

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S)

1 CONTEXTO

Esta actividad va dirigida a alumnos de 2º de Bachillerato, en la asignatura de Física.

Es necesario hacer referencia a los conocimientos básicos adquiridos en 4º de ESO y más profundamente en 1º de Bachillerato. Los contenidos de 4º de ESO que están relacionados con el tema a tratar son los siguientes: Conceptos iniciales sobre el movimiento, Movimiento circular uniforme, Principios básicos sobre dinámica. En 1º de Bachillerato se hace referencia directamente al movimiento armónico simple (M.A.S), desde el punto de vista dinámico y cinemático, y también al movimiento circular.

Según la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, *por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León*, en 2º de Bachillerato sólo se hace referencia al M.A.S a la hora de estudiar el movimiento ondulatorio (Bloque 4 del currículo), el cual debe relacionarse con el M.A.S. El M.A.S debe impartirse en su totalidad en el curso de 1º de Bachillerato (Bloque 6 del currículo), pero, la asignatura de Física y Química en dicho curso tiene un temario muy extenso, y es muy común que el M.A.S se trate más profundamente en 2º de Bachillerato.

En esta actividad concreta, tendremos en cuenta que los alumnos no han estudiado anteriormente el M.A.S.

Para explicar este movimiento, es necesario recordar previamente en clase cómo funciona el movimiento circular y hacer referencia a los conceptos previos de M.A.S que pueden haber adquirido en el curso anterior. Si por el contrario, no se ha estudiado el M.A.S con anterioridad, se hará únicamente referencia al movimiento circular y se introducirá este nuevo movimiento.

Estos contenidos serán explicados/tratados en tres sesiones de clase de 50 min cada una, en el laboratorio de Física del instituto correspondiente.

COMENTARIO: Aunque en principio se había propuesto que esta actividad se debía desarrollar en una única sesión de 50 min, considero que es un tiempo demasiado escaso, por eso lo he ampliado a tres sesiones.

2 OBJETIVOS

En esta actividad, lo que se pretende es que los alumnos puedan:

- Reforzar y ampliar el funcionamiento del M.A.S (en el caso de que ya se haya estudiado en primero de Bachillerato).
- Comprender en qué consiste el M.A.S.
- Comprender y relacionar los conceptos involucrados en el M.A.S: concepto de período y frecuencia.
- Comprender los sistemas del péndulo simple y del muelle.
- Ser capaces de aplicar los conocimientos nuevos a casos prácticos, mediante la resolución de ejercicios.

3 HERRAMIENTAS DOCENTES

Para realizar esta sesión de clase, se va a utilizar la pizarra, los apuntes sobre el M.A.S.

Además, en el laboratorio de Física, se va a realizar un montaje de un péndulo y de un muelle.

4 DESARROLLO

1. ACTIVIDADES DE INTRODUCCIÓN Y CONEXIÓN CON CONOCIMIENTOS PREVIOS

4.1.1 Conexión con conocimientos previos

PRIMERA SESIÓN DE CLASE: 50 MIN

Al comenzar esta sesión de clase, se abrirá un pequeño debate sobre qué saben los alumnos del movimiento circular, para saber qué conocimientos previos tienen sobre ese movimiento.

A continuación, se hará un breve repaso del movimiento circular uniforme, en el que se explicará lo siguiente:

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

El movimiento circular uniforme está presente en multitud de situaciones de la vida cotidiana: por ejemplo, el movimiento de una noria.

En este movimiento un móvil (objeto que se mueve) describe una trayectoria circular con rapidez constante.

Según lo estudiado en el curso anterior, recordamos que este movimiento presenta dos tipos de velocidades: la velocidad lineal y la velocidad angular. Dichas velocidades se pueden expresar según las siguientes expresiones:

Velocidad lineal (v) en m/s

$$v = \frac{\text{arco}}{\text{tiempo}}$$

el arco va a depender de la longitud (perímetro) de la circunferencia recorrida

Velocidad angular (ω) en rad/s o rpm

$$\omega = \frac{\varphi}{\text{tiempo}}$$

φ es el ángulo de la circunferencia recorrido

Estas dos **velocidades están relacionadas** según la siguiente expresión:

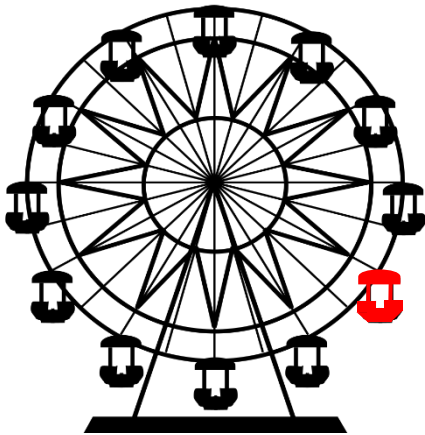
$$v = \omega \cdot R$$

4.1.2 Introducción de los conceptos nuevos

Una vez que ya hemos un breve resumen de algunas de las expresiones utilizadas al estudiar el movimiento circular uniforme, ya podemos relacionarlo con el M.A.S.

El concepto de período y frecuencia, se puede introducir directamente, sin mencionar todavía el M.A.S mediante el ejemplo expuesto al explicar el movimiento circular: la noria.

Así, se explica a los alumnos, que la noria realiza un movimiento periódico, es decir, que se repite. Lo mismo pasa con las agujas del reloj, o con un tocadiscos.



Si nos fijamos en la cabina de color rojo y observamos su trayectoria circular, es fácil comprender que dicha cabina (juntos con todas las demás) realiza un movimiento periódico, que se podría medir en “vueltas”. Así, cuando se accede a una atracción de este tipo, el precio a pagar depende del número de vueltas que se vayan a realizar.

Si queremos acceder a una noria, y sabemos que vamos a realizar un número determinado de vueltas, ¿qué pasa si queremos saber cuánto tiempo vamos a disfrutar de la atracción? ¿Se puede calcular ese tiempo?

La forma de pedir el tiempo es muy sencilla y trivial. Resulta obvio que si cronometramos el tiempo que estamos en la noria, ya obtenemos el resultado que queríamos saber. Pero, si lo queremos medir estando fuera de la noria, resulta muy sencillo **si calculamos el tiempo que tarda la atracción en realizar una vuelta**. Si nos fijamos, por ejemplo, en la cabina roja, simplemente tendríamos que cronometrar el tiempo que tarda en realizar una vuelta completa, partiendo de un punto concreto de la noria, al que llamaremos origen. Una vez que cronometramos este tiempo, obtenemos un valor numérico en minutos o segundos, que se corresponde con el tiempo que tarda la noria en realizar una vuelta, de ese movimiento circular periódico, que se repite una y otra vez.

Pues bien, **el tiempo que tarda la cabina roja de la noria en realizar una vuelta completa, se conoce como período (T)**, y en el SI se mide en **segundos**.

Existe otro concepto, muy sencillo de comprender, que es el concepto de **frecuencia (f)**. **La frecuencia es el número de vueltas que la cabina roja de la noria realiza en un tiempo determinado**. Así, la frecuencia es la inversa del período ($1/T$), y se mide en **hercios (Hz)**.

Si lo pensamos, estos dos nuevos conceptos van a depender, obviamente de la velocidad a la que gire la noria. Es decir, dependen de su velocidad angular, según la siguiente expresión:

$$\omega = \frac{\varphi}{\text{tiempo}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

2π se corresponde con una vuelta completa

Pues bien, estos dos conceptos son muy importantes en otros movimientos, como el que vamos a explicar en esta sesión: el movimiento armónico simple (M.A.S).

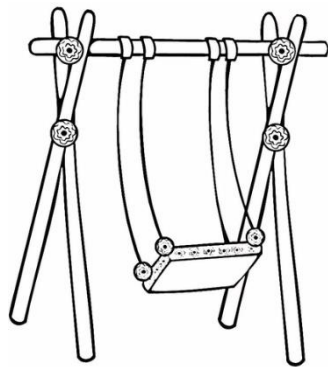
2. INTRODUCCIÓN DE CONCEPTOS NUEVOS

PRINCIPIOS GENERALES DEL M.A.S

El M.A.S es un movimiento periódico, que realiza, por ejemplo, un péndulo, un columpio, un yo-yo, un muelle, etc.

Si analizamos las siglas del M.A.S podemos observar lo siguiente:

- M (movimiento): movimiento, por tanto, habrá que hacer un estudio cinemático.
- A (armónico): armónico, quiere decir que se la ecuación del movimiento se expresa mediante funciones armónicas, como la función seno o la función coseno.
- S (simple): simple, es un movimiento de una sola variable (unidimensional).



Si pensamos en estos objetos y observamos su movimiento, vemos que realizan un movimiento repetitivo, que parten de un punto concreto y que vuelven a dicho punto de partida, repetidas veces, después de realizar la trayectoria de ese movimiento.

Este movimiento es el M.A.S, y, como el movimiento angular, también contiene los conceptos de período (T) y frecuencia (f). El período se corresponde con el tiempo que tarda, por ejemplo, el columpio, en volver al punto de partida (origen), una vez que comienza a moverse. Si recordamos el ejemplo de la noria, el período era el tiempo en el que una de las cabinas realizaba una vuelta completa desde el punto de origen. Así, en este caso, la frecuencia vuelve a corresponderse con el número de veces que el objeto en movimiento, ya sea el columpio o el yo-yo, vuelve al punto de partida en un tiempo concreto. Como ya se mencionó anteriormente, la frecuencia es la inversa del período.

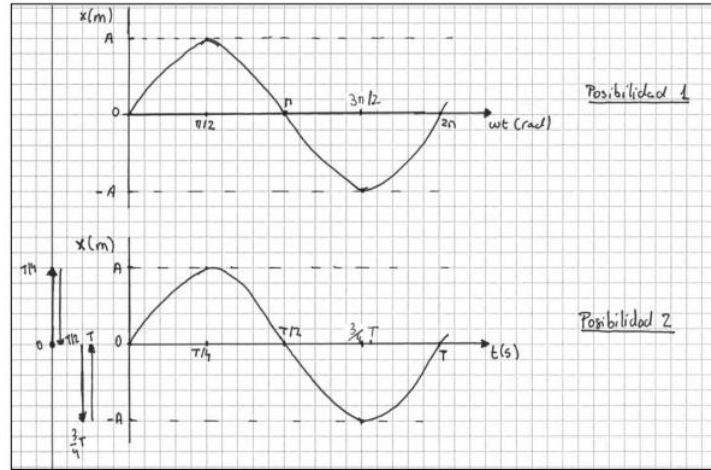
El M.A.S tiene una ecuación de posición, que es la siguiente:

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

- x es la **elongación** (en metros), es la posición de la partícula vibrante en cualquier instante referida a la posición de equilibrio.
- A es la **amplitud** (en metros), es el valor máximo que puede tener la elongación.
- $(\omega t + \varphi)$ es la **fase en cualquier instante** (en radianes). Su valor determina el estado de vibración o fase del movimiento.
- φ es la **fase inicial** o, también, corrección de fase o constante de fase (en radianes). Determina el estado de vibración para $t = 0$.
- ω es la pulsación o **frecuencia angular** (en rad/s). Representa la velocidad angular constante del hipotético movimiento circular asociado.

DOCUMENTO DE PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDAD DOCENTE

La representación gráfica de la ecuación del M.A.S es la siguiente:



La amplitud (A) es el máximo desplazamiento que tiene lugar durante una oscilación o vibración. Es importante tener en cuenta que la función seno puede tomar valores positivos y negativos que harán que la elongación sea positiva o negativa. El sentido que hay que darle a este signo está relacionado con el lugar en el que se encuentra la partícula en movimiento (base del columpio, por ejemplo)

Si la elongación es positiva la partícula se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio. Podremos saber si se acerca o se aleja a dicha posición dependiendo del valor de la fase. Así, si la fase está entre 0 y $\pi/2$ radianes la partícula se aleja, y si está entre $\pi/2$ y π la partícula se acerca. Si la elongación es negativa la partícula se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio. Podremos saber si se acerca o se aleja a dicha posición dependiendo del valor de la fase. Así, si la fase está entre π y $3\pi/2$ radianes la a partícula se aleja, y si está entre $3\pi/2$ y 2π la partícula se acerca.

A partir de la ecuación de posición podemos deducir su ecuación de velocidad, ya que la velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo, así, si derivamos la ecuación de posición respecto del tiempo, obtenemos la ecuación de velocidad:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

De la misma forma, podemos obtener la ecuación de aceleración del M.A.S, derivando la ecuación velocidad respecto del tiempo:

$$a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Según qué condiciones, las expresiones anteriores se pueden simplificar, ya que algunos términos pueden igualarse a 0. Dichas condiciones son las siguientes:

Fase, ωt ($\varphi = 0$)	Elongación, x	Velocidad, v	Aceleración, a
0	Punto de equilibrio, $x = 0$	Máxima, $v = A\omega$	$a = 0$
$\pi/2$	$x = A$	$v = 0$	Máxima, $a = -A\omega^2$
π	Punto de equilibrio, $x = 0$	Máxima, $v = -A\omega$	$a = 0$
$3\pi/2$	$x = -A$	$v = 0$	Máxima, $a = A\omega^2$

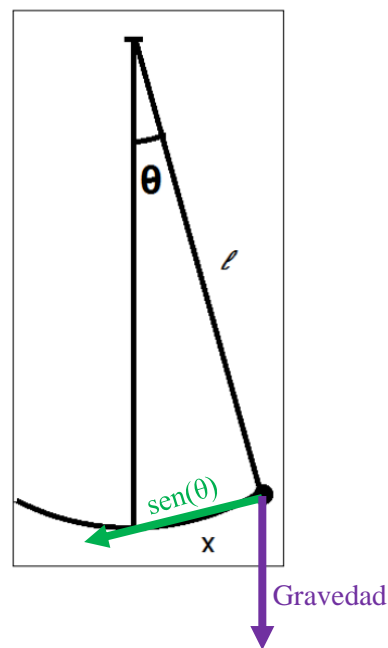
COMENTARIO: Se omiten las deducciones de todas las ecuaciones anteriores porque se supone que la sesión debe desarrollarse en 50 minutos, y no daría tiempo. Sería interesante deducirlas pero se tendría que hacer en sesiones posteriores, o añadir más sesiones a la actividad.

3. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

SEGUNDA SESIÓN DE CLASE: 50 MIN

PÉNDULO SIMPLE

Realizaremos el montaje de un péndulo simple en el laboratorio de Física del instituto, para que los alumnos observen su movimiento. Una muestra del montaje se muestra en la siguiente imagen, y al lado de muestra un ejemplo gráfico que podemos dibujar en la pizarra para que los alumnos observen más claramente el esquema del péndulo:



Es fácil observar que sobre el péndulo, actúa la fuerza de la gravedad. La fuerza que no se equilibra que provoca el M.A.S es:

$$F = m g \text{ sen } \theta$$

Para ángulos pequeños, se cumple que para ángulos de desviación pequeños, $F = m g \theta$

Como arco = ángulo · radio,

$$x = \theta \cdot l$$

l es la longitud de la cuerda/hilo que sostiene la esfera metálica del péndulo

$$F = m \cdot g (x/l)$$

DOCUMENTO DE PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDAD DOCENTE

Este es el módulo de la fuerza en un péndulo simple de oscilaciones de ángulo pequeño. El sentido de la fuerza recuperadora es contrario al del desplazamiento del péndulo. Así es más correcto expresarla vectorialmente como

$$F_t = - (m \cdot g / l) x$$

Como m, g y l son constantes, podemos agruparlas en una única constante $k = m \cdot g/l$

Entonces, la expresión de la fuerza quedaría de la siguiente forma:

$$F = -k \cdot x$$

Esta fuerza provoca un movimiento acelerado que, de acuerdo con la ley de Newton,

$$a = \frac{F_t}{m} = \frac{-k}{m} x$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Otras consideraciones sobre el péndulo:

- En el movimiento pendular x es el arco correspondiente al ángulo θ y representa la elongación o desplazamiento en un momento dado. Si la longitud del péndulo es grande, el arco es prácticamente una recta.
- La constante $k = mg/l$ tiene unidades de $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
Así, el periodo de oscilación viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Que sabiendo el valor de k, se puede poner de la siguiente forma:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Como vemos, el periodo del M.A.S de un péndulo no depende de la masa que cuelga sino de la longitud del péndulo y del lugar en el que se encuentre.

MEDIDA DEL PERÍODO DEL PÉNDULO (comprobación experimental)

Para que los alumnos comprueben que todas las ecuaciones que componen el movimiento del péndulo se cumplen, deberán realizar una medida del período (T), con un cronómetro, sabiendo la longitud de la cuerda (l) que se puede medir con un metro, y la aceleración de la gravedad (g).

Por ejemplo, sabiendo que: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$; $l = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$. Substituyéndolo en la última expresión

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Se obtiene un $T = 1.42 \text{ s}$ que tiene que ser muy similar al T medido con el cronómetro, experimentalmente.

DOCUMENTO DE PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDAD DOCENTE

Esta medida se realizará mediante un único montaje que realizará el profesor, para no perder demasiado tiempo.

TERCERA SESIÓN DE CLASE: 50 MIN

MUELLE

Otro ejemplo de M.A.S es el muelle, que sirve para explicar la ley de Hooke. Podemos realizar un montaje similar al del péndulo simple en el laboratorio de Física del instituto, para que los alumnos lo observen, entiendan y estudien su movimiento. El montaje que se realizaría sería el que se muestra en la siguiente figura:



Explicaríamos que al colgar una masa del extremo del muelle éste se estirará hasta una longitud l , el alargamiento, en este sistema que experimenta el muelle es:

$$\Delta l = l - l_0 = \Delta x$$

En esta posición el sistema está en equilibrio. La posición de equilibrio de un muelle en vertical es muy útil para determinar la constante elástica de muelle, siempre que se conozca la masa que se cuelga y el estiramiento del muelle respecto de la posición inicial. La fuerza recuperadora (ley de Hooke) que tiende a llevar el muelle a la posición inicial se iguala con la fuerza peso. Por tanto, podemos igualar los módulos de ambas fuerzas,

$$P = F_e; \quad P = k \Delta l$$

$$m g = k \Delta l$$

Y, despejando k se puede determinar dicha constante elástica:

$$k = mg/\Delta l$$

Al soltar el cuerpo, como la fuerza recuperadora es mayor que el peso, comienza a desplazarse hacia la posición de equilibrio, de forma que inicia un M.A.S. en el que el módulo de la fuerza neta, F , que actúa sobre el cuerpo es,

$$F = F_e - P = k \Delta l + k A - k \Delta l = -k \cdot \Delta x$$

Esta última expresión permite conocer la fuerza máxima al iniciarse el movimiento, y se corresponde con la Ley de Hooke: $F = -k \cdot \Delta x$

Por otro lado, el periodo de vibración de un muelle viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

MEDIDA DEL PERÍODO DEL MUELLE (comprobación experimental)

Para que los alumnos comprueben que todas las ecuaciones que componen el movimiento del muelle se cumplen, deberán realizar una medida del período (T), con un cronómetro, sabiendo la constante elástica del muelle (k), la masa del objeto que esté sujetando dicho muelle (m)

Por ejemplo, sabiendo que: $m = 10 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$; $k = 3.2$. Substituyéndolo en la última expresión de período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Se obtiene un $T = 1.11 \text{ s}$ que tiene que ser muy similar al T medido con el cronómetro, experimentalmente. Como es un tiempo muy pequeño y difícil de medir, podríamos medir, por ejemplo 10 oscilaciones, y dividir el resultado final entre 10, o poner $10T$ en la fórmula y ver que se cumple. Pasa lo mismo en el caso del péndulo mencionado anteriormente

Esta medida se realizará mediante un único montaje que realizará el profesor, para no perder demasiado tiempo.

COMENTARIO: Posteriormente se deberían explicar los conceptos de velocidad y energía para estos dos sistemas, en el M.A.S, pero en tres sesiones de 50 min no tendríamos tiempo suficiente.

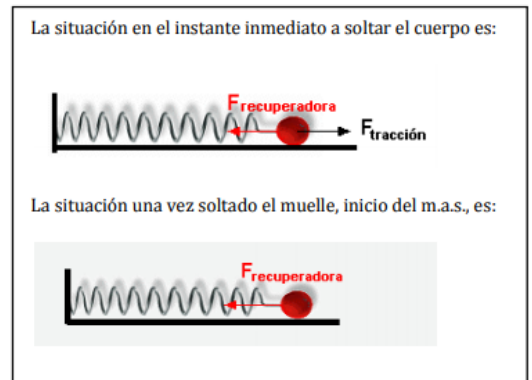
5 ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN Y AMPLIACIÓN

Después de haber explicado los conceptos del M.A.S. y de haber realizado los ejemplos experimentales del muelle y del péndulo, para que los alumnos consoliden los conceptos y que entiendan su significado, comprobando que se cumplen las expresiones, se podría proponer algún problema/ejercicio para comprobar que saben aplicar los conocimientos nuevos.

Como el desarrollo de esta actividad se realiza durante tres sesiones de 50 min, no se dispone de tiempo para la resolución de ejercicios. Por ello, se pedirá que los alumnos los realicen en casa y que los entreguen al profesor en el plazo de 2 días.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Cierta resorte tiene sujeto un cuerpo de 2 kg en su extremo libre y se requiere una fuerza de 8 N para mantenerlo a 20 cm del punto de equilibrio. Si el cuerpo realiza un M.A.S. al soltarlo, halla: a) la constante recuperadora del resorte; b) el periodo de su oscilación y la frecuencia.



2. Una partícula que vibra a lo largo de un segmento de 10 cm de longitud tiene en el instante inicial su máxima velocidad que es de 20 cm/s. Determina las constantes del movimiento (amplitud, fase inicial, pulsación, frecuencia y periodo) y escribe las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración. Calcula la elongación, velocidad y aceleración en el instante $t = 1,75 \pi$ s. ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial? Nota: recuerda que la velocidad es la derivada de la posición, y que, a su vez, la aceleración es la derivada de la velocidad.

6 EVALUACIÓN

Los dos ejercicios propuestos serán evaluables, formando parte del apartado de *Tareas y trabajos* de evaluación. De entre los dos ejercicios, el número 2 valdrá el doble que el número 1 debido a que es más complejo.

Además, en el examen de evaluación del final del trimestre, se pondrá un ejercicio idéntico al número 2 pero variando los valores numéricos del enunciado.

También se valorará positivamente la atención en clase y la actitud participativa a la hora de realizar las diferentes medidas del péndulo y del muelle.

7 BIBLIOGRAFÍA

Las fuentes consultadas para la elaboración de este documento, que se pondrán a total disposición de los alumnos son las siguientes:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm>

https://www.uv.es/jmarques/_private/MAS%20y%20ondas.pdf

<http://fisquiweb.es/Apuntes/apun2BFis.htm>

Introducción al Movimiento Armónico Simple (M.A.S.) - Gomis Hilario, O. (2008). Introducción al Movimiento Armónico Simple (M.A.S.). UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA