

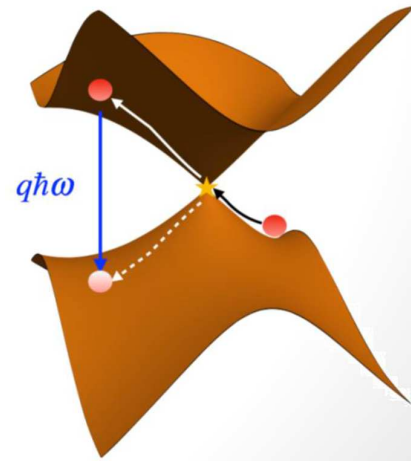


Real  
Sociedad  
Española de  
Física



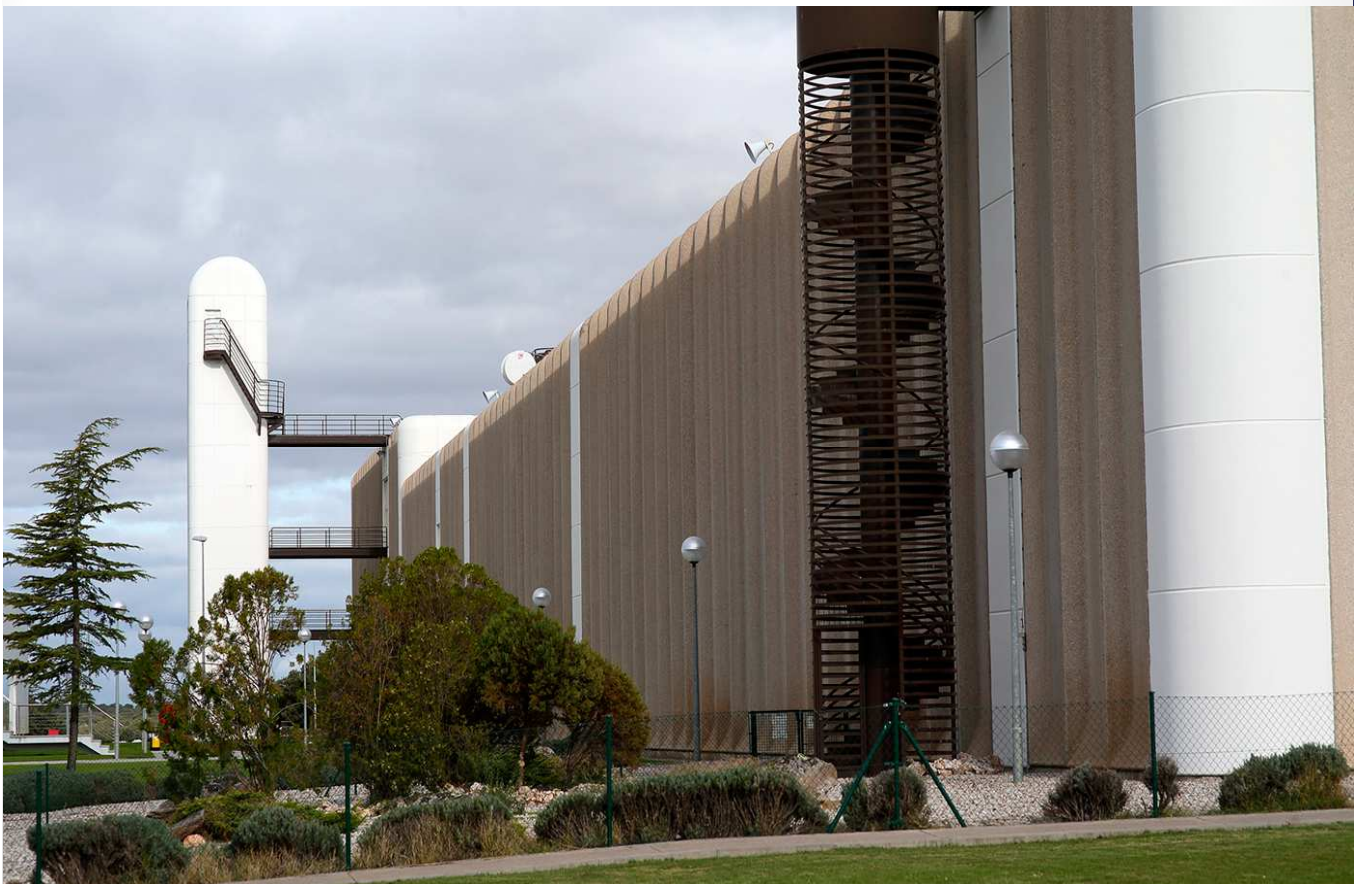
# Óptica no lineal en grafeno

Óscar Zurrón Cifuentes  
Área de Física Aplicada  
Departamento de Física Aplicada  
[ozurronci@usal.es](mailto:ozurronci@usal.es)



1

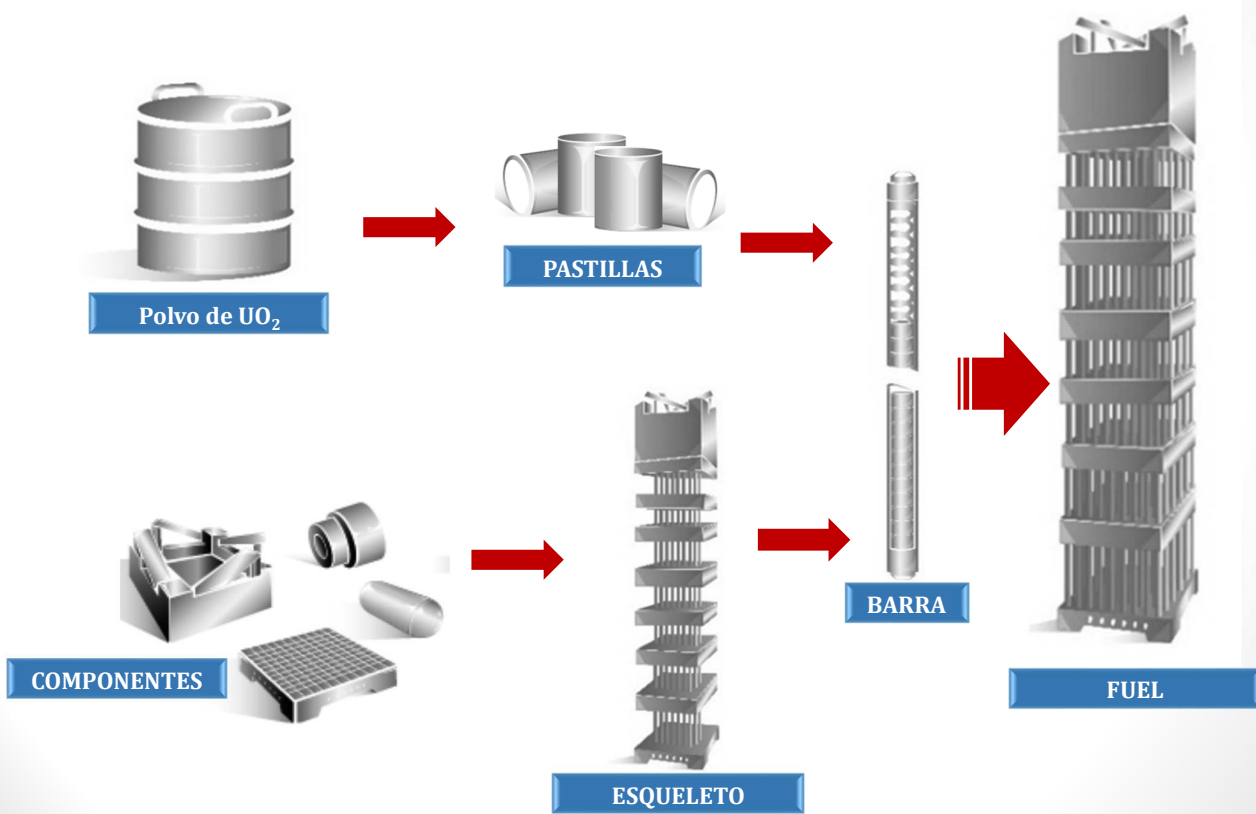
## Fábrica de Juzbado



Fábrica de Juzbado

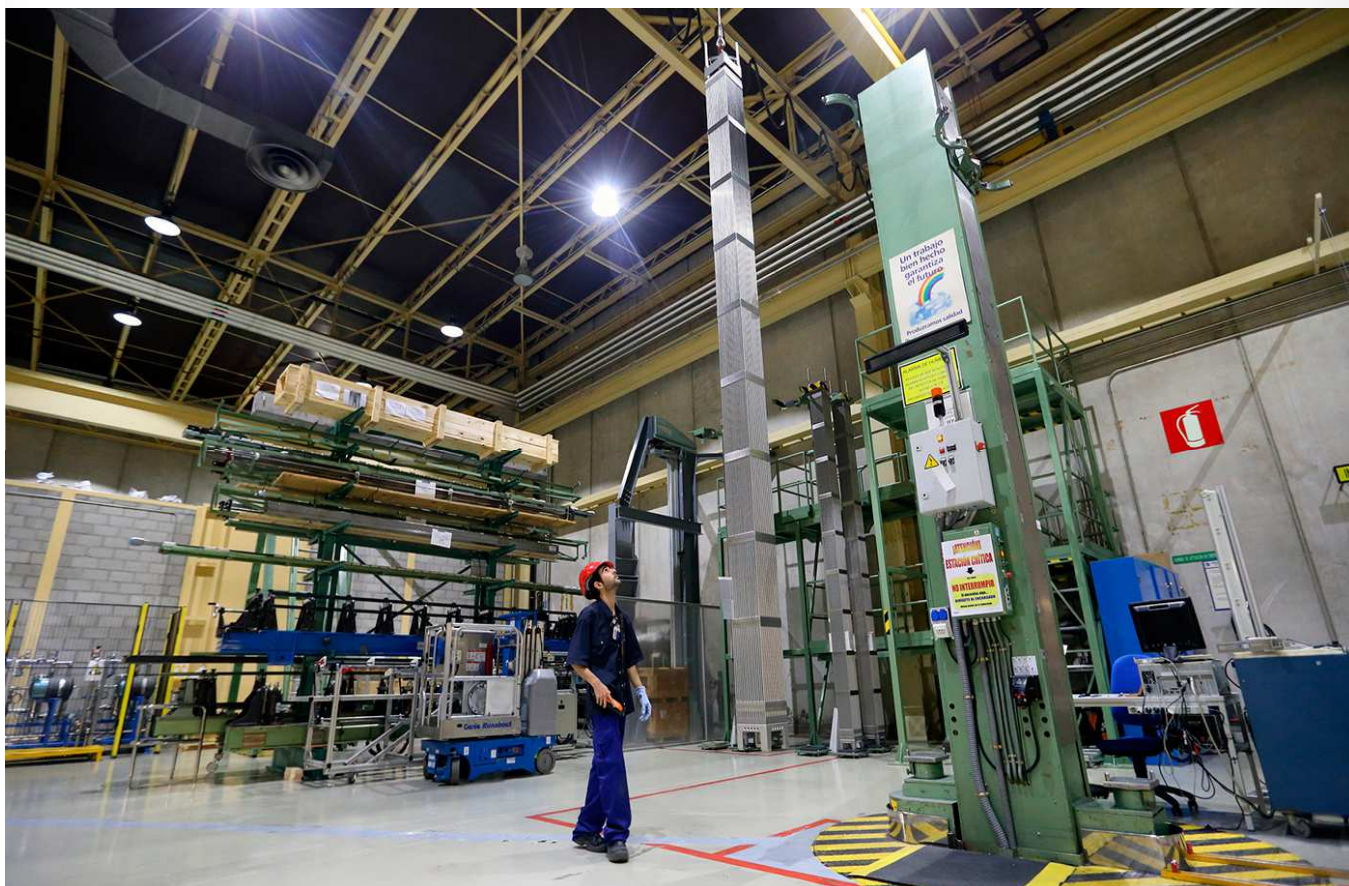
2

# Fábrica de Juzbado



# Fábrica de Juzbado





- Planta de fabricación de Combustible



- Instalación Industrial



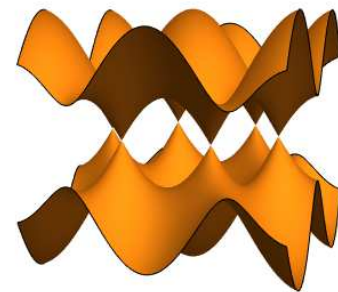
- Procesador de materias y tecnologías de doble uso



- Instalación Nuclear

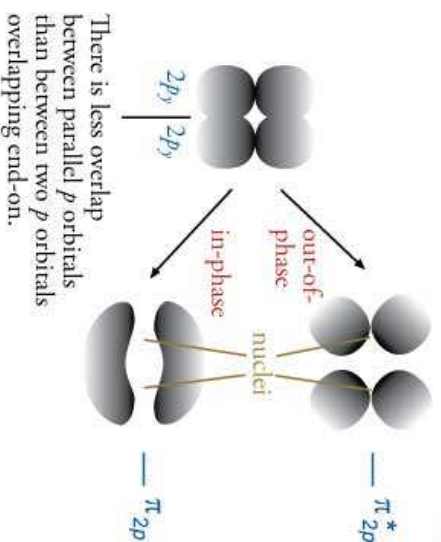
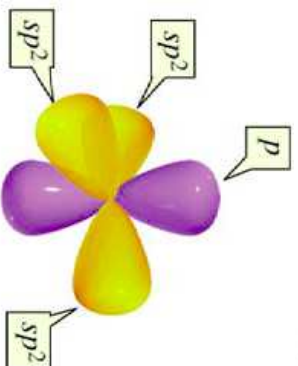
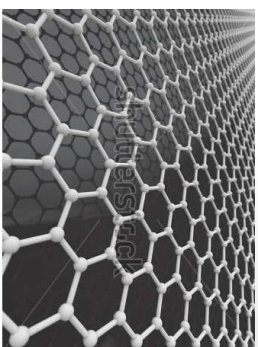
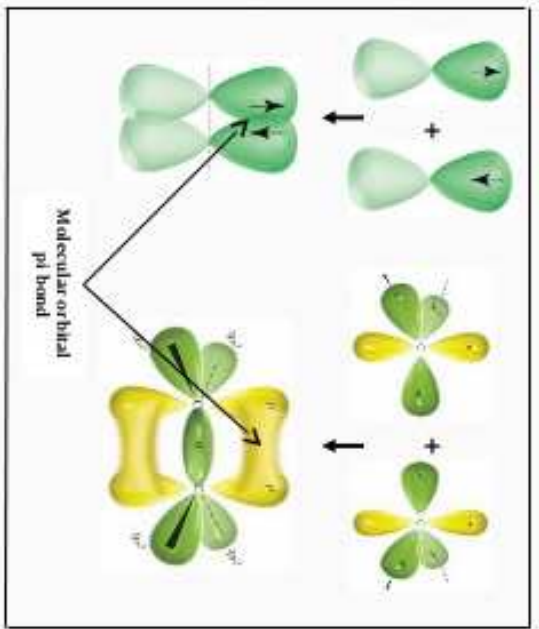
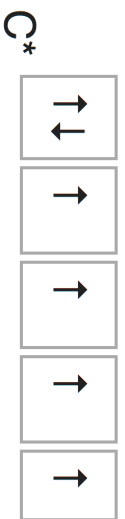


## ¿Por qué el grafeno?

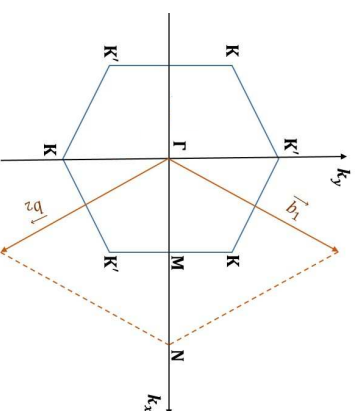
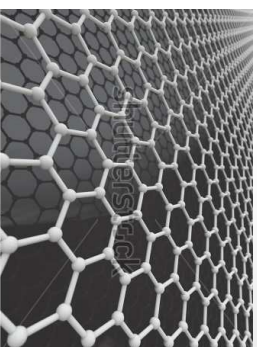
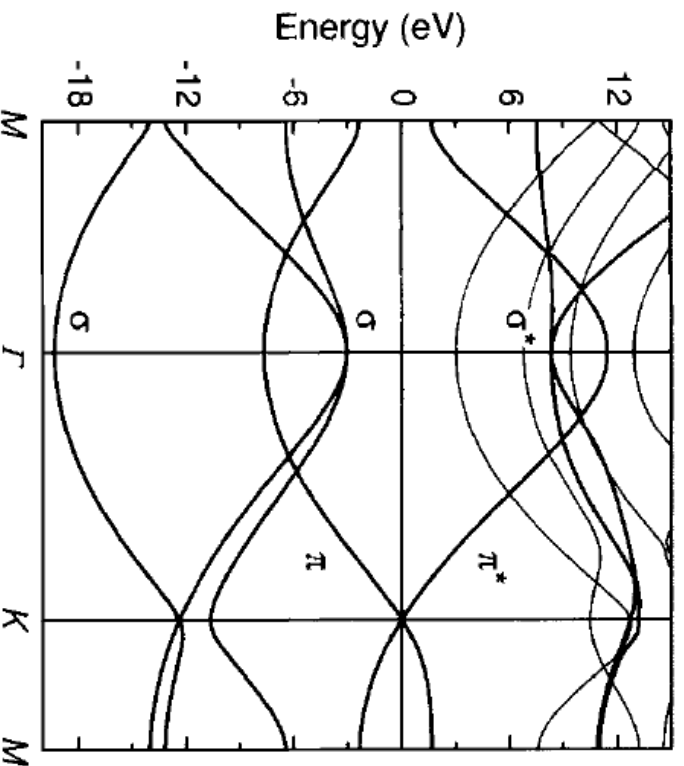


- Posee una estructura de bandas singular que le confiere propiedades no observadas en otros materiales.
- En el entorno de ciertos puntos de la Zona de Brillouin (conocidos como puntos de Dirac), los electrones se comportan como fermiones “sin masa” que se mueven a velocidades del orden de  $c/300$ .
- Es extremadamente duro ( $T_R \simeq 42 \text{ N/m}$ ) y ligero ( $\sigma_m \simeq 0.77 \text{ mg/m}^2$ ). Tiene además una alta conductividad térmica  $\lambda \simeq 5000 \text{ W/m K}$ .
- Presenta una fuerte respuesta óptica, tanto lineal ( $T \simeq 98\% \text{ SLG}$ ), como no lineal.
- En definitiva, se trata de un material con grandes posibilidades de desarrollo tecnológico y que ya se está utilizando en aplicaciones de muy diversa índole: almacenamiento de datos, baterías, materiales de construcción, blindajes ...

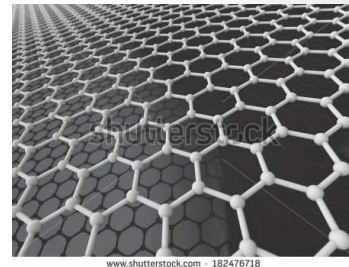
# Estructura electrónica del grafeno



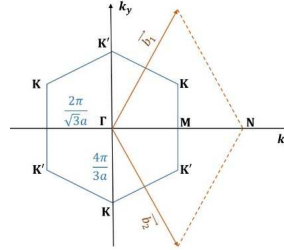
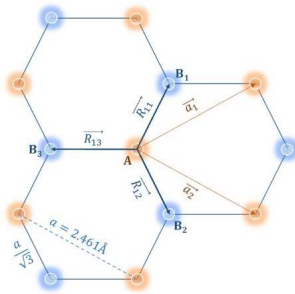
# Bandas de energía



# Bandas en la aproximación *Tight-binding*



La estructura cristalina consta de dos subredes



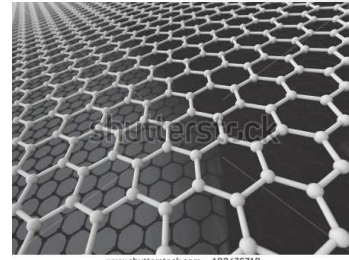
$$|\Psi(\vec{k})\rangle = C_A |\Phi_A(\vec{k})\rangle + C_B |\Phi_B(\vec{k})\rangle$$

La base de vectores de Bloch está formada por

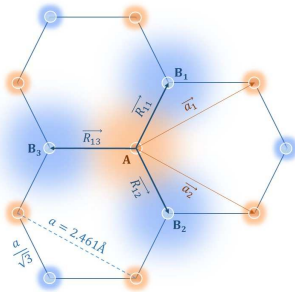
$$|\Phi_A(\vec{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{R}_A} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_A} |\varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_A)\rangle$$

$$|\Phi_B(\vec{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{R}_B} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_B} |\varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_B)\rangle$$

# Bandas en la aproximación *Tight-binding*



En la aproximación *tight-binding* cada átomo sólo interactúa con sus vecinos más próximos



$$\langle \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_{A'}) | \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_A) \rangle = \delta_{AA'}$$

$$\langle \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_{B'}) | \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_B) \rangle = \delta_{BB'}$$

$$\langle \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_A) | \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_B) \rangle = s_0$$

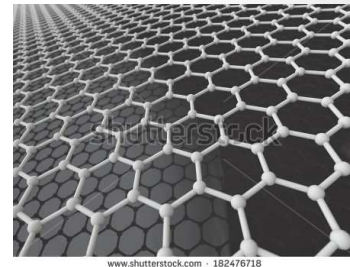
Con lo que la base de Bloch verifica:

$$\langle \Phi_{A'}(\vec{k}') | \Phi_A(\vec{k}) \rangle = \delta_{AA'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad \langle \Phi_{B'}(\vec{k}') | \Phi_B(\vec{k}) \rangle = \delta_{BB'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\langle \Phi_A(\vec{k}') | \Phi_B(\vec{k}) \rangle = s_0 f(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$f(\vec{k}) = |f(\vec{k})| e^{i\varphi_k} = e^{-i \frac{ak_x}{\sqrt{3}}} \left[ 1 + 2e^{i \frac{\sqrt{3}ak_x}{2}} \cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) \right]$$

# Bandas en la aproximación Tight-binding



Calculamos la interacción con la red del grafeno

$$\langle \Phi_{A'}(\vec{k}') | H_0 | \Phi_A(\vec{k}) \rangle = \varepsilon_{2p} \delta_{AA'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad \langle \Phi_{B'}(\vec{k}') | H_0 | \Phi_B(\vec{k}) \rangle = \varepsilon_{2p} \delta_{BB'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\langle \Phi_A(\vec{k}') | H_0 | \Phi_B(\vec{k}) \rangle = \gamma_0 f(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\gamma_0 = \langle \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_A) | H_0 | \varphi_{2p}(\vec{r} - \vec{R}_B) \rangle = 2.97 \text{ eV}$$

Calculamos entonces las bandas de energía

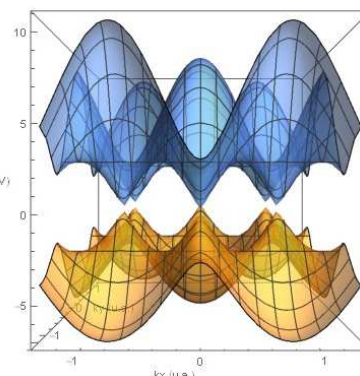
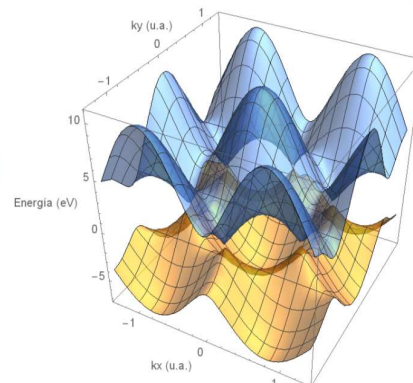
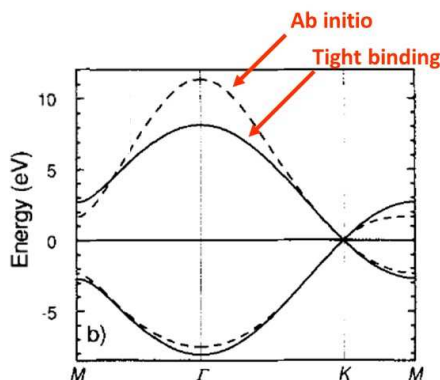
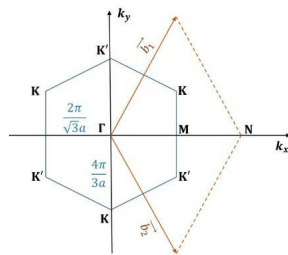
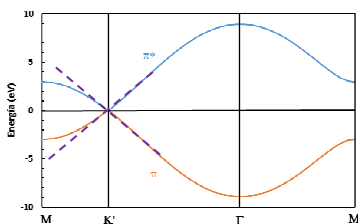
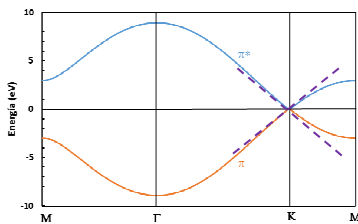
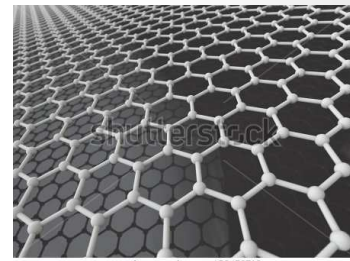
$$H_0 |\Psi(\vec{k})\rangle = \varepsilon(\vec{k}) |\Psi(\vec{k})\rangle \Rightarrow \begin{cases} C_A [\varepsilon_{2p} - \varepsilon(\vec{k})] + C_B [\gamma_0 - \varepsilon(\vec{k}) s_0] f(\vec{k}) = 0 \\ C_A [\gamma_0 - \varepsilon(\vec{k}) s_0] f^*(\vec{k}) + C_B [\varepsilon_{2p} - \varepsilon(\vec{k})] = 0 \end{cases}$$

Que tiene solución no trivial si

$$\varepsilon_{\pm}(\vec{k}) = \frac{\varepsilon_{2p} \pm \gamma_0 |f(\vec{k})|}{1 \pm s_0 |f(\vec{k})|} \xrightarrow{s_0=0; \varepsilon_{2p}=0} \varepsilon_{\pm}(\vec{k}) = \pm \gamma_0 |f(\vec{k})| \quad \text{P. R. Wallace, Phys. Rev. (1947)}$$

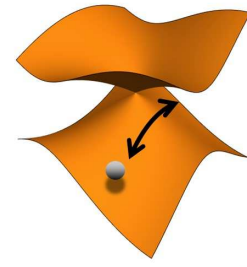
$$|\psi_{\pm}(\vec{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ e^{-i\varphi_k} \end{pmatrix} \quad H_0 = \gamma_0 |f(\vec{k})| \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_k} \\ e^{-i\varphi_k} & 0 \end{pmatrix} \quad H_0 |\psi_{\pm}(\vec{k})\rangle = \varepsilon_{\pm}(\vec{k}) |\psi_{\pm}(\vec{k})\rangle$$

# Bandas en la aproximación Tight-binding



En el entorno de K y K', los electrones se comportan como fermiones sin masa, con una ley de dispersión lineal  $E(k) \cong \hbar V_F k$  ( $V_F \cong c/300$ )

# Interacción del grafeno con campo $\vec{E}(t)$



$$\Psi(\vec{r}, t) = \int [c_+(\vec{k}', t)e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}}\psi_+(\vec{k}') + c_-(\vec{k}', t)e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}}\psi_-(\vec{k}')] d\vec{k}'$$

La interacción con un campo  $\vec{E}(t)$  viene dada por  $V_{int} = -q_e\vec{E} \cdot \vec{r}$ , con lo que la ecuación de Schrödinger queda:

$$i\hbar\partial_t|\Psi(\vec{r}, t)\rangle = [H_0 - q_e\vec{E}(t) \cdot \vec{r}]|\Psi(\vec{r}, t)\rangle$$

Que conduce al sistema de ecuaciones:

$$i\hbar\partial_t c_+(\vec{k}, t) = [\varepsilon_+(\vec{k}) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k})]c_+(\vec{k}, t) - iq\vec{E}(t)\nabla_{\vec{k}}c_+(\vec{k}, t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k})c_-(\vec{k}, t)$$

$$i\hbar\partial_t c_-(\vec{k}, t) = [\varepsilon_-(\vec{k}) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k})]c_-(\vec{k}, t) - iq\vec{E}(t)\nabla_{\vec{k}}c_-(\vec{k}, t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k})c_+(\vec{k}, t)$$

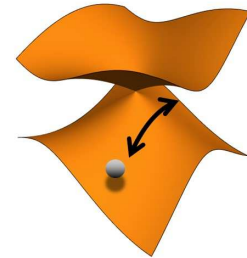
$$\vec{D}(\vec{k}) \equiv \frac{q_e}{2} \frac{\partial \varphi_{\vec{k}}}{\partial \vec{k}}$$

**NO SE COMPORTA** como un sistema a dos niveles:

$$i\hbar\partial_t c_+(\vec{k}, t) = \varepsilon_+(\vec{k})c_+(\vec{k}, t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k})c_-(\vec{k}, t)$$

$$i\hbar\partial_t c_-(\vec{k}, t) = \varepsilon_-(\vec{k})c_-(\vec{k}, t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k})c_+(\vec{k}, t)$$

# Interacción del grafeno con campo $\vec{E}(t)$



Introduciendo (Transformación de Volkov):

$$\vec{k}' \equiv \vec{k} - \vec{k}(t)$$

$$\vec{k}(t) \equiv -\frac{q_e}{\hbar} \int_0^t \vec{E}(\tau) d\tau = \frac{q_e}{\hbar c} \vec{A}(t)$$

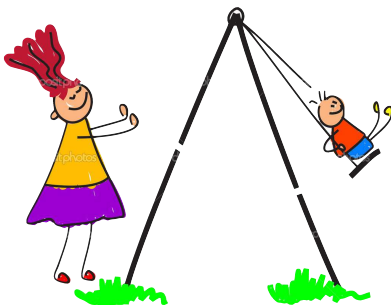
G. Vampa, Phys. Rev. Lett. (2014)

K. L. Ishikawa, Phys. Rev. B (2010)

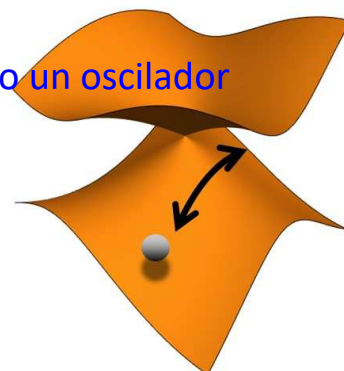
El sistema de ecuaciones se escribe:

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_+(\vec{k}', t) = [\varepsilon_+(\vec{k}') - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}')]c_+(\vec{k}', t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}')c_-(\vec{k}', t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_-(\vec{k}', t) = [\varepsilon_-(\vec{k}') - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}')]c_-(\vec{k}', t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}')c_+(\vec{k}', t)$$

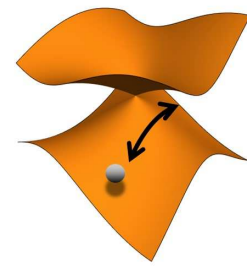


**¡SE COMPORTA** como un oscilador paramétrico!





# Interacción del grafeno con campo $\vec{E}(t)$



Introduciendo (Transformación de Volkov):

$$\vec{k}' \equiv \vec{k} - \vec{k}(t)$$

$$\vec{k}(t) \equiv -\frac{q_e}{\hbar} \int_0^t \vec{E}(\tau) d\tau = \frac{q_e}{\hbar c} \vec{A}(t)$$

G. Vampa, Phys. Rev. Lett. (2014)

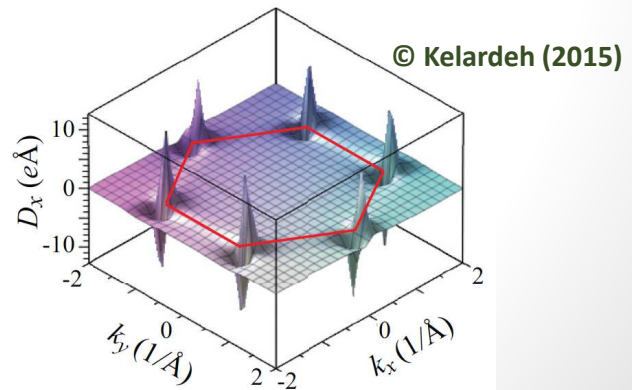
K. L. Ishikawa, Phys. Rev. B (2010)

El sistema de ecuaciones se escribe:

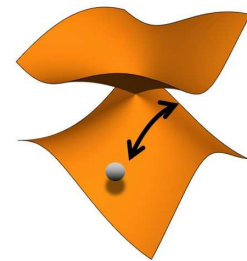
$$i\hbar \frac{d}{dt} c_+(\vec{k}', t) = [\varepsilon_+(\vec{k}') - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}')] c_+(\vec{k}', t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}') c_-(\vec{k}', t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_-(\vec{k}', t) = [\varepsilon_-(\vec{k}') - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}')] c_-(\vec{k}', t) - \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(\vec{k}') c_+(\vec{k}', t)$$

- El elemento de matriz  $\vec{D}(\vec{k}')$  diverge en el entorno de K y K'
- Atravesar los puntos de Dirac introduce un comportamiento altamente no lineal



# Interacción del grafeno con campo $\vec{E}(t)$



La singularidad se elimina del sistema redefiniendo las variables:

$$\tilde{C}^P(\vec{k}', t) = e^{-i\varphi_{k'}} [c_+(\vec{k}', t) + c_-(\vec{k}', t)]$$

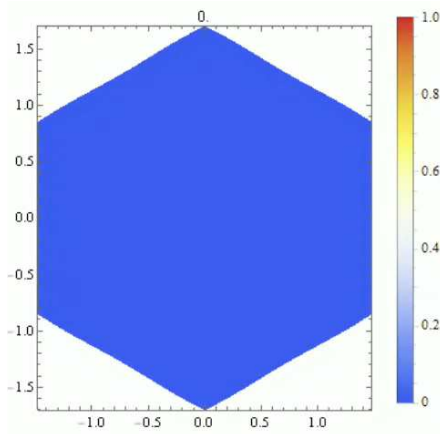
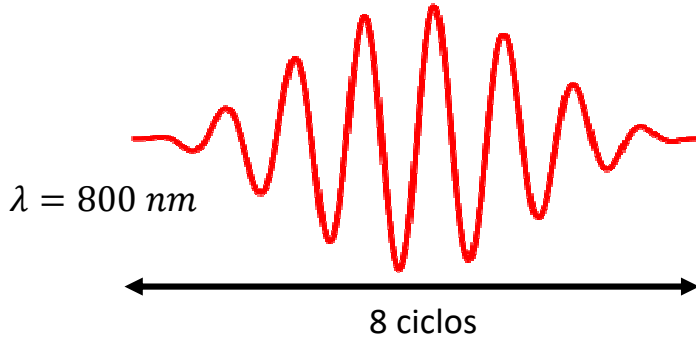
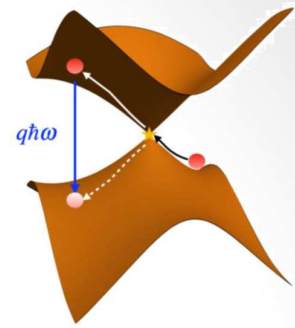
$$C^M(\vec{k}', t) = c_+(\vec{k}', t) - c_-(\vec{k}', t)$$

Lo que conduce a:

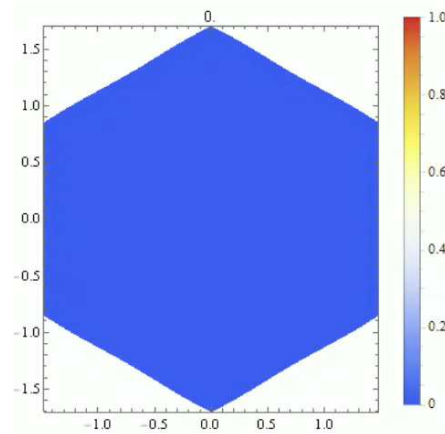
$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{C}^P(\vec{k}', t) = \frac{\varepsilon_+(\vec{k}') + \varepsilon_-(\vec{k}')}{2} \tilde{C}^P(\vec{k}', t) + \frac{\varepsilon_+(\vec{k}') - \varepsilon_-(\vec{k}')}{2} e^{-i\varphi_{k'}} C^M(\vec{k}', t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} C^M(\vec{k}', t) = \frac{\varepsilon_+(\vec{k}') + \varepsilon_-(\vec{k}')}{2} C^M(\vec{k}', t) + \frac{\varepsilon_+(\vec{k}') - \varepsilon_-(\vec{k}')}{2} e^{+i\varphi_{k'}} \tilde{C}^P(\vec{k}', t)$$

# Densidad de ocupación de las bandas



$$I = 2.8 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$$

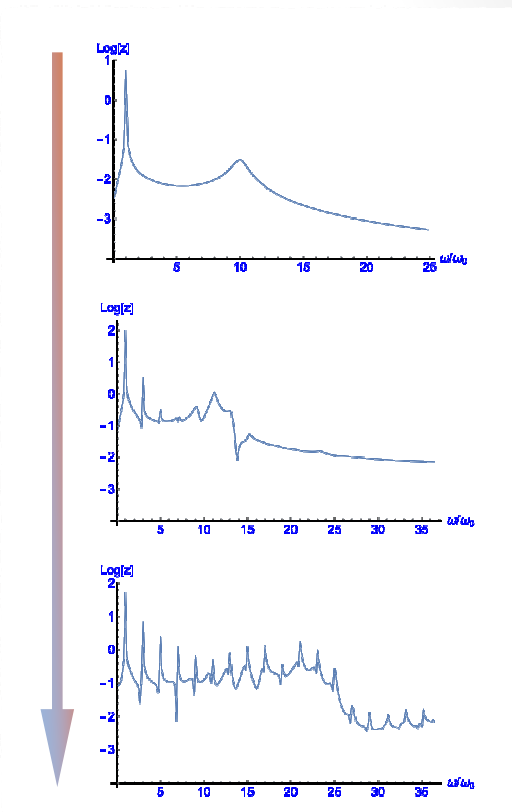


$$I = 1.4 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$$

# Generación de armónicos

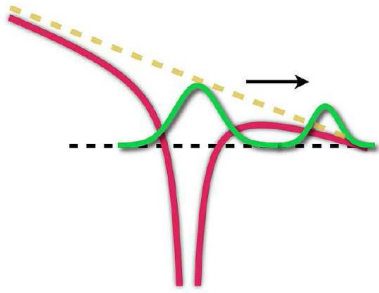
## Oscilador anarmónico (Duffing)

$$m\ddot{z} + m\omega_A^2 z + 2\gamma m\dot{z} + mbz^3 = -eE_0 \cos \omega t$$



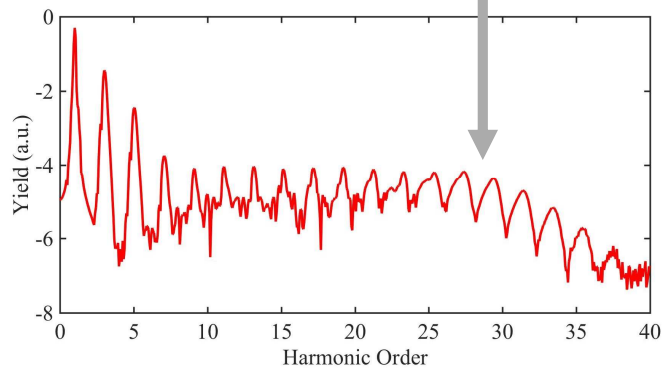
# Generación de armónicos

## Átomos y moléculas



K. J. Schaffer, et al, Phys. Rev. Lett (1993)  
P. B. Corkum, Phys. Rev. Lett (1993)

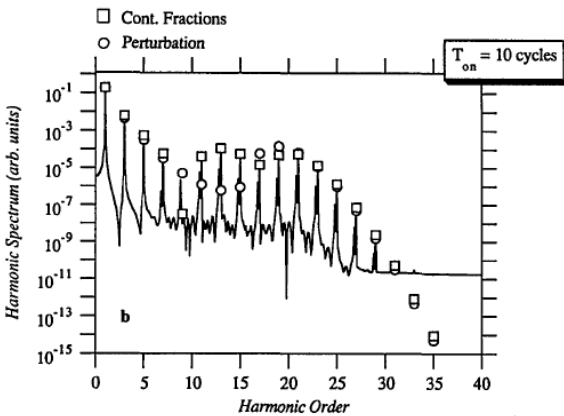
$$\hbar\omega_c \approx I_p + \alpha I \lambda^2$$



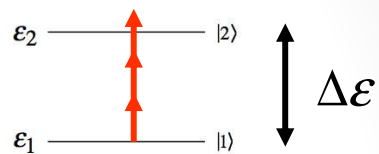
El espectro de frecuencias presenta un plateau bien definido causado por la recolisión de los electrones con los átomos

# Generación de armónicos

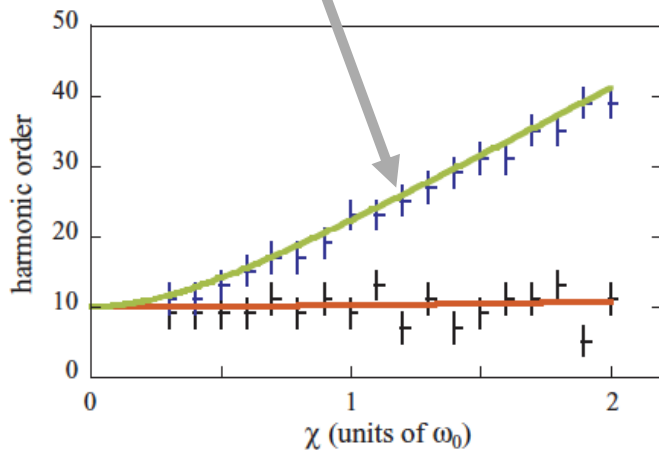
## Sistemas de dos niveles (no resonantes)



L. Plaja, JOSA B (1992)



$$\hbar\omega_c = \sqrt{(\Delta\epsilon/\hbar)^2 + \alpha I} \approx \sqrt{I}$$



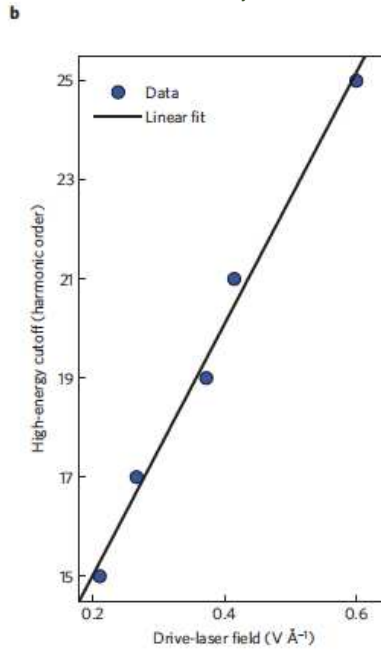
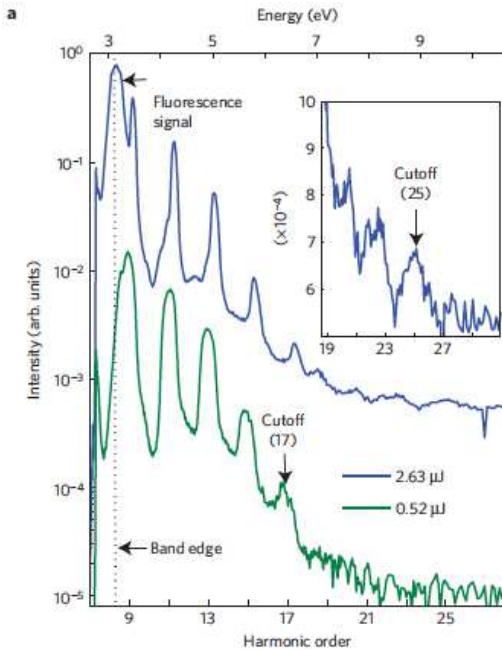
A. Picón, Phys. Rev. A (2010)

El plateau aparece como consecuencia del efecto Stark instantáneo

# Generación de armónicos

## Sólidos cristalinos

S. Ghimire, Nature Physics (2010)



$$\hbar\omega_c \propto \sqrt{I}$$

# Generación de armónicos

La expresión de la radiación total de una carga acelerada no relativista viene dada por la fórmula de Larmor:

$$S(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}$$

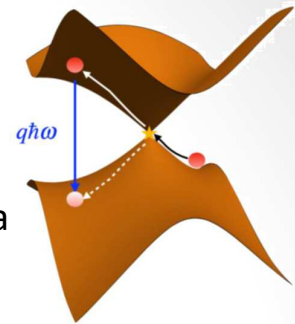
Siendo el dipolo de emisión  $\vec{d}(t) = \langle \Psi(\vec{r}, t) | q_e \vec{r} | \Psi(\vec{r}, t) \rangle$

$$\vec{d}(t) = +\frac{iq_e}{2} \int [\tilde{C}^{P*}(\vec{k}', t) \nabla_{\vec{k}'} \tilde{C}^P(\vec{k}', t) + C^{M*}(\vec{k}', t) \nabla_{\vec{k}'} C^M(\vec{k}', t)]$$

Por lo que el espectro de frecuencias es

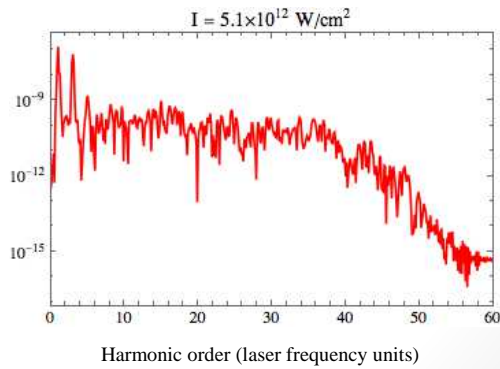
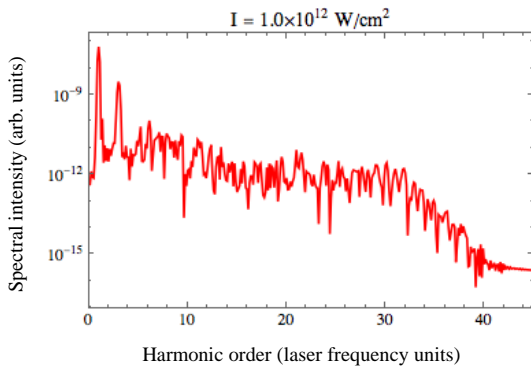
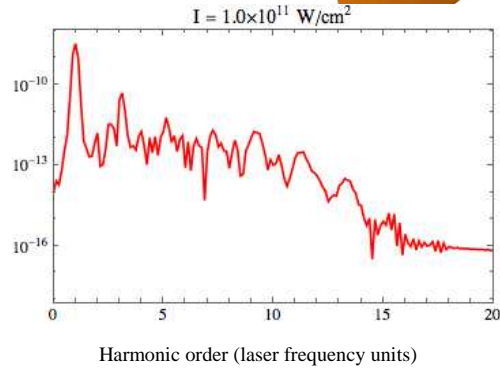
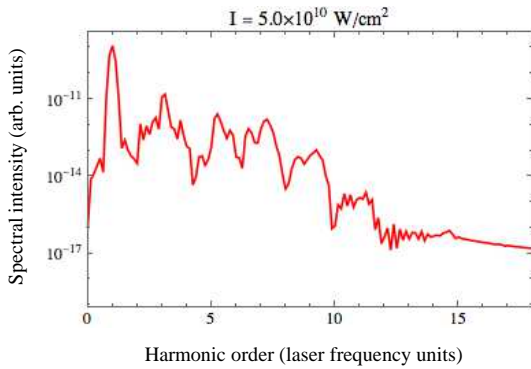
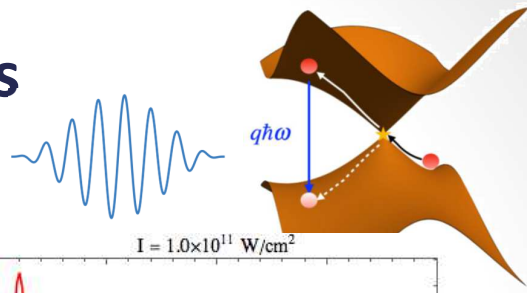
$$S(\omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} |\dot{\mathbf{D}}(\omega)|^2$$

$$\dot{\mathbf{D}}(\omega) \equiv \mathcal{F}[\dot{\mathbf{d}}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{d}}(t) e^{-i\omega t} dt$$



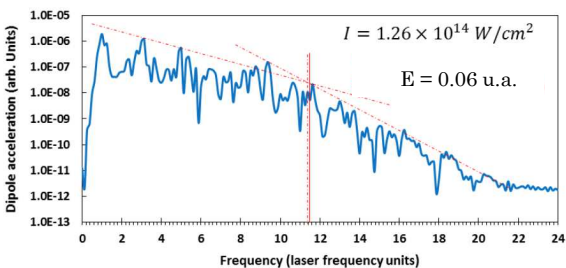
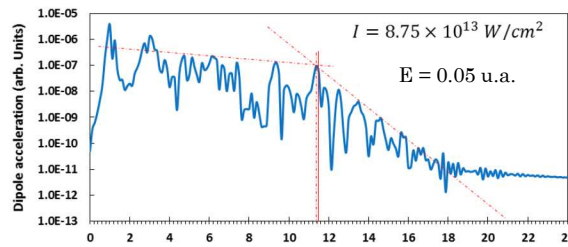
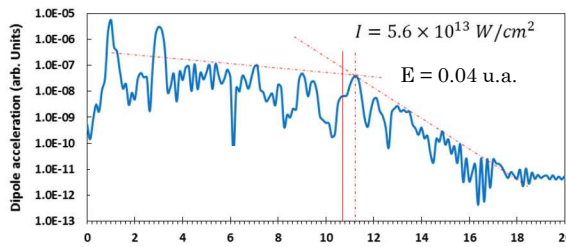
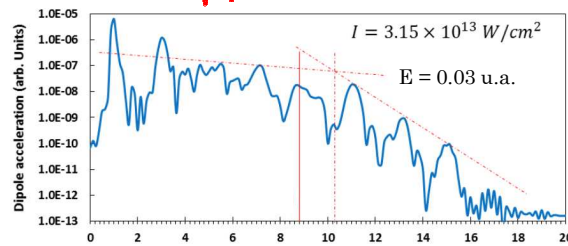
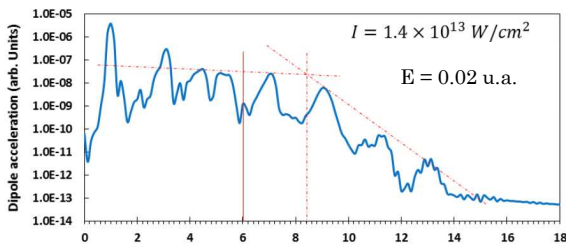
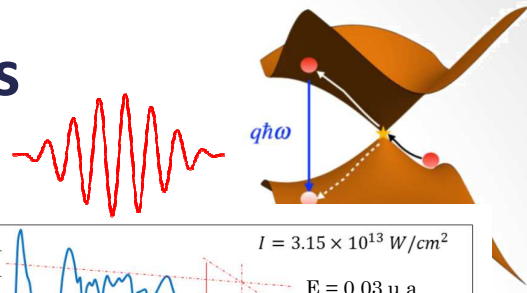
# Generación de armónicos

$\lambda = 3000 \text{ nm}$



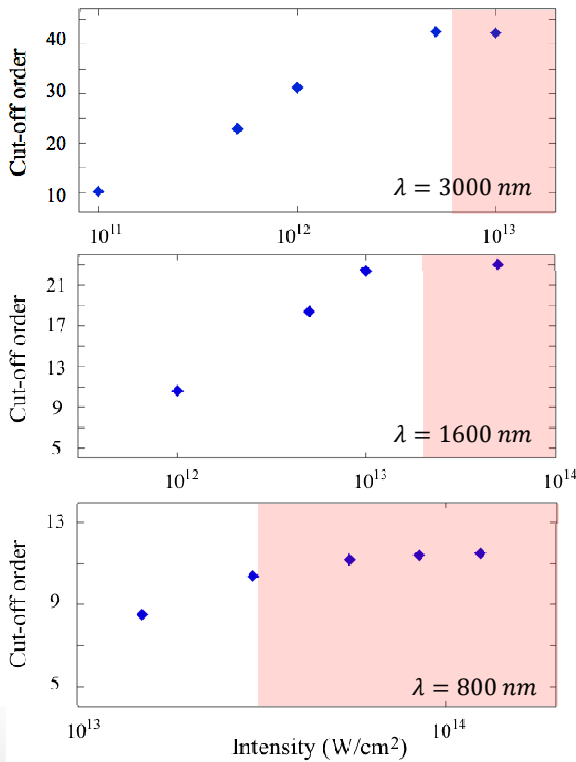
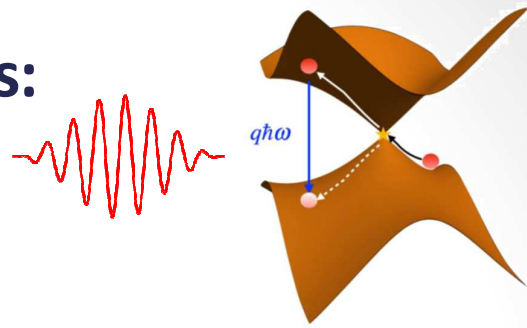
# Generación de armónicos

$\lambda = 800 \text{ nm}$



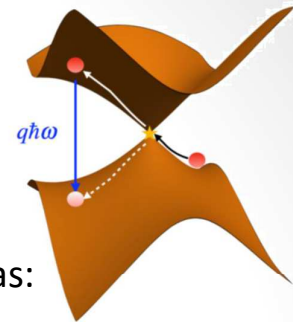
- Emergencia de un plateau espectral conforme aumenta la intensidad
- Saturación de la frecuencia de cut-off

# Generación de armónicos: Escalado del *cut-off*



- A diferencia de otros sistemas físicos, el escalado del cut-off con la intensidad no se describe mediante una ley sencilla
- Teniendo en cuenta los umbrales de daño al material (área coloreada), la producción de armónicos con pulsos cortos es más favorable en el régimen IR-medio

# Mecanismo de excitación



Partiendo de la forma integral de las ecuaciones dinámicas:

$$C_+(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = e^{\frac{i}{\hbar}S_+(\mathbf{k}, t, 0)} C_+(\mathbf{k}, 0) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{\frac{i}{\hbar}S_+(\mathbf{k}, t, \tau)} F(\tau) D_y(\boldsymbol{\kappa}_\tau) C_-(\boldsymbol{\kappa}_\tau, \tau) d\tau$$

$$C_-(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = e^{\frac{i}{\hbar}S_-(\mathbf{k}, t, 0)} C_-(\mathbf{k}, 0) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{\frac{i}{\hbar}S_-(\mathbf{k}, t, \tau)} F(\tau) D_y(\boldsymbol{\kappa}_\tau) C_+(\boldsymbol{\kappa}_\tau, \tau) d\tau$$

$$S_\pm(\mathbf{k}, t, t_0) = - \int_{t_0}^t [E_\pm(\boldsymbol{\kappa}_\tau) - F(\tau) D_y(\boldsymbol{\kappa}_\tau)] d\tau$$

Recordemos que  $D_y(\boldsymbol{\kappa}_t)$  diverge en el entorno del punto de Dirac  $\mathbf{k}_D$ , por lo que podemos representarlo como  $D_y(\boldsymbol{\kappa}_t) = D_0 \delta(\boldsymbol{\kappa}_t - \mathbf{k}_D)$ .

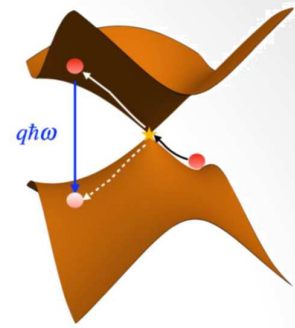
Considerando la dinámica de un electrón que inicialmente se encuentra en el punto  $\mathbf{k}$  de la banda de valencia y sigue la trayectoria  $\boldsymbol{\kappa}_t = \mathbf{k} - q_e \mathbf{A}(t) / \hbar c$ :

$$C_+(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = \frac{iD_0}{q_e} e^{\frac{i}{\hbar}S_+(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k})} C_-(\mathbf{k}_D, t_D, \mathbf{k})$$

$$C_-(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = e^{\frac{i}{\hbar}S_-(\mathbf{k}, t, 0)}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{t_D, \mathbf{k}} = \mathbf{k}_D$$

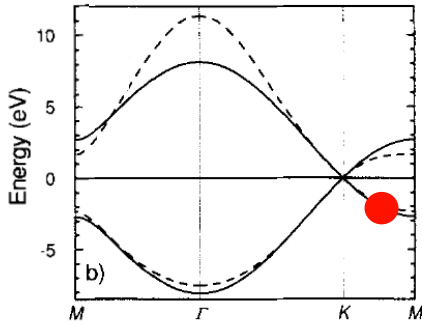
# Mecanismo de excitación



$$C_+(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = \frac{i\mathcal{D}_0}{q_e} e^{\frac{i}{\hbar} S_+(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k})} C_-(\mathbf{k}_D, t_D, \mathbf{k})$$

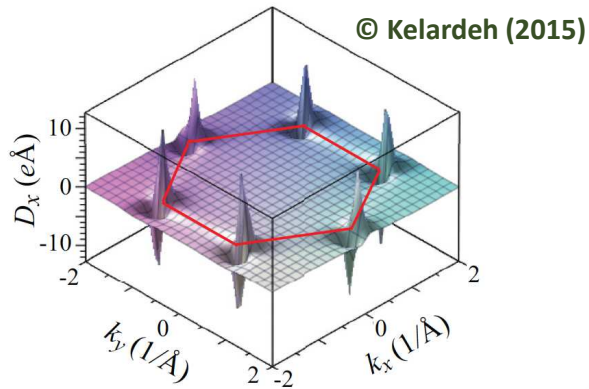
$$C_-(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S_-(\mathbf{k}, t, 0)}$$

$$D_y(\boldsymbol{\kappa}_t) = \mathcal{D}_0 \delta(\boldsymbol{\kappa}_t - \mathbf{k}_D)$$

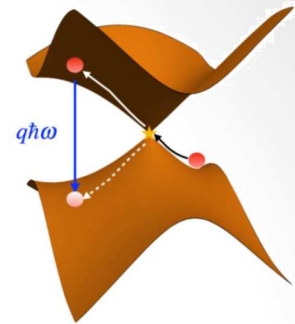


$$t_0 = 0$$

$$\boldsymbol{\kappa}_0 = \mathbf{k}$$



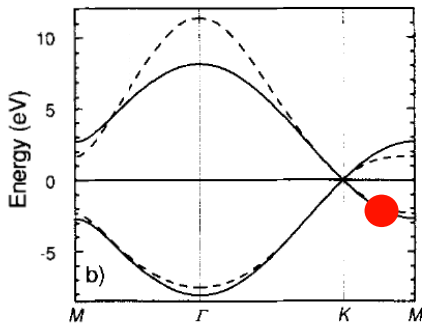
# Mecanismo de excitación



$$C_+(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = \frac{i\mathcal{D}_0}{q_e} e^{\frac{i}{\hbar} S_+(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k})} C_-(\mathbf{k}_D, t_D, \mathbf{k})$$

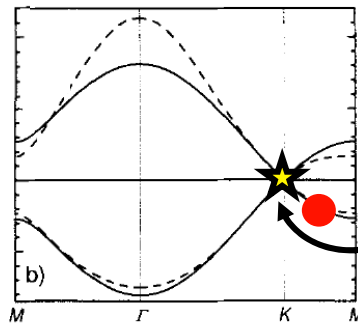
$$C_-(\boldsymbol{\kappa}_t, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S_-(\mathbf{k}, t, 0)}$$

$$D_y(\boldsymbol{\kappa}_t) = \mathcal{D}_0 \delta(\boldsymbol{\kappa}_t - \mathbf{k}_D)$$



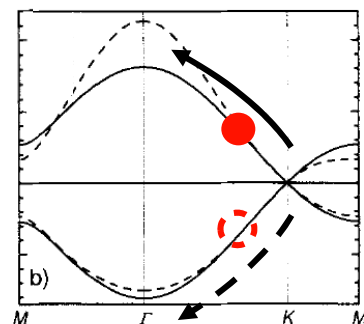
$$t_0 = 0$$

$$\boldsymbol{\kappa}_0 = \mathbf{k}$$



$$t = t_{D, \mathbf{k}}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{t_D, \mathbf{k}} = \mathbf{k}_D$$



$$t \geq t_{D, \mathbf{k}}$$

Electrón en banda de conducción  
y hueco en banda de valencia

# Mecanismo de generación de armónicos

En este formalismo, la amplitud compleja del dipolo interbanda se escribe:

$$\tilde{d}_{y,\uparrow}(\mathbf{\kappa}_t, t) = \frac{iD_0}{q_e} e^{\frac{i}{\hbar} S_g(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k})} D_y(\mathbf{\kappa}_t)$$

siendo  $S_g(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k}) = - \int_{t_D, \mathbf{k}}^t [E_+(\mathbf{\kappa}_\tau) - E_-(\mathbf{\kappa}_\tau)] d\tau$

Con lo que la amplitud del armónico  $q$ -ésimo es:

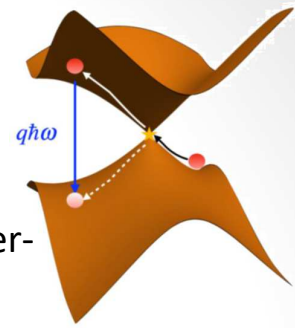
$$\tilde{d}_{y,\uparrow}(q\omega_0) = i \frac{D_0}{q_e} \int_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} [S_g(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k}) + q\hbar\omega_0 t]} D_y(\mathbf{\kappa}_t) d\mathbf{k} dt$$

La contribución principal de  $\tilde{d}_{y,\uparrow}(q\omega_0)$  proviene de los puntos estacionarios de la fase del integrando (*saddle point approximation method*)

$$\frac{\partial}{\partial t} [S_g(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k}) + q\hbar\omega_0 t] = 0 \rightarrow E_+(\mathbf{\kappa}_t) - E_-(\mathbf{\kappa}_t) = q\hbar\omega_0$$

$$\nabla_{\mathbf{k}} S_g(\mathbf{k}, t, t_D, \mathbf{k}) = 0 \rightarrow \int_{t_D, \mathbf{k}}^t \mathbf{v}_+(\mathbf{\kappa}_\tau) d\tau = \int_{t_D, \mathbf{k}}^t \mathbf{v}_-(\mathbf{\kappa}_\tau) d\tau$$

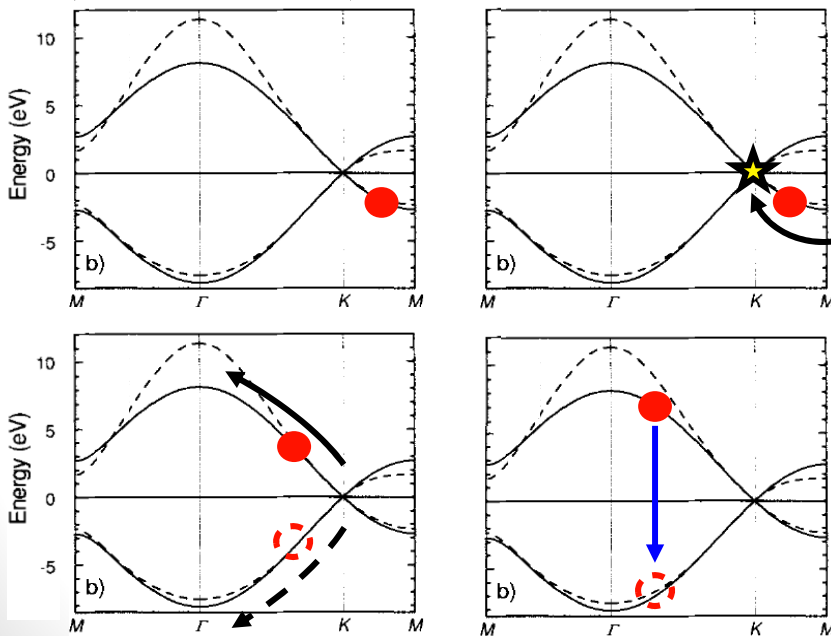
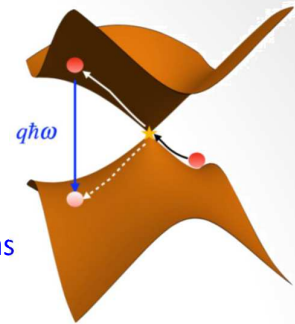
$$\mathbf{v}_{\pm}(\mathbf{\kappa}_t) = (1/\hbar) \nabla_{\mathbf{k}} E_{\pm}(\mathbf{\kappa}_t)$$



# Mecanismo de generación de armónicos

$E_+(\mathbf{\kappa}_t) - E_-(\mathbf{\kappa}_t) = q\hbar\omega_0$  Fotón resonante con el gap entre bandas

$\int_{t_D, \mathbf{k}}^t \mathbf{v}_+(\mathbf{\kappa}_\tau) d\tau = \int_{t_D, \mathbf{k}}^t \mathbf{v}_-(\mathbf{\kappa}_\tau) d\tau$  Electrón y hueco coinciden en la misma posición

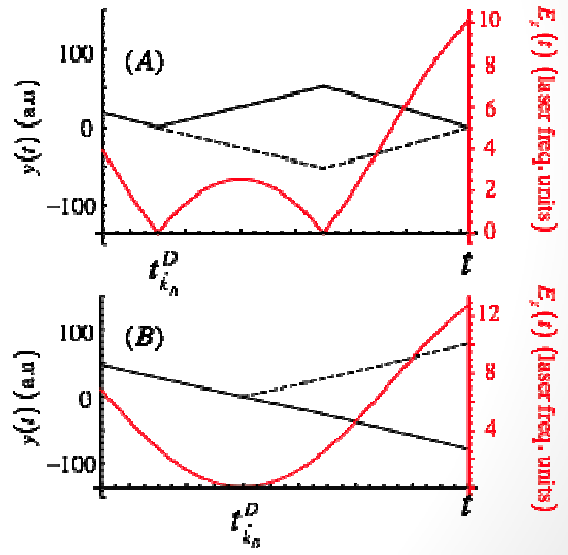
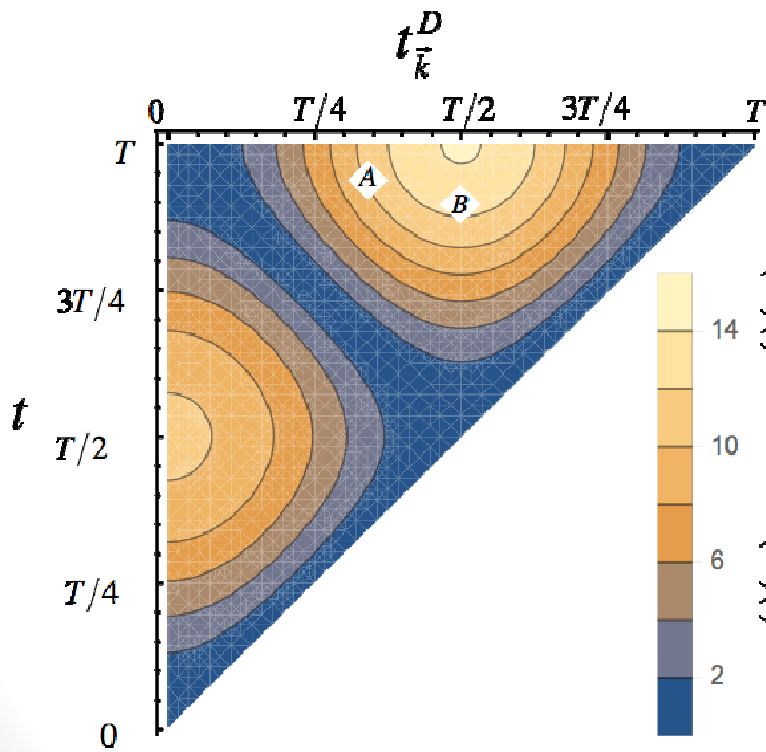
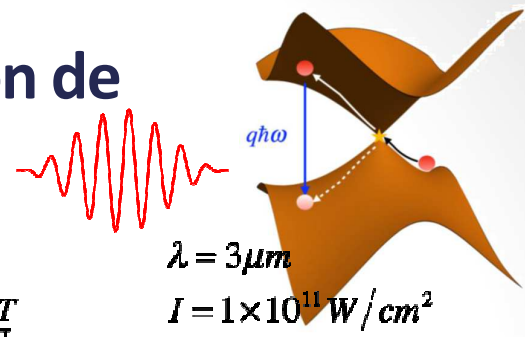


En todos los casos la saturación del cut-off corresponde con fotones de  $\sim 17.8$  eV (i.e. máximo gap entre bandas, Punto  $\Gamma$  de la ZB)

El electrón se recombina con el hueco y emite un fotón resonante

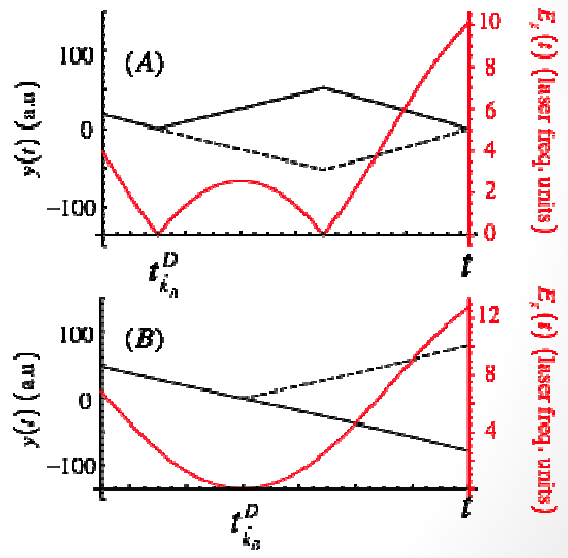
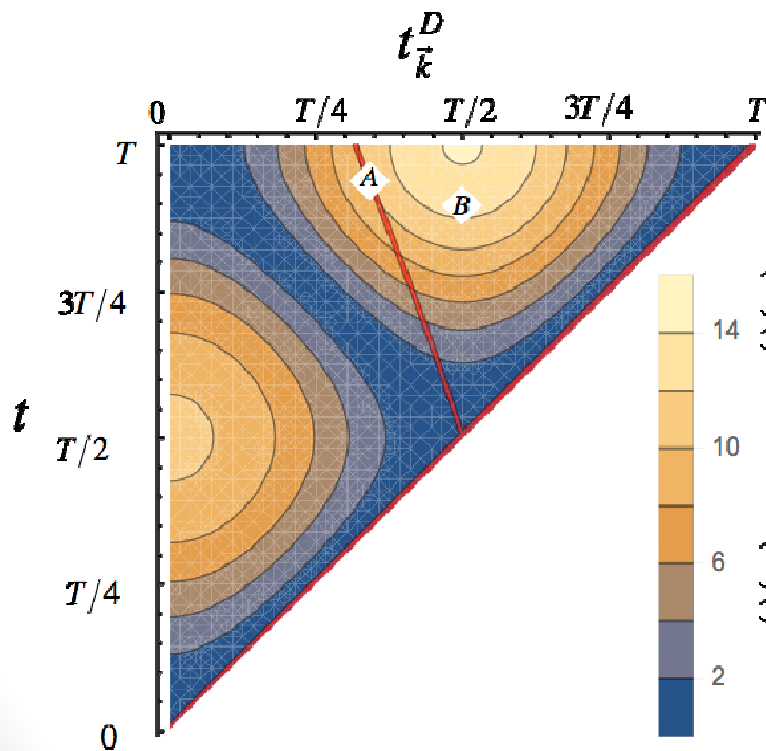
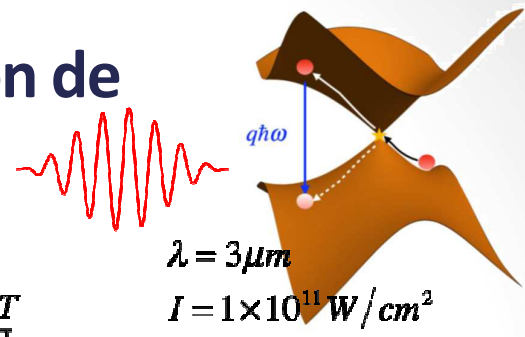


# Mecanismo de generación de armónicos



El par electrón hueco se crea en el instante  $t_{\bar{k}}^D$

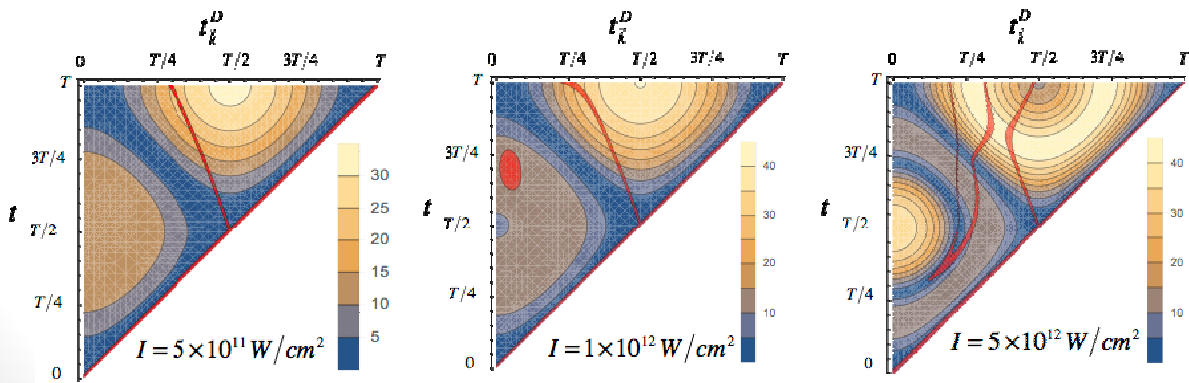
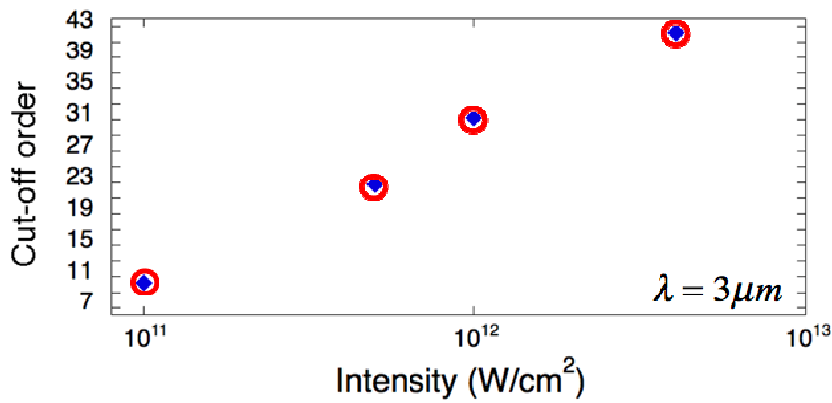
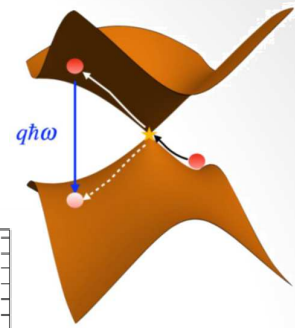
# Mecanismo de generación de armónicos



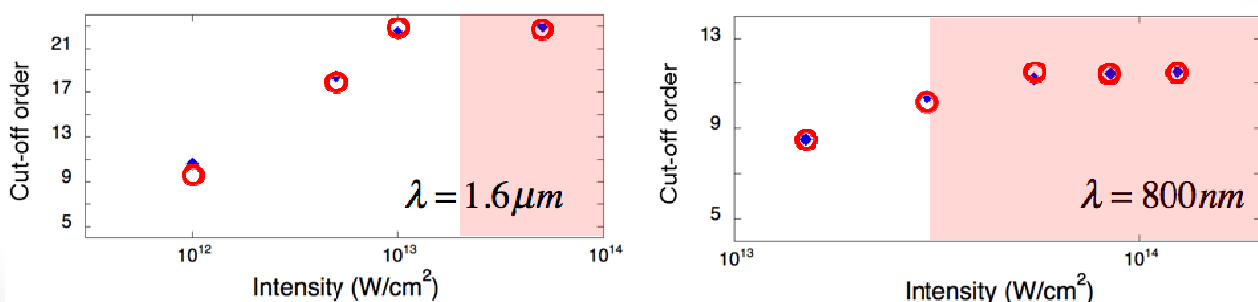
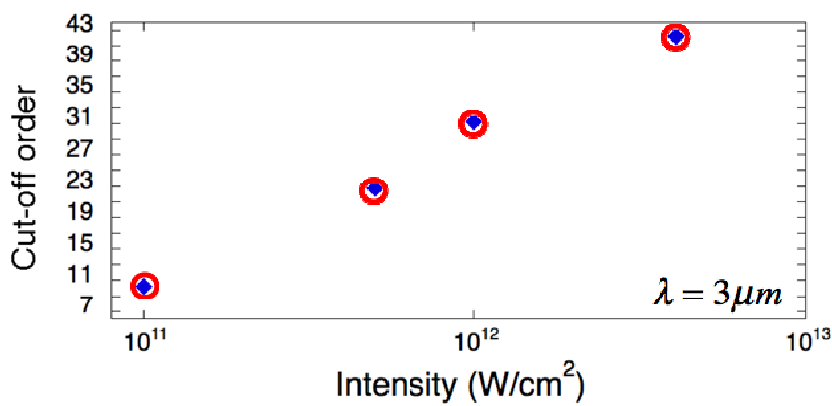
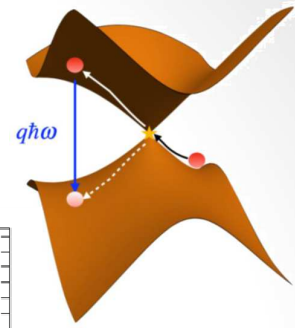
El par electrón hueco se crea en el instante  $t_{\bar{k}}^D$

— El par electrón-hueco se recombina en el instante  $t$

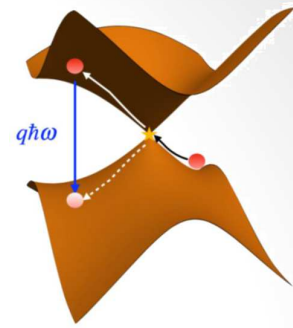
# Mecanismo de generación de armónicos



# Mecanismo de generación de armónicos



# Conclusiones



1. La nueva forma de las ecuaciones dinámicas permite soslayar el problema de las singularidades en los puntos de Dirac.
2. A diferencia de otros sistemas, el primer paso de la generación de armónicos no está conectado con el efecto túnel, sino con la excitación resonante a través de los puntos de Dirac.
3. A diferencia de otros sistemas, la frecuencia de cut-off satura con la intensidad de la radiación incidente. Ello indica que el mecanismo de generación de armónicos es también diferente: (1) excitación resonante, (2) oscilación en la banda de conducción (electrón) y valencia (hueco), y (3) recombinación del electrón y el hueco cuando sus trayectorias coinciden.