

Derivación y diferenciación. Máximos y mínimos

Guillermo Sánchez (<http://diarium.usal.es/guillermo>)

Departamento de Economía e Hª Económica. Universidad de Salamanca.

Actualizado : 2012-11-26

Sobre el estilo utilizado

Mathematica las salidas (*Output*) por defecto las muestra utilizando el estilo: `StandardForm`. En su lugar preferíamos utilizar el estilo `TraditionalForm` que da una apariencia a las salidas (*Output*) coincidente con el habitualmente utilizado en la notación clásica utilizada en las matemáticas. Esto puede hacerse para cada celda añadiendo `// TraditionalForm` al final de cada *input*. Sin embargo puede hacerse que este estilo (`TraditionalForm`) se aplique a todas las salidas del cuaderno (o notebook) a través de *Option Inspector* o añadiendo la siguiente sentencia (en este caso hemos definido la celda para que se ejecute automáticamente al inicio):

```
SetOptions[EvaluationNotebook[],  
CommonDefaultFormatTypes -> {"Output" -> TraditionalForm}]
```

Recuerde que las entradas debe escribirlas en `StandardForm`. Una vez que compruebe que funciona puede convertir la celda al estilo tradicional marcando la celda y en la barra de menú elija `Cell` $\Rightarrow$ `Convert to` $\Rightarrow$ `TradicionalForm`.

En este cuaderno muchas entradas se muestran en el estilo tradicional. Para ver como originalmente han sido introducidas es muy recomendable que las vea en el estilo estándar, esto puede hacerlo marcando la celda y en la barra de menú elija `Cell` $\Rightarrow$ `Convert to` $\Rightarrow$ `StandardForm`.

- A lo largo de este cuaderno introduciremos de vez en cuando la instrucción

```
Clear["Global`*"]
```

- Esto se hace para borrar definiciones previas. Por ejemplo:

```
y = 3
```

3

- Si utiliza de nuevo `y`, entonces `y` se sustituirá por `y = 3`

```
y2
```

9

- A veces quiere emplear el símbolo `y` de nuevo en ese caso utilice:

```
Clear["Global`*"]
```

```
y2
```

y^2

Concepto de derivada

Antes de empezar recuerde que si define una función $f(x)$, si asigna a x un valor a lo que se hará es sustituir x por ese valor a . Por ejemplo: Sea $f(x) = x^2$ entonces para $x = 3$ se denota: $f(3) = 3^2 = 9$. Este mismo criterio se aplica cuando en $f(x)$ en vez de un valor a asignamos a x una expresión *expr*. Por ejemplo: si en caso anterior en vez de a tenemos $\cos x$, entonces $f(\cos x) = (\cos x)^2$

- Mostramos como se construye con *Mathematica* el ejemplo anterior. Observe que el argumento de la función se escribe entre corchetes, en lugar de parentesis. El método es aplicable a cualquier función

```
f[x_] := x2
```

f[3]

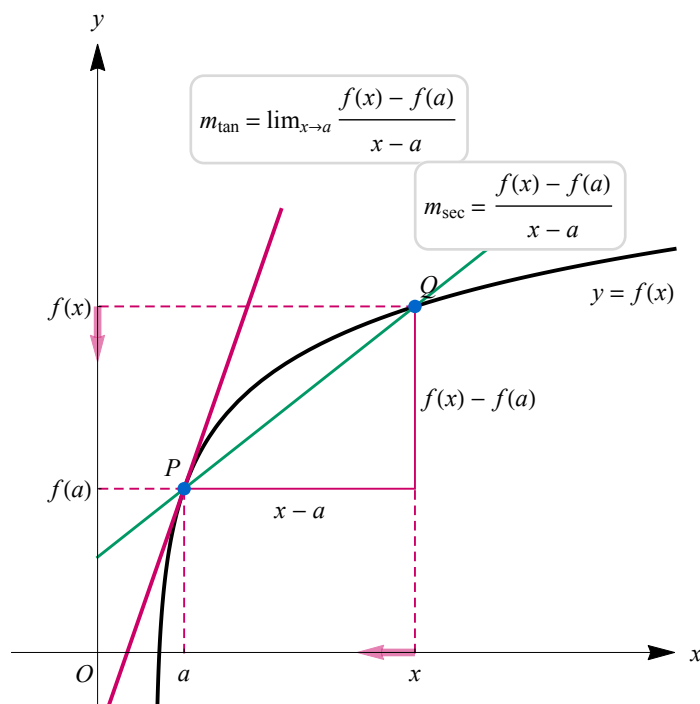
9

f[Cos[x]] $\cos^2(x)$ **f[x + Δx]** $(\Delta x + x)^2$

Sea $f(x)$, se define derivada (denotado $f'(y)$ o $\frac{df}{dx}$ o Df) a

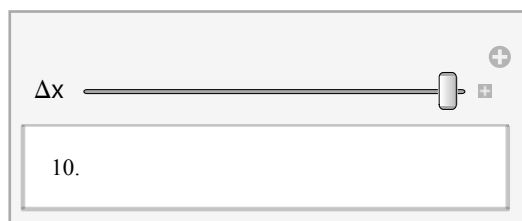
$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observe en el gráfico que la definición anterior equivale a construir un triángulo cuya base $x-a$ la va haciendo cada vez mas pequeña.



Suponga que en el gráfico $f(x) = x^2$ y quiere calcular la derivada en $a = 5$ aplicando la definición. Partiramos de $\frac{(5+\Delta x)^2 - 5^2}{\Delta x}$ y vamos disminuyendo Δx y vemos que cuando $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $f'(5) = 10$

$$\text{Manipulate}\left[\frac{(5 + \Delta x)^2 - 5^2}{\Delta x}, \{\Delta x, 0.01, 0.00001\}\right]$$



Podemos deducir una fórmula general que nos permita calcular la derivada de x^2 para cualquier valor de x

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x - \Delta x^2) - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x - \Delta x) = 2x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$$

Recuerde: Para ver como originalmente ha sido introducidas la expresión anterior marca celda y en la barra de menu elija Cell $\Rightarrow$ Convertto $\Rightarrow$ StandardForm. Entonces observe que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ se escribe Limit[... $\Delta x \rightarrow 0$]. Una vez escrito puede convertirlo a la notación tradicional marcando la celda y en la barra de menu elija Cell $\Rightarrow$ Convert to $\Rightarrow$ TradicionalForm.

La aplicamos a $x = 5$, entonces $2x = 10$, que es el resultado que antes habíamos obtenido.

A partir de la definición de derivada calcular la derivada de x^n , Sen x (en inglés Sin x) y e^{-x}

$$\text{Limit}\left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}, \Delta x \rightarrow 0\right]$$

$$n x^{n-1}$$

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Sin}[\Delta x + x] - \text{Sin}[x]}{\Delta x}, \Delta x \rightarrow 0\right]$$

$$\cos(x)$$

$$\text{Limit}\left[\frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x}, \Delta x \rightarrow 0\right]$$

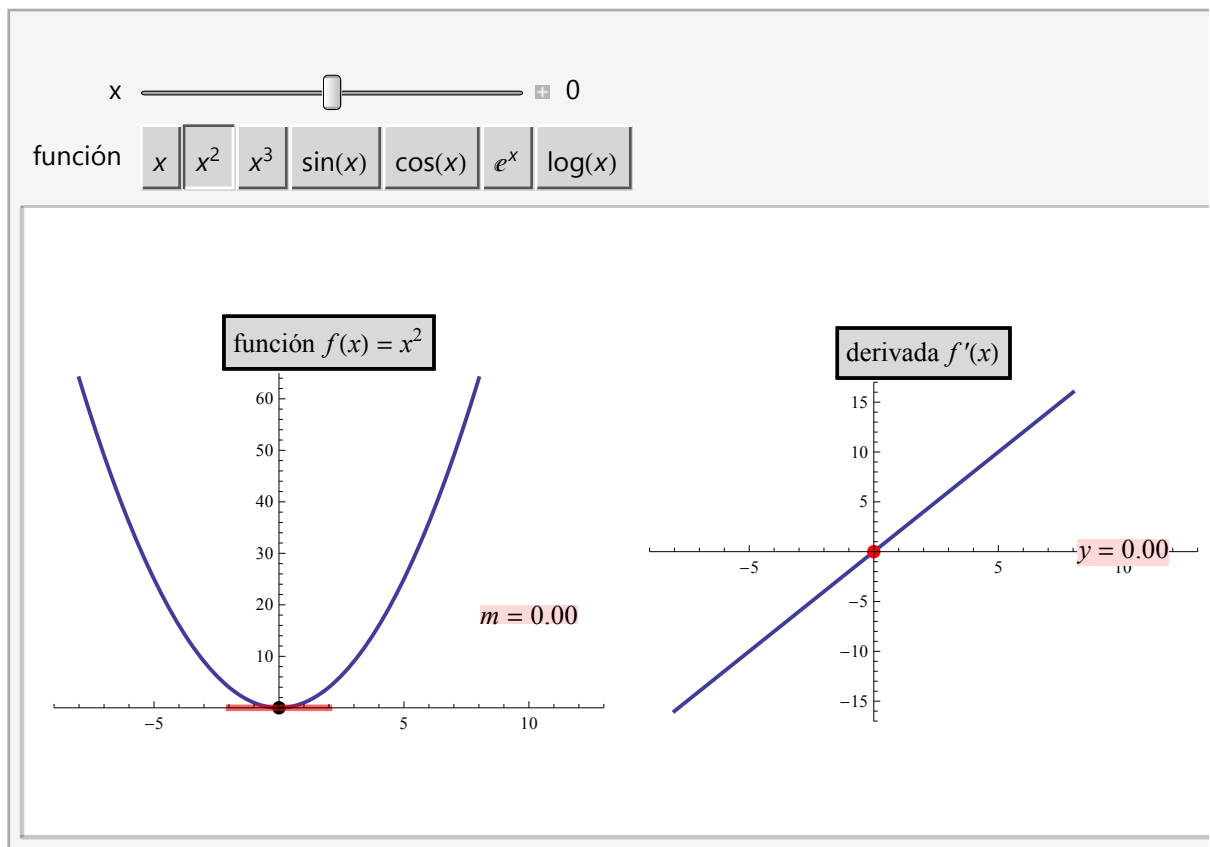
$$e^x$$

Concepto geométrico de derivada

La derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 podemos interpretarla como la recta tangente en ese punto. Compruebelo en el grafico anterior: Observe que en el punto P la derivada corresponde a la tangente a la función en ese punto.

En efecto como $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esto es: $f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$.

que la ecuación de una recta $Y = A + mX$ donde $A = f(x_0)$, $m = f'(x)$ y $X = (x - x_0)$



Adaptado de <http://demonstrations.wolfram.com/DerivativeAsAFunction/> por: Jim Brandt

Un enlace interesante: <http://demonstrations.wolfram.com/FiniteDifferenceApproximationsOfTheFirstDerivativeOfAFunction/>

Teoremas relacionados con la derivación

Si f es una función continua en el intervalo I y derivable en el interior de I (esto es en puntos distintos del inicial y final) entonces:

Si $f'(x) > 0 \quad \forall x$ del interior de I entonces f es estrictamente creciente en I

Si $f'(x) < 0 \quad \forall x$ del interior de I entonces f es estrictamente decreciente en I

Si f es continua en a y los límites laterales coinciden, esto es: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, entonces f es derivable en a y su valor es b , es decir $f'(a) = b$.

Reglas de la derivación de funciones

Para las reglas de la derivación y las derivadas mas comunes puede consultar cualquier libro de matematicas de bachiller o http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad7/u7der/u7der30.pdf.

Derivadas simples más comunes

$f(x) = c$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a$	$\Rightarrow$	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = a^x$ con $a > 0$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$ con $a > 0$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arccos} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Observe que las derivadas anteriores se obtienen de la definicion de derivada, como se ha mostrado en la sección anterior.

- Con Mathematica se calculan directamente:

`y[x_] := k f[x]`

`y'[x]`

$k f'(x)$

`y[x_] := x^a`

`y'[x]`

$a x^{a-1}$

`y[x_] := Sin[x]`

`y'[x]`

$\cos(x)$

`y[x_] := e^x`

`y'[x]`

e^x

Suma y resta

`Clear["Global`*"]`

Dada una función $y(x)$

$$y(x) := f(x) + g(x)$$

Su derivada es

$$y'(x)$$

$$f'(x) + g'(x)$$

Para

$$y(x) := f(x) - g(x)$$

Su derivada es

$$y'(x)$$

$$f'(x) - g'(x)$$

Producto

Dada una función $y(x)$

$$y[x] := f[x] g[x]$$

Su derivada es

$$y'[x]$$

$$g(x) f'(x) + f(x) g'(x)$$

Ejemplo: Calcular $y'(x)$ de la función $y(x) = (x^3 - x)(5x^4 + x^2)$

$$y[x] := (x^3 - x) (5 x^4 + x^2)$$

$$y'(x) // \text{Simplify}$$

$$x^2 (35 x^4 - 20 x^2 - 3)$$

O paso a paso: $y(x) := f(x)g(x)$

$$f(x) := x^3 - x$$

$$g(x) := 5 x^4 + x^2$$

$$f'(x)$$

$$3 x^2 - 1$$

$$g'(x)$$

$$20 x^3 + 2 x$$

$$y'(x)$$

$$(x^3 - x)(20 x^3 + 2 x) + (3 x^2 - 1)(5 x^4 + x^2)$$

También puede hacerse desarrollando primero $y(x)$

$$y[x] := 5 x^7 - 4 x^5 - x^3$$

y derivando

$$y'(x)$$

$$35 x^6 - 20 x^4 - 3 x^2$$

División

$$\text{Clear}["Global`*"]$$

Dada una función:

$$y(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

Su derivada es

$$y'(x) = \frac{f'(x) g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejemplo

$$y[x_] := \frac{x^3 - x}{5x^4 + x^2}$$

Se puede derivar directamente

$$y'[x] // \text{Simplify}$$

$$\frac{-5x^4 + 16x^2 + 1}{(5x^3 + x)^2}$$

O, con un fin didactico, paso a paso:

$$f(x) := x^3 - x$$

$$g(x) := 5x^4 + x^2$$

$$f'(x)$$

$$3x^2 - 1$$

$$g'(x)$$

$$20x^3 + 2x$$

$$\frac{f'[x] g[x] - f[x] g'[x]}{g[x]^2} // \text{Simplify}$$

$$\frac{-5x^4 + 16x^2 + 1}{(5x^3 + x)^2}$$

O directamente

$$y'(x) // \text{Simplify}$$

$$\frac{-5x^4 + 16x^2 + 1}{(5x^3 + x)^2}$$

Funcion de función

```
Clear["Global`*"]
```

$$y(x) := g(x)^a$$

$$y'(x) = a g(x)^{a-1} g'(x)$$

$$y(x) := \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$y(x) := \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$y'(x)$$

$$\frac{2x}{3(x^2 + 1)^{2/3}}$$

Derivadas logaritmicas

$$y = A \frac{x^p (a x + b)^q}{(c x + d)^r}$$

Tomando logaritmos se obtiene

$$\ln y = A + p \ln(x) + q \ln(b + a x) - r \ln(d + c x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} + \frac{a q}{b + a x} - \frac{c r}{d + c x}$$

$$y' = A \frac{x^p (a x + b)^q}{(c x + d)^r} \left(\frac{p}{x} + \frac{a q}{b + a x} - \frac{c r}{d + c x} \right)$$

Derivación logarítmica, ampliación

Hallar la derivada de

$$y = A x^p \frac{(a x + b)^q}{(c x + d)^r}$$

En casos donde aparecen potencias, raíces cocientes y combinaciones de ellas suele ser útil utilizar la derivación logarítmica. En esta caso

$$\ln y = \ln A + p \ln x + q \ln (a x + b) - r \ln (c x + d)$$

Lo derivamos respecto a x

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} + a \frac{q}{a x + b} - c \frac{r}{c x + d}$$

Despejamos y, sustituyendola por su valor

$$y' = A x^p \frac{(a x + b)^q}{(c x + d)^r} \left(\frac{p}{x} + a \frac{q}{a x + b} - c \frac{r}{c x + d} \right)$$

Funciones compuestas: $y(x) = f(u(x))$

```
Clear["Global`*"]
```

```
y(x_):= f(u(x))
```

```
y'(x) = f'(u(x)) u'(x)
```

Ejemplo

```
u(x_):= 1 - x^3
```

```
y(u_):= u^5
```

```
y'(u) = 5 u^4
```

```
u'(x) = -3 x^2
```

```
y'(u(x)) u'(x)
```

```
-15 x^2 (1 - x^3)^4
```

Ejercicios propuestos

Calcula las derivada primera de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + \sin 2x$; b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$; c) $f(x) = x^3 e^{2x}$; d) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2 - x}$; e) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$; f) $f(x) = e^{\sin 3x}$;

g) $f(x) = \sqrt{x} e^{\sin(3x)}$

```
f(x_):= x^2 + sin(2 x)
```

```
f' [x]
```

```
2 x + 2 cos(2 x)
```

```
f(x_):= x^3 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^2}
```

que también podemos escribir :

$$f(x) := x^3 + x^{2/3} - x^{-2}$$

aplicar la derivada de x^a que es: $a x^{a-1}$, recordar que $\sqrt[a]{x^b} = x^{b/a}$

f' [x]

$$\frac{2}{x^3} + 3 x^2 + \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) := x^2 e^{2x}$$

es un producto por tanto :

$$f(x) = g(x) h'(x) + h(x) g'(x)$$

f' [x]

$$2 e^{2x} x^2 + 2 e^{2x} x$$

$$f(x) := \frac{x^3 - x + 1}{2 - x}$$

$$f'(x) = \frac{h'(x) g(x) - h(x) g'(x)}{g(x)^2}, \text{ con } h(x) = x^3 - x + 1 \text{ y } g(x) = 2 - x$$

f' [x]

$$\frac{x^3 - x + 1}{(2 - x)^2} + \frac{3 x^2 - 1}{2 - x}$$

$$f(x) := \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\frac{1}{g(x)} g'(x)$$

$$\text{con } g(x) = \frac{x+1}{x-1}, \text{ y}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2} - \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

f' [x] // Simplify

$$-\frac{2}{x^2 - 1}$$

$$f(x) := e^{\sin(3x)}$$

f' [x]

$$3 e^{\sin(3x)} \cos(3x)$$

$$f(x) := \sqrt{x} e^{\sin(3x)}$$

f' [x]

$$\frac{e^{\sin(3x)}}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} e^{\sin(3x)} \cos(3x)$$

Paso a paso

a) $f(x) = x^2 + \sin x$, derivando cada sumando se obtiene, $f'(x) = 2x + \cos x$

b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$, escribiendo la función de la forma $f(x) = x^3 - x^{-2} + x^{\frac{2}{3}}$ y derivando cada sumando queda

$$f'(x) = 3x^2 - (-2)x^{-3} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

c) $f(x) = x^3 e^{2x}$, aplicando la regla de derivación del producto queda, $f'(x) = 3x^2 e^{2x} + x^3 2e^{2x} = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x}$.

d) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{-x + 2}$, aplicando la regla de derivación del cociente queda

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(-x + 2) - (x^3 - x + 1)(-1)}{(-x + 2)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{(-x + 2)^2}$$

e) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x^2-1}$

f) $f(x) = e^{\sin 3x}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = 3 \cos 3x e^{\sin 3x}$

Reproduzca los mismos ejemplos con Mathematica

Halla la función derivada de $\begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{para } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

Para cualquier valor de $x < 2$, aplicando la reglas de derivación se tiene $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$.

Para cualquier valor de $x > 2$, derivando el polinomio se tiene $f'(x) = 2x$.

Para $x = 2$, veamos en primer lugar si la función es continua calculando los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

como estos límites no coinciden la función no es continua en $x = 2$ y por lo tanto no es derivable en este punto.

Así, la función derivada de f es $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-2)^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Reproducimos el mismo ejemplo con Mathematica

$$f[x_] := \begin{cases} \frac{1}{x-2} & x < 2 \\ x^2 - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

$f'[x]$

$$\begin{cases} -\frac{1}{(x-2)^2} & x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

Indeterminate True

Concepto de diferencial

Diferencial. – En la definición de derivada $f'(x) =$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ despejamos } dy,$$

que denominamos diferencial de y , nos queda

$$dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow dy = f'(x_0) dx$$

Aproximación

$$\Delta y \simeq f'(x_0) \Delta x$$

Ejemplo: Dado un cuadrado de lado $x_0 = 1$ m. ¿Cuanto se incrementará el área si el aumentamos la longitud de lado 0.1 m?, ¿y si lo aumentamos 0.01 m?.

Método exacto

$$S = x^2 \rightarrow \Delta S = (x_0 + \Delta x_0)^2 - x_0^2;$$

$$\text{para } \Delta x_0 = 0.1 \rightarrow 1.1^2 - 1 = 0.21;$$

$$\text{para } \Delta x_0 = 0.01 \rightarrow 1.01^2 - 1 = 0.0201$$

Método aproximado

$$S = x^2, \text{ usamos } \Delta y \simeq f'(x_0) \Delta x \rightarrow \Delta S = 2 x_0 \Delta x ;$$

$$\text{para } \Delta x_0 = 0.1 \rightarrow 2 \times 1 \times 0.1 = 0.2;$$

$$\text{para } \Delta x_0 = 0.01 \rightarrow 2 \times 1 \times 0.01 = 0.02$$

Comparación método exacto con método aproximado. Obsérvese que el error relativo disminuye cuando el incremento se va haciendo mas pequeño

$$(0.21-0.20)/0.21 \approx 5.0\%$$

$$(0.0201-0.02)/0.0201 \approx 0.5\%$$

EJEMPLOS PARA ILUSTRAR LA APLICACIÓN DE DERIVADAS EN ECÓNOMIA

Ejemplo 1.- Explotación de un pozo de petróleo

De un pozo de petróleo el coste $c(t)$ de extracción unitario (en \$/barril) aumenta (inflación,...) con el tiempo t (en años) de acuerdo a

$$c(t) := 0.1 t^{1.5} + 10$$

El volumen diario, $q(t)$, (en barriles) extraído disminuye de acuerdo a

$$q(t) := 10^5 e^{-0.05 t}$$

Obsérvese la variación del coste unitario y de los gastos totales anuales con el tiempo: {año, \$/barril}

TableForm[Table[{t, c(t), q(t)}, {t, 0, 10}]]

0	10.	100 000.
1	10.1	95 122.9
2	10.2828	90 483.7
3	10.5196	86 070.8
4	10.8	81 873.1
5	11.118	77 880.1
6	11.4697	74 081.8
7	11.852	70 468.8
8	12.2627	67 032.
9	12.7	63 762.8
10	13.1623	60 653.1

El coste de producción, en \$/año, con el tiempo (en años) será:

$$G(t) := c(t) q(t)$$

El coste de producción marginal (tasa de variación) será:

$G'(t) = q(t) c'(t) + c(t) q'(t)$, substituyendo se obtiene

$$G'(t)$$

$$15\,000. e^{-0.05 t} t^{0.5} - 5000. e^{-0.05 t} (0.1 t^{1.5} + 10)$$

La tasa proporcional de variación será

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{q(t)c'(t)+c(t)q'(t)}{q(t)c(t)} = \frac{c'(t)}{c(t)} + \frac{q'(t)}{q(t)}$$

$$\frac{G'(t)}{G(t)}$$

$$(e^{0.05t}(15000 \cdot e^{-0.05t} t^{0.5} - 5000 \cdot e^{-0.05t}(0.1 t^{1.5} + 10))) / (100000(0.1 t^{1.5} + 10))$$

Supongamos que se espera que el precio unitario de venta (\$/barril) varíe de acuerdo a

$$r(t) := 0.05t + 18$$

Por tanto, los ingresos totales anuales $R(t)$ variarán de acuerdo a

$$R(t) := r(t) q(t)$$

$$R(t)$$

$$100000 e^{-0.05t} (0.05t + 18)$$

El ingreso marginal será

$$R'(t)$$

$$5000 \cdot e^{-0.05t} - 5000 \cdot e^{-0.05t} (0.05t + 18)$$

Nos planteamos: ¿Cual será el beneficio anual $B(t)$ esperado?

Vendra dado por la diferencia entre ingresos y gastos

$$B(t) := R(t) - G(t)$$

$$B(t)$$

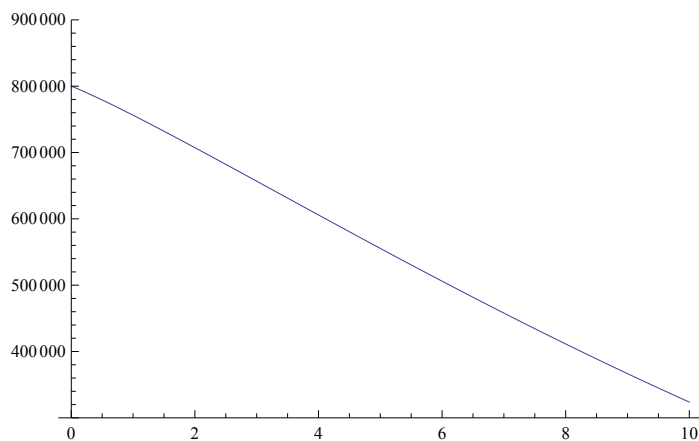
$$100000 e^{-0.05t} (0.05t + 18) - 100000 e^{-0.05t} (0.1 t^{1.5} + 10)$$

$$\text{Simplify}[B(t)]$$

$$e^{-0.05t} (-10000 \cdot t^{1.5} + 5000 \cdot t + 800000)$$

Podemos observar que el beneficio anual va disminuyendo con el tiempo.

$$\text{Plot}[B[t], \{t, 0, 10\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{3 \times 10^5, 9 \times 10^5\}]$$

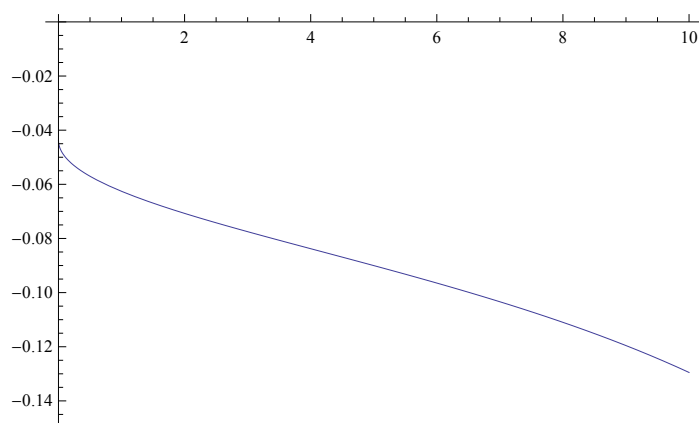


$$\text{Simplify}\left[\frac{B'(t)}{B(t)}\right]$$

$$(500 \cdot t^{1.5} - 15000 \cdot t^{0.5} - 250 \cdot t - 35000) / (-10000 \cdot t^{1.5} + 5000 \cdot t + 800000)$$

Observe que la tasa proporcional de variación del beneficio también disminuye

```
Plot[B'[t] / B[t], {t, 0, 10}, PlotRange -> {0, -0.15}]
```



Ejemplo 2.- Evolución cíclica del precio de un producto estacional

El precio de las fresas, p , en €/kg, varía cíclicamente (es un producto estacional), supongamos que se puede aproximar (t en semanas)

$$p[t_] := 1.2 + 0.6 \cos\left[\frac{6}{52} t\right]$$

En una cadena de alimentación se ha observado que su demanda, x , en kg, depende del precio, p , en €/kg, de acuerdo a la expresión:

$$x[p_] := 5000 - 1200 p$$

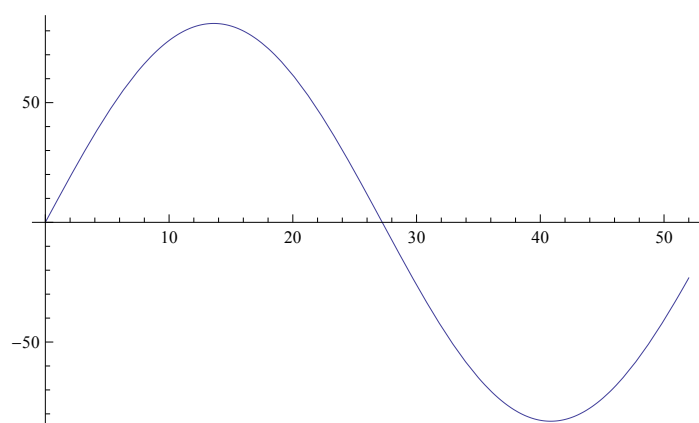
¿Cuál es la tasa de variación semanal de la demanda?

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp} \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{\partial x(p)}{\partial p} \frac{\partial p(t)}{\partial t}$$

$$83.0769 \sin\left(\frac{3t}{26}\right)$$

```
Plot[%, {t, 0, 52}]
```



Ejemplo 3.- Inversión pública y crecimiento en el modelo keynesiano

En la teoría keynesiana se supone que el gasto total G de consumo de bienes y servicios es una función del producto nacional bruto Y , que se representa por:

$$(3.1) \quad G = f(Y)$$

En muchos modelos se supone que la función consumo $f(Y)$ es lineal, esto es

$$(3.2) \quad f(Y) = a + bY$$

Si G e Y se miden en millones de dólares b nos dice cuanto aumenta el consumo G si el producto nacional Y aumenta en 1 millón de dólares

En un estudio se comprobó que para EE.UU.

$$(3.3) \quad f(Y) = 95.05 + 0.712 Y$$

Consideremos el siguiente modelo macroeconómico para determinar la renta nacional (o producto nacional)

$$(3.4) \quad Y = G + I$$

a) Hallar la variación ΔY si I cambia ΔI uds.

$$Y = 95.05 + 0.712 Y + I, \text{ despejando } Y \text{ se tiene}$$

$$Y = 3.47 I + 330.03 \text{ incrementamos } Y \text{ e } I \text{ en } \Delta Y \text{ e } \Delta I$$

$$Y + \Delta Y = 3.47 (I + \Delta I) + 330.03$$

Restando las dos expresiones anteriores se tiene

$$\Delta Y = 3.47 \Delta I$$

Si ΔI varia, p.ej: $10^9 \$ \rightarrow 3.47 \cdot 10^9 \$$.

b) Hallar la expresion dY/dI

Substituyendo en (3.4) la expresión (3.1)

$$Y = f(Y) + I$$

Entonces

$$\frac{dY}{dI} = f'(Y) \frac{dY}{dI} + 1 \rightarrow \frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - f'(Y)}$$

En (3.3) $f'(Y) = 0.712$ y de aquí

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - 0.712} = 3.47$$

Habitualmente (empíricamente $0 < b < 1$) $0 < f'(Y) < 1 \rightarrow dY/dI > 1$

Esto lleva a una importante conclusión para este modelo (es decir: es válida para los supuestos del modelo no de forma general): Un aumento en la inversión pública de 1% normalmente conllevará un aumento proporcionalmente mayor del 1% en el Producto Nacional Bruto

Hallar la derivada segunda de Y para $Y = f(Y) + I$

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - f'(Y)} \rightarrow \frac{d^2 Y}{dI^2} = -1 (1 - f'(Y))^{-2} \cdot f''(Y) \frac{dY}{dI}$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{d}{dI} (1 - f'(Y)) &= (0 - f''(Y)) \frac{dY}{dI} \\ \frac{d^2 Y}{dI^2} &= (1 - f'(Y))^{-3} \cdot f''(Y) = \frac{f''(Y)}{(1 - f'(Y))^3} \end{aligned}$$

Para el modelo anterior:

a) Hallar la diferencial dY en términos de dI

$$Y = G + I \rightarrow dY = dG + dI$$

$$G = f(Y) \rightarrow dG = f'(Y) dY \text{ que sustituimos en } dY$$

$$dY = f'(Y) dY + dI \rightarrow dY = \frac{1}{1 - f'(Y)} dI$$

b) Se supone que el empleo $N = g(Y)$, hallar la diferencial dN en términos de dI

$$N = g(Y) \rightarrow dN = g'(Y) dY, \text{ como}$$

$$dY = \frac{1}{1 - f'(Y)} dI \rightarrow dN = \frac{g'(Y)}{1 - f'(Y)} dI$$

Siempre que $g'(Y) > 0$ y $0 < f'(Y) < 1$, se llega a la conclusión de que cuando la inversión crece también crece el empleo.

Ejemplo 4 Elasticidad

Un concepto ampliamente utilizado en economía es el de elasticidad. La elasticidad, El , de f con respecto a x se define

$$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Supongamos que la demanda, Dem , de cierto bien está dada por la expresión: $Dem(p) = 8000 p^{-1.5}$

Hallar la elasticidad de $Dem(p)$

Sol:

$$Dem[p_] = 8000 p^{-1.5};$$

Aplicamos la definición de elasticidad. En nuestro caso f es la función demanda dem y x es el precio p

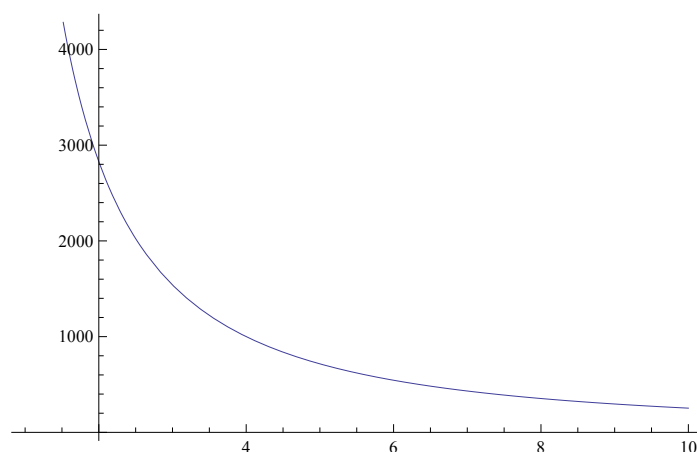
$$ElxDem[p_] = \frac{p}{Dem[p]} Dem'[p]$$

$$-1.5$$

En este caso la elasticidad es una constante igual a -1.5 y debe interpretarse como que un aumento en el precio del 1% implica que la demanda cae (pues el signo es -) el 1.5%

En el grafico podemos observar como disminuye la demanda cuando aumenta el precio entre el 1% y el 10%

`Plot[Dem[p], {p, 1, 10}]`



Ejemplo 5 Elasticidad y derivación logarítmica

En la función demanda del ejercicio anterior tomamos logaritmos

$$\ln Dem(p) = \ln 8000 - 1.5 p$$

Nota: la relación anterior se dice que es log-lineal

que es la ecuación de una recta de pendiente -1.5. Esto nos permite obtener otra forma de calcular la elasticidad que es

$$El_x Dem(p) = \frac{p}{Dem(p)} Dem'(p) = \frac{d \ln (Dem(p))}{d \ln (p)}$$

y en general

$$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{d \ln f(x)}{d \ln (x)}$$

$$\text{Nota: llamamos } y = f(x) \text{ entonces } El_x y = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{y} \bigg/ \frac{dx}{x} = \frac{d \ln y}{d \ln x}$$

por tanto, a veces nos sera mas util calcular las elasticidades utilizando las derivadas logarítmicas

REGLA DE L' HOPITAL

Teorema reducido

Si f y g son derivables en x_0 , si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $g'(x) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{4\sqrt{x} - 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{f'(4)}{g'(4)} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x-3}}{x-7} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{f'(7)}{g'(7)} = -\frac{1}{6}$$

Teorema completo

Si f y g son derivables en un intervalo (a, b) , centrado en x_0 -donde necesariamente no tiene que ser derivable- y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Si $g'(x) \neq 0 \forall x \neq x_0 \in (a, b)$ y si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (L finito, } \infty, -\infty), \text{ entonces}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Nota: a y b pueden sustituirse por $\pm \infty$

Observe que la Regla de L' Hôpital aplica a indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, pero también puede utilizarse en otros tipos de indeterminaciones si estas pueden convertirse en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{x^5 - x^4} - x = [\infty - \infty]$$

Para aplicar la regla de L'Hôpital hemos de transformar la expresión anterior en la forma $0/0$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\sqrt[5]{x^5 - x^4} - x = \sqrt[5]{x^5 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} - x = x \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} - x = \frac{(1 - (1/x))^{1/5} - 1}{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{x^5 - x^4} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - (1/x))^{1/5} - 1}{1/x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{5} (1 - (1/x))^{-4/5} \right] = -\frac{1}{5}$$

Aplicar la Regla de L'Hôpital para resolver los siguiente límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\log(x)}$$

0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2}$$

∞

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log(x)$$

0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

0

Soluciones

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(L'Hôpital)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{(L'Hôpital)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{(L'Hôpital)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{(L'Hôpital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = [+\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(L'Hôpital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(L'Hôpital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\ln x} = [1^{-\infty}] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln x (1 + x^2 - 1)} = e^{[(-\infty) \cdot 0]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\left[\frac{-\infty}{+\infty} \right]} \stackrel{(L'Hôpital)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2}} = e^0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)^{\frac{1}{x}} = [(+\infty)^0] = e^{\ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)^{\frac{1}{x}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 2)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x^2 + 2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x}} = e^{\left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]} \stackrel{(L'Hôpital)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 2}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 2}} = e^0 = 1$$

Derivadas segundas y sucesivas

Para $f(x)$ de la misma manera que se calcula la derivada primera $f'(x)$ puede calcularse, si es que existen, la derivada segunda ($f''(x)$), tercera $f'''(x)$, cuarta $f^{(iv)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$.

Ejemplo: Para

$$f[x] := e^{3x}$$

$$f'[x]$$

$$3e^{3x}$$

$$f''[x]$$

$$9e^{3x}$$

$$f'''[x]$$

$$27e^{3x}$$

$$D[f[x], \{x, 4\}]$$

$$81e^{3x}$$

$f(x) = \ln(x)$
 en $x = e$
 orden de la derivada: 5

$f(e) =$	1
$f'(e) =$	$\frac{1}{e}$
$f''(e) =$	$-\frac{1}{e^2}$
$f'''(e) =$	$\frac{2}{e^3}$
$f^{(4)}(e) =$	$-\frac{6}{e^4}$
$f^{(5)}(e) =$	$\frac{24}{e^5}$

Adaptado de <http://demonstrations.wolfram.com/MultipleDerivatives>

MAXIMOS Y MINIMOS

Se recomienda los enlaces: http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad7/u7graf/u7grafte20.pdf y http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad7/u7graf/u7grafte50.pdf

Sea D el dominio de $f(x)$, definimos

$c \in D$ es un máximo de $f \iff f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D$, si el valor de f en c es estrictamente mayor, $f(x) < f(c)$, que cualquier otro punto de D , entonces c es un máximo estricto.

$d \in D$ es un mínimo de $f \iff f(x) \geq f(d) \quad \forall x \in D$, si el valor de f en d es estrictamente menor, $f(x) > f(d)$, que cualquier otro punto de D , entonces c es un mínimo estricto.

Los puntos anteriores se les llama usualmente punto críticos o valores óptimos.

Test de la derivada primera y segunda para la determinación de los puntos óptimos

En general x_0 es un punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$

Si f es una función con derivada segunda continua en x_0 y $f'(x_0) = 0$, si:

- a) $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene en x_0 un mínimo relativo estricto
- b) $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene en x_0 un máximo relativo estricto
- c) $f''(x_0) = 0$ es indeterminado y hemos de aplicar otro criterio.

Test de la derivada primera para la determinación de los puntos óptimos

Si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \leq c$, y $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq c$ entonces $x=c$ es un máximo de f .

Si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \leq c$, y $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq c$ entonces $x=c$ es un mínimo de f .

Otras opciones para la determinación de los puntos óptimos

Supongamos que la función f tiene un máx. o un mín. en un intervalo acotado I . Los máx. y mín. pueden ser de los tres tipos siguiente:

- 1.- Puntos interiores de I en los que $f'(x) = 0$
- 2.- Los dos extremos de I
- 3.- Puntos de I en los que no exista $f'(x)$

Máximos y mínimos locales

La función f tiene un máximo local en c si existe un intervalo (a, b) centrado en c tal que $f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in A \cap (a, b)$.

La función f tiene un mínimo local en d si existe un intervalo (a, b) centrado en d tal que $f(x) \geq f(d) \quad \forall x \in A \cap (a, b)$.

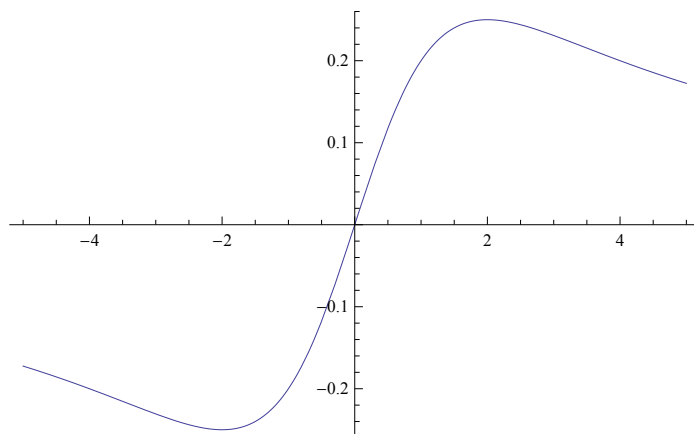
Supongamos que la función f tiene un máx. o un mín. local en un intervalo acotado I . Los máx. y mín. pueden ser de los tres tipos siguiente:

- 1.- Puntos interiores de I en los que $f'(x) = 0$
- 2.- Los dos extremos de I
- 3.- Puntos de I en los que no exista $f'(x)$

Calcular los puntos críticos de las funciones $f(t) = \frac{t}{t^2+4}$, $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$; $y(x) = \frac{6x^3}{x^4+x^2+2}$

$$f[t_] := \frac{t}{t^2 + 4}$$

`Plot[f[t], {t, -5, 5}]`



Calculamos la derivada primera y la igualamos a 0

$$f'[t]$$

$$\frac{1}{t^2 + 4} - \frac{2t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

`Reduce[f'[t] == 0, t]`

$$t = -2 \vee t = 2$$

Vemos que hay dos puntos críticos. De gráfico se deduce que el primero es un mínimo y el segundo un máximo. También podemos comprobarlo utilizando la derivada segunda.

$$f''[-2]$$

$$\frac{1}{16}$$

como $f''(x_0) > 0$ en $x_0 = -2$ entonces x_0 es un mínimo relativo estricto

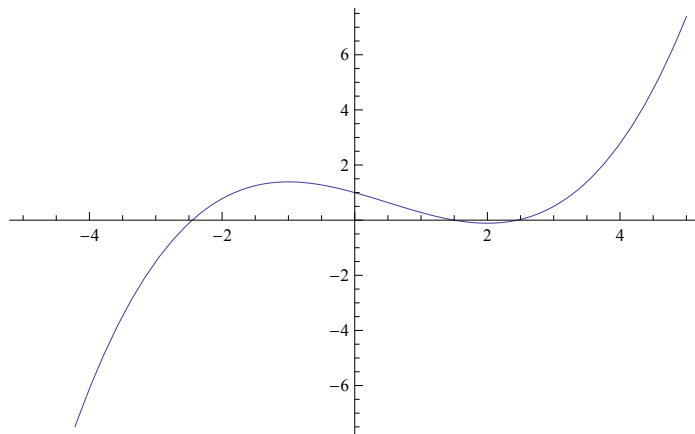
$$f''[2]$$

$$-\frac{1}{16}$$

como $f''(x_0) < 0$ en $x_0 = 2$ entonces x_0 es un máximo relativo estricto

$$f[x_] := \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1;$$

`Plot[f[x], {x, -5, 5}]`



$$f'[x]$$

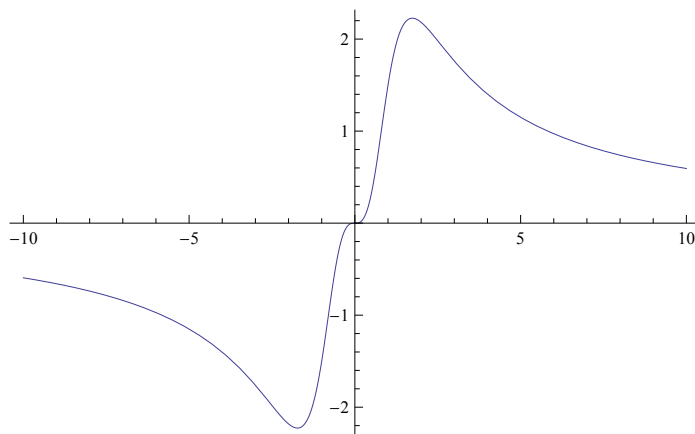
$$\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

`Reduce[f'[x] == 0, x]`

$$x = -1 \vee x = 2$$

$$y[x_] = \frac{6x^3}{x^4 + x^2 + 2};$$

`Plot[y[x], {x, -10, 10}]`



$y' [x]$

$$\frac{18x^2}{x^4 + x^2 + 2} - \frac{6x^3(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 2)^2}$$

 $y' [x]$ **Reduce** [$y' [x] == 0, x]$

$$x = 0 \vee x = -i\sqrt{2} \vee x = i\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

 $y'' [0]$

0

Problemas

Ejemplo 1

En una explotación agrícola se ha observado que cuando se utilizan Q kg de fertilizante por Ha se se obtienen P kg de trigo (es decir: P(Q)). El precio de venta del trigo es p (€/kg) y el del fertilizante q(€/kg). ¿Cuántos kg de fertilizante por Ha hemos de utilizar para maximizar el beneficio?. Apliquese al caso particular en el que:

$$P(Q) = -140 + 9.8Q - 0.5Q^{3/2}$$

solucion

Sol: El beneficio nos vendrá dado por :

$$B(Q) = p P(Q) - q Q \text{ con } (Q \geq 0)$$

Se trata de maximizar la función anterior

$$B[Q_] = p P[Q] - q Q;$$

Para lo que hay que obtener la derivada primera e igualarla a 0

 $B' [Q]$

$$p P'(Q) - q$$

Para nuestro caso concreto, P(Q), P'(q) y B'(Q) son

$$P[Q_] = -140 + 9.8Q - 0.5Q^{3/2};$$

 $P' [Q]$

$$9.8 - 0.75\sqrt{Q}$$

 $B' [Q]$

$$p(9.8 - 0.75\sqrt{Q}) - q$$

Hacemos B'[Q] = 0 y despejamos Q

Solve [$B' [Q] == 0, Q]$ // **Simplify**

$$\left\{ \left\{ Q \rightarrow \frac{1.77778q^2}{p^2} - \frac{34.8444q}{p} + 170.738 \right\} \right\}$$

Apliquese al caso en el que p = 0.06 €/kg y el de fertilizantes p= 0.4 €/kg

% /. {p → 0.06, q → 0.4}

$$\{ \{ Q \rightarrow 17.4538 \} \}$$

Conclusion: Se necesitan utilizar 17.45 kg/Ha para maximizar el beneficio

```
Clear[B, P]
```

```
Quit[]
```

Ejemplo 2

Un roble es plantado en el instante $t = 0$. Se sabe que el precio del roble se varia de acuerdo una función $P(t)$, que es derivable. Se supone que el precio del dinero esta dado por un tipo de interes continuo 100 $r\%$ anual. [A interés compuesto continuo de tasa r , una cantidad inicial K_0 después de t años se convertira en $K = K_0 \text{Exp}[r t]$]. ¿Cuándo hay que cortar el arbol para hacer máximo el valor actual descontado?. Apliquese al caso particular en el que $P(t) = t^2 + 10 t + 25$ y $r = 0.05$

solución

El valor actual del arbol será $f(t) = P(t) \text{Exp}[-r t]$

$$f(t) = P(t) e^{-rt};$$

Hay que hacer su derivada $f'(t)=0$

$$f'(t)$$

$$e^{-rt} P'(t) - r P(t) e^{-rt}$$

Se hace cero cuando

$$P'(t) = r P(t)$$

Aplicamos el criterio de la derivada segunda

$$f''(t)$$

$$e^{-rt} P''(t) - 2 r e^{-rt} P'(t) + r^2 P(t) e^{-rt}$$

Como el punto singular este en $P'(t) = r P(t)$, substuimos $P'(t)$ en la expresion anterior

$$f''(t) / P'(t) \rightarrow r P(t)$$

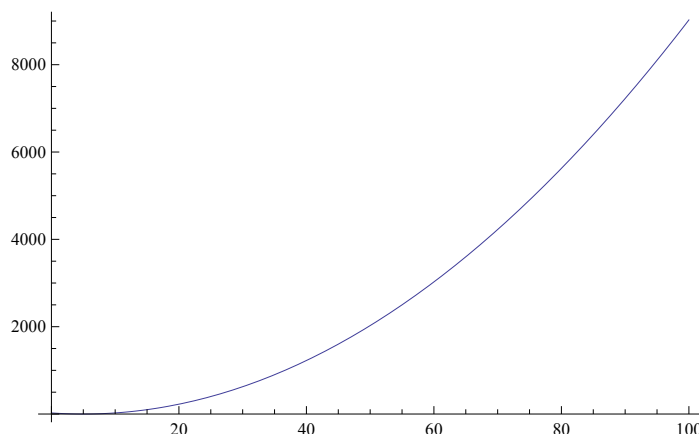
$$e^{-rt} P''(t) - r^2 P(t) e^{-rt}$$

Por tanto hay que cortar el arbol cuando en el intervalo $(t, t+1)$ en el que el aumento del valor del arbol sea igual al interés que se oobtendria durante ese intervalo de tiempo al invertir una cantidad $P(t)$ a una tasa r . Ojo: Esto indica que el arbol no hay que cortarlo cuando su valor de mercado sea mayor.

Para el caso en el que

$$P(t) = t^2 - 10 t + 25 ; r = 0.05 ; (*con t \geq 0*) ;$$

$$\text{Plot}[P[t], \{t, 0, 100\}]$$



entonces $f(t)$ es

$$f[t_] = P[t] e^{-x t}$$

$$e^{-0.05 t} (t^2 - 10 t + 25)$$

Hacemos la derivada primera "0" y se obtienen dos puntos singulares

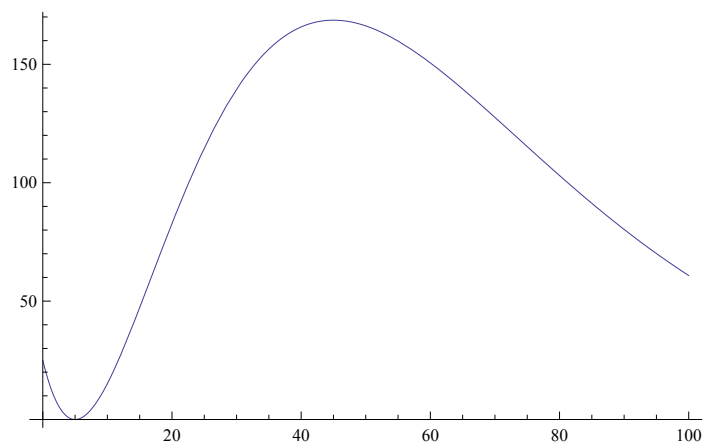
Reduce[f'[t] == 0, t]

Reduce::ratnz: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

$$t = 5. \vee t = 45.$$

Observese que el valor real disminuye a partir de cierto momento

Plot[f[t], {t, 0, 100}]



En $t=45$ su derivada segunda es $f''[t] < 0$ luego es un máximo local

f''[45]

-0.210798

Sin embargo en $t=5$ su derivada segunda es $f''[t] > 0$ luego es un mínimo local

f''[5]

1.5576