(x) = $\sqrt[n]{P(x)}$ es continua en todo $\mathbb{R}^+$ si n par y en $\mathbb{R}$ si n impar.

Ejemplos

1.- Estudiar la continuidad de f(x) definida por:
$f(x) = -x$ para $x \leq -1$
$f(x) = 2x^2 - 1$ para $-1 < x < 3$
$f(x) = \ln(x+9)$ para $x \geq 3$

Este función es la que se ha utilizado al inicio de la sección para ilustrar graficamente el concepto de continuidad.

$f(x) = -x$ es continua $\forall$ x
$f(x) = 2x^2 - 1$ es continua $\forall$ x
$f(x) = \ln(x+9)$ es continua $\forall$ x≥3

Estudiamos los puntos en los que la función cambia de expresión formal, es decir en los puntos $x_0 = -1$ y $x_0 = 3$, para ello calculamos los límites por la dcha. y por la izda.

Para $x_0 = -1$, vemos que ambos límites laterales son iguales, por tanto es continua.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-x) = -(-1) = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(2x^2 - 1\right) = 2 - 1 = 1$$

Para $x_0 = 3$ vemos que ambos límites laterales son diferentes. Tiene una discontinuidad de primera especie .

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \left(2x^2 - 1\right) = 18 - 1 = 17$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \ln(x+9) = \ln(12)$$

Resumen la función es continua en $R - \{3\}$.

2.- Demostrar que la función $f(x) = |x|$ es continua en R.

Nota: Para probar que una función es continua se puede utilizar tambien el siguiente criterio:

En $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ se hace la sustitución: $x = x_0 + \Delta x_0$

$$\lim_{\Delta x_0\to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x_0\to 0} [f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)] = 0$$

En este este ejemplo se tiene en cuenta que $|x + \Delta x| - |x| \leq |\Delta x|$

3.-Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

a) $\exists\ f(x_0)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2}$$

∞

b) $\exists\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1-x)^2}$$

∞

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(1-x)^2}$$

∞

c) Se verifica que $f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Teoremas relacionados con continuidad.

Teorema del valor intermedio

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] tal que $f(a) \neq f(b)$. Entonces f(x) toma valores intermedios entre f(a) y f(b) cuando x recorre [a, b]

Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en [a, b] tal que f(a) y f(b) tienen signos distintos, entonces existe al menos un c∈(a, b) tal que f(c) = 0

Teorema de los valores extremos

Una de las aplicaciones mas importantes del análisis, en particular en el análisis económico, es el cálculo de máximos y mínimos conocidos como puntos óptimos. Así si D es el dominio de f(x) entonces

$c \in D$ es un máximo de f $\Longleftrightarrow f(x) \leq f(c) \ \ \forall x \in D$

$d \in D$ es un mínimo de f $\Longleftrightarrow f(x) \geq f(d) \ \ \forall x \in D$

Teorema: Si f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] cerrado y acotado, tiene en él un máximo y un mínimo.

Obsérvese que se trata de una condición suficiente pero no necesaria

Teorema: Supongamos que f está definida en el intervalo I y sea c un punto interior de I (esto es distinto del punto inicial y final. Si c es un máximo o un mínimo de f, y si existe f'(x) entonces:

$f'(c) = 0$

Teorema del valor medio

Si f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] cerrado y acotado, y derivable en el intervalo abierto (a, b) existe al menos un punto interior $\xi \in (a, b)$ tal que f'(a) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Ejemplo

Comprobar el teorema del valor medio para f(x) = x^3 - x en [0, 2]

```
f[x_] = x^3 - x;
```

$$\frac{\texttt{f[2] - f[0]}}{\texttt{2 + 0}}$$

4

```
f'[x]
```

$3x^2 - 1$

```
Reduce[-1 + 3 x^2 == 0, x]
```

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \bigvee x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, 2)$ queda demostrado el teorema del valor medio

Definiciones: creciente, decreciente.

Si f(x_1) ≤ f(x_2) ∀ x_1, x_2∈ I, entonces f es creciente

Si f(x_1) < f(x_2) ∀ x_1, x_2∈ I, entonces f es estrictamente creciente

Si f(x_1) ≥ f(x_2) ∀ x_1, x_2∈ I, entonces f es decreciente

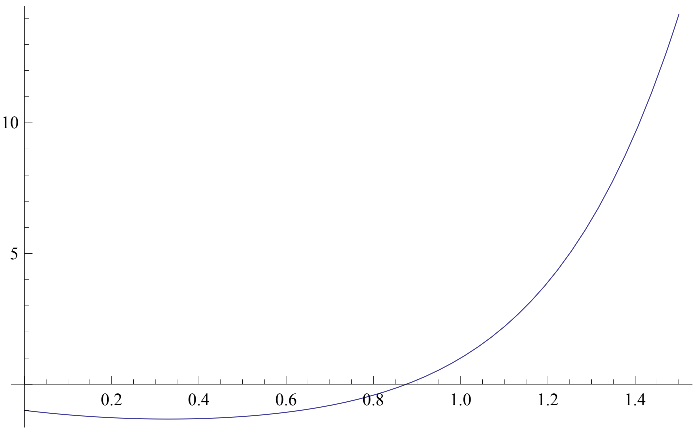
Si f(x_1) > f(x_2) ∀ x_1, x_2∈ I, entonces f es estrictamente decreciente

Ejemplos

Demostrar que tiene $x^6 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ al menos una solución entre 0 y 1

Sol: f es continua para todo x pues es un polinomio, en particular lo es en el intervalo [0, 1], además f(0) = -1 y f(1) = 1. Por el teorema anterior deducimos que existe al menos un c∈(0, 1) tal que f(c) = 0, por tanto hay al menos una solución en le intervalo (0, 1)

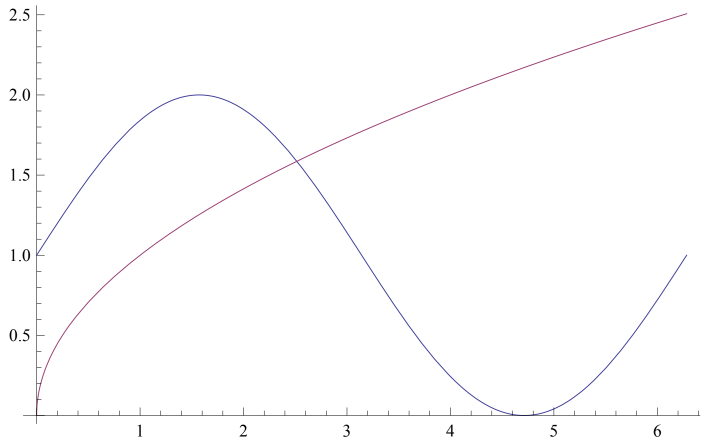
```
Plot[x^6 + 3 x^2 - 2 x - 1, {x, 0, 1.5`}]
```



Demostrar que 1+sen x = $\sqrt{x}$ tiene al menos una solución y hallarla con aproximación a las decimas.

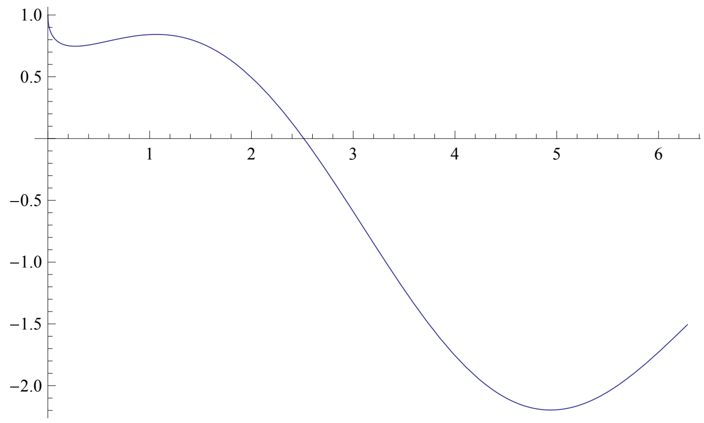
Podemos ver graficamente que tiene una solución (corresponde al punto de corte de ambas funciones).

Plot$\left[\left\{1 + \text{Sin}[x], \sqrt{x}\right\}, \{x, 0, 2\,\text{Pi}\}\right]$



Una forma equivalente de verlo es expresara la ecuación anterior en la forma $1 + \text{Sin}[x] - \sqrt{x} = 0$. Si representamos $1 + \text{Sin}[x] - \sqrt{x}$, la solución es el punto de corte con OX, es decir el valor de x para cual $y = f(x) = 0$.

Plot$\left[\left\{1 + \text{Sin}[x] - \sqrt{x}\right\}, \{x, 0, 2\,\text{Pi}\}\right]$



Graficamente vemos que es un valor comprendido entre x = 2.4. y x = 2.6. Calculamos los valores de f(2.4) y f(2.6).

1 + Sin[2.4] - $\sqrt{2.4}$

0.12627

1 + Sin[2.6] - $\sqrt{2.6}$

−0.0969502

Obtenemos que uno es positivo (f(2.4)) y otro negativo ((2.6)). Segun el teorema de Bolzano habra un valor intermedio x=c para el que f(c)=0 (aunque tambien es evidente graficamente), que será la solucion. Podemos proseguir hasta encontrar una difencia entre suficientemente pequeña.

1 + Sin[2.5] - $\sqrt{2.5}$

0.0725171

1 + Sin[2.55] - $\sqrt{2.55}$

−0.0391882

La solucion es un valor comprendido entre 2.5 y 2.55. Podemos calcularlo directamente con `FindRoot` que se aplica cuando se desea resolver la ecuación utilizando métodos de aproximación numérica

FindRoot$\left[1 + \text{Sin}[x] - \sqrt{x} == 0, \{x, 2.5\}\right]$

$\{x \to 2.51546\}$

Ejercicios avanzados

Sea f definida por: $f(x) = \text{Sen}(x)$ para $x \leq c$ y $f(x) = a\,x + b$ para $x > c$ siendo a, b, c constantes. Si b y c están dados, hallar todos los valores de a (si existe alguno) para los que f es continua en el punto c.

Ejemplo: para c=1, a=2 y b=1

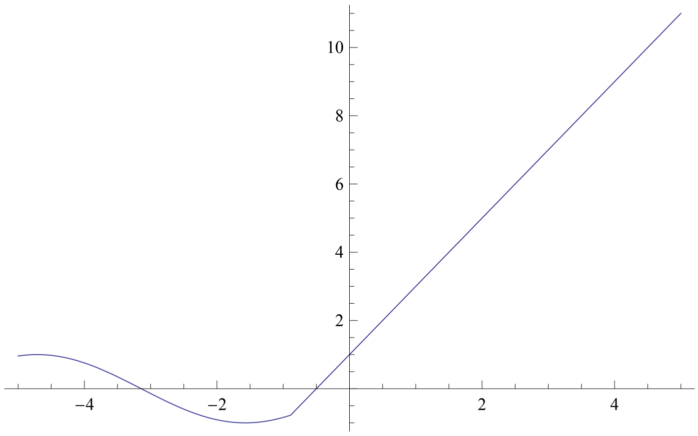
```
f[x_, c_] := Sin[x] /; x ≤ c
```

```
f[x_, c_] := a x + b /; x > c
```

```
FindRoot[Sin[x] == 2 x + 1, { x, 0}]
```

$\{x \to -0.887862\}$

```
Plot[f[x, -0.8878622115744124] /. {a → 2, b → 1}, {x, -5, 5}]
```



Ejercicios de limítes de sucesiones

(Con *Mathematica* se obtiene directamente la solución sin embargo añadiremos como tendriamos que calcularlo si tenemos que hacerlo a mano.)

Calcular que la sucesión de números reales de la función que sigue el siguiente tiendo a 0 cuando n tiende a infiníto.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2+1}$$

0

como n Sin[n!]≤n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

0

Dada la siguiente sucesión de números reales, pruébese que es monótona creciente y que su límite es 1/e

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3\,n-1}{3\,n+2}\right)^{n+3}$$

$$\frac{1}{e}$$

$$\text{Limit}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2},\ n \to \infty\right]$$

```
(Sum[(i - 1), {i, 1, n}]) // Simplify
```

$$\frac{1}{2}(n-1)\,n$$

```
Limit[1/n^2 (Sum[(i - 1), {i, 1, n}]), n → ∞]
```

$$\frac{1}{2}$$

```
Limit[(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)/n^3, n → ∞]
```

```
(Sum[i^2, {i, 1, n}])
```

$$\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2\,n+1)$$

```
1/6 n (1 + n) (1 + 2 n) // ExpandAll
```

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

```
i!^(1/i)/i /. i → 1000 // N
```

0.369492

```
Table[i!^(1/i), {i, 1000, 100}] // N
```

{}

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n^3}$$

$$\frac{1}{3}$$

```
Limit[(1 + 3 + 5 + ... + (2 n - 1))/(n + 1) - (2 n + 1)/2, n → ∞]
```

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(2\,i-1)}{n+1}-\frac{1}{2}(2\,n+1)\right)$$

$$-\frac{3}{2}$$

Pruébese que el límite de una sucesión acotada por una sucesión que tiende a 0 es igual a 0.

Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{1/n}-1\right)$$

0

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3-1\right)^{\frac{1}{3\,n}}$$

1

$\text{Limit}\left[\frac{\sqrt[n]{n!}}{n},\ n \to \infty\right]$

El límite anterior tiende a cero (puede resolverse aplicando ordenes de infinitud)

$\textbf{Table}\left[\left\{n,\ \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right\},\ \{n,\ 1,\ 100,\ 10\}\right]\ //\ N$

1.	1.
11.	0.446294
21.	0.413307
31.	0.400563
41.	0.393667
51.	0.389301
61.	0.386271
71.	0.384035
81.	0.382313
91.	0.380943

Criterio de Stölz-Cesaro: Dada una sucesión $\{y_n\}$ creciente y divergente o decreciente y nula, si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \text{L}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \text{L}$

Aplicando el criterio de Stolz, calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{e^n + 1}{n}\right)$$

∞

$\text{Limit}\left[\frac{1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \ldots + n^{1/n}}{n},\ n \to \infty\right]$ o $\text{Limit}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i^{1/i}\right),\ n \to \infty\right]$

$\text{Limit}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2\,n}}}{\sqrt{n}},\ n \to \infty\right]$ o $\text{Limit}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+i}}\right),\ n \to \infty\right]$

$\text{Limit}\left[\frac{1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \ldots + n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}},\ n \to \infty\right]$ o $\text{Limit}\left[\frac{1}{n^{\alpha+1}}\left(\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha}\right),\ n \to \infty\right]$

Aplicando el critero del cociente calcular el límite de la sucesión:

$\text{Limit}\left[\sqrt[n]{(n+1)\,(n+2)\ \ldots\ (2\,n)},\ n \to \infty\right]$ o $\text{Limit}\left[\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} (n+i)\right)^{1/n},\ n \to \infty\right]$

Tambien se puede aplicar el criterio de la media geométrica

$\textbf{Table}\left[\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} (n+i)\right)^{1/n},\ \{n,\ 1,\ 10\,000,\ 1000\}\right]\ //\ N$

{2., 1.47203, 1.47177, 1.47169, 1.47165, 1.47162, 1.4716, 1.47159, 1.47158, 1.47157}

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$