M.A.S

Movimiento armónico simple.

Contexto de la actividad

Esta planificación está diseñada para un curso de 2º de bachillerato y se desarrollará en el aula habitual. Es conveniente que el alumnado haya adquirido previamente ciertos conocimientos para poder activar recursos que faciliten el aprendizaje. A continuación, se pautan el aprendizaje previo necesario:

- Método científico (3º ESO, 4º ESO, 1º Bachillerato)
- Leyes de Newton. (3ºESO, 4ºESO y 1 Bachillerato)
- Ley de Hooke. (1º Bachillerato)
- Cinemática: velocidad y aceleración (1ºBachilllerato)
- Movimiento circular (4ºESO, 1ºBachillerato)
- Representaciones gráficas y líneas de tendencias. Ajustes lineales. (4º ESO y 1º Bachillerato)
- Error en la medida. (4ºESO, 1º Bachillerato, 2º Bachillerato)
- Técnicas de derivación (1º Bachillerato)
- Funciones trigonométricas (1º Bachillerato)
- Conceptos previos de M.A.S. (1ºBachillerato)
- Trigonometría (3ºESO, 4ºESO, 1º Bachillerato)
- Análisis dimensional (1º Bachillerato)

La actividad docente se realizará en dos sesiones de 50 minutos, el profesor intentará que la clase tenga lugar una vez repasadas las derivadas en la asignatura de matemáticas, cooperación entre departamentos.

Se aplicarán los conocimientos de movimiento oscilatorio en el tema de vibraciones y ondas, además el alumnado que tome una vía académica técnica universitaria volverá a revisar en cursos posteriores los conceptos adquiridos para ampliar conocimientos.

Objetivos

Los objetivos generales de la actividad son la adquisición y refuerzo de conceptos como:

- Periodo (T): Tiempo que tarda un cumplirse una oscilación completa, s.
- Frecuencia (f): número de veces que se repite una oscilación en un segundo, s^{-1} o Hz.

- Frecuencia angular (ω): número de periodos comprendidos en 2π segundos, rad/s.

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = 2\cdot\pi\cdot f$$

Además de identificar el M.A.S como periódico, oscilatorio y vibratorio.

Deducir las expresiones matemáticas que relacionan las magnitudes que intervienen en el fenómeno.

Familiarizar al alumnado con el trabajo experimental, el planteamiento de hipótesis y su comprobación.

Recopilar datos mediante experimentación/descubrimiento para analizar los resultados gracias al análisis de gráficos e interpretar su significado.

El alumnado deberá aprender a relacionar y buscar analogías matemáticas además de comprobar a través de dos maneras o formas (comparación resultados obtenidos del péndulo simple y el muelle).

El objetivo final es dotar de herramientas suficientes para la resolución de problemas academicistas además de identificar en la vida cotidiana algún ejemplo relacionado con lo impartido siendo capaz de reconocer las magnitudes que intervienen y porqué.

Herramientas y material necesario

Del profesor:

- Pizarra y tiza
- Péndulo simple
- Muelle
- Distintos pesos
- Cronómetro
- Rollo de papel, hilo, botella con arena (utensilios para resolución visual ecuación diferencial)

Del alumnado:

- Cuaderno y bolígrafo

Descripción del desarrollo

El principio metodológico que se empleará es el método científico, revisión experimental y analítica para afianzar las demostraciones realizadas, asumiendo ciertas hipótesis y aproximaciones matemáticas. Visualizar y/o medir serán otras metodologías aplicadas como elemento nuclear en la actividad planteada pues facilita el aprendizaje significativo y consolida conocimientos nuevos por asociación de aquellos obtenidos en momentos anteriores.

Actividades de introducción y conexión con conocimientos previos.

Se recuerda la definición de Movimiento armónico simple, así como las magnitudes más características que intervienen en él.

Se repasa el concepto teórico de periodo, frecuencia y periodo angular para facilitar la interpretación y asimilación a lo largo de las dos sesiones.

A continuación, se plantea a los alumnos que pongan ejemplos de movimientos que crean cumplen las condiciones de M.A.S, periódicos y alrededor de un punto de equilibrio. En la planificación se muestra alguna de las opciones de respuesta correcta:

- Movimiento de un péndulo.
- Las manillas de un reloj.
- Un columpio.
- Un amortiguador o muelle.
- Movimiento de un yoyó.
- Una cuerda tensa.
- Desplazamiento de los planetas alrededor del Sol.

Introducción a los conceptos nuevos, aplicación método científico:

Observación/Experimentación/Medidas versus Descripción analítica formal.

Desde el punto de vista metodológico podemos comenzar trabajando con el péndulo simple. El aforo son alumnos de último curso que a lo largo de su etapa formativa han empleado con anterioridad un péndulo en otros laboratorios. No es necesario aclarar su funcionamiento.

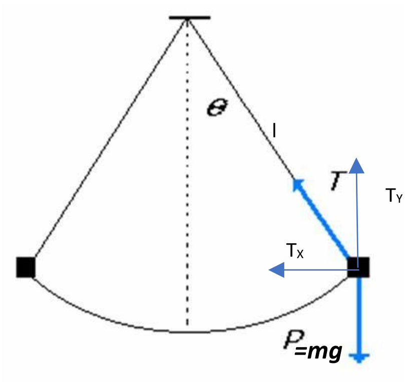


Ilustración 1 Péndulo simple

Inicialmente sería interesante realizar un ***análisis dimensional***, para conocer la dependencia del periodo y potenciar el razonamiento para posteriormente verificar mediante experimentación las magnitudes implicadas en la modificación del periodo en el péndulo simple.

Planteamos de inicio que el ¿T =f(m,l,g…)? y mediante el análisis dimensional operamos hasta concluir con la ecuación de proporcionalidad.

$$[T] = [m]^{\alpha}[l]^{\beta}[g]^{\gamma}$$

$$[s] = [kg]^{\alpha}[m]^{\beta}[m * s^{-2}]^{\gamma}$$

$$\begin{cases} 1 = -2\gamma \\ 0 = \beta - 2\gamma \\ 0 = \alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$T\alpha\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Por lo tanto, el periodo en el péndulo es función de la longitud y la gravedad, no de la masa.

Se realizan diversos experimentos variando diferentes magnitudes y midiendo el tiempo que tarda en realizar el movimiento para comparar los resultados aplicando métodos cualitativos.

Al igual que anteriormente decimos que T =f(m,l,g…) y a partir de estas dependencias vamos a comprobar gracias al ***descubrimiento por observación*** si es real que el periodo es función de las magnitudes consideradas.

Al poner diferentes lastres en el péndulo observamos que el tiempo se mantiene prácticamente constante. Se puede introducir aquí la idea de los errores en las medidas y la necesidad de minimizarlos cronometrando por ejemplo 10 periodos en vez de 1 solo, empleando el instrumento de medida siempre el mismo individuo o comenzar a contar los periodos después del primero para evitar acumular mayor error. Se concluirá que el periodo no depende de la masa colgante.

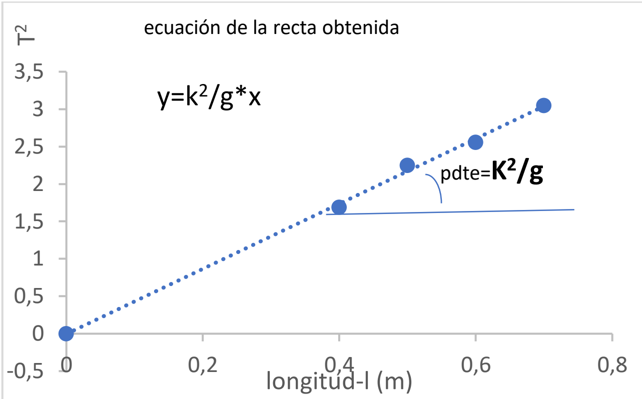
T =f(~~m~~,l,g…)

A continuación, hacemos una demostración de la variación o no del periodo al modificar la longitud del hilo o cable, en este caso sí existe dependencia. Registramos en una tabla la longitud y el tiempo que tarda el péndulo en realizar 10 periodos.

En este momento podemos verificar que $T\alpha\sqrt{\frac{l}{g}}$ y por lo tanto podemos escribir $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$, donde *k* es una constante que vamos a caracterizar mediante experimentación y representación. Los alumnos deberán participar en la recopilación de datos, bien sea contando oscilaciones, manipulando la longitud del péndulo o mediante la activación de cronometro.

Registro en tabla y representación (análisis cuantitativo) para obtener la línea de tendencia de la función obtenida:

l (m)	10 T (s)
.....	....
.....	....
.....	....
.....	....



La ecuación obtenida es la de una recta que pasa por el origen de coordenadas y de cuya pendiente **K^2/g** se obtiene el valor de la constante de proporcionalidad. Debe ser aproximadamente 6,3.

$$T_{exp} = 6{,}3\sqrt{\frac{l}{g}}$$

El siguiente punto del método científico se basa en la ***descripción analítica formal.*** Aplicando las leyes de Newton sobre nuestro sistema, Ilustración 1, de péndulo simple y asumiendo 2 dimensiones, se llega a la deducción de las siguientes ecuaciones. Hay que mencionar que actúan dos fuerzas, Peso- P y Tensión-T. Además, a modo de recordatorio la aceleración es la derivada segunda de la posición con respecto al tiempo.

$$\begin{cases} -P + T_y = ma_y \\ -T_x = ma_x \end{cases} \begin{cases} -mg + T\cos\theta = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ -T\sin\theta = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \end{cases} sistema\ de\ ecuaciones\ diferenciales\ 2D$$

<u>¿Cómo obtener la solución sin resolver el sistema?</u>

En primer lugar, se debe realizar una aproximación válida cuando se trabaja con ángulos pequeños:

$$\begin{matrix} \Delta y \ll \Delta x \rightarrow \theta \lll \\ \cos\theta \sim 1 \end{matrix} Se\ ha\ transformado\ en\ 1D$$

$$\begin{cases} -mg + T\cos\theta = m\cancel{\dfrac{d^2y}{dt^2}} \quad -mg + T = 0 \quad T = mg \\ -T\sin\theta = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \dots\dots \sin\theta = \dfrac{x}{l}\ por\ definición(trigonometría) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{-\cancel{m}g\frac{x}{l} = \cancel{m}\frac{d^2x}{dt^2} \dots\dots \frac{d^2x}{dt^2} + g\frac{x}{l} = 0}$$

Para resolver la ecuación x(t)=... vamos a emplear un apoyo visual y muy intuitivo para 2º de bachillerato. Se debe construir un péndulo con una botella rellena de arena. En la base se realizará una pequeña perforación para que a medida que se produzca el movimiento armónico simple del propio péndulo quede un registro de arena en un rollo de papel que se desplazará con MRU. Conseguimos que el alumnado sea capaz de ver, sin necesidad de resolver la ecuación, la función que representa la oscilación, su posición en función del tiempo. Se obtiene un dibujo similar al siguiente.

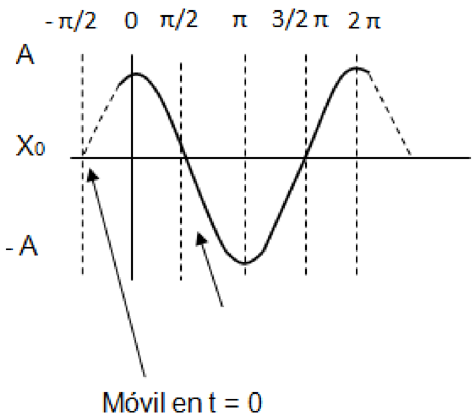


Ilustración 2: Función representación M.A.S

En definitiva, el patrón es una función coseno o seno que los alumnos identifican perfectamente, el matiz está en trasladar el origen, pero conserva el mismo significado físico. La ecuación:

$$x(t) = A\cos(\omega t) = A\cos(2\pi f t) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

Derivando obtendremos la velocidad y aceleración del movimiento que se podrá comparar con la ecuación anterior:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -A\omega\sin\omega t$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt})} = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\boldsymbol{\omega^2}x(t)$$

Comparando: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0$

$$\frac{g}{l}=\omega^2 \ldots\ldots \omega=\sqrt{\frac{g}{l}} \ldots\ldots \text{como} \frac{2\pi}{T}=\omega \rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Conclusión el valor obtenido de la constante de proporcionalidad mediante experimentación, 6,3 se ajusta al valor analítico formal, 2π.

Por analogía y comparación se procederá de la misma forma para desarrollar la dependencia del periodo en un muelle, dejando mayor autonomía a los alumnos, pero bajo la supervisión del profesor. En este caso resulta interesante realizar primero la ***descripción analítica*** basada en las Leyes de Newton.

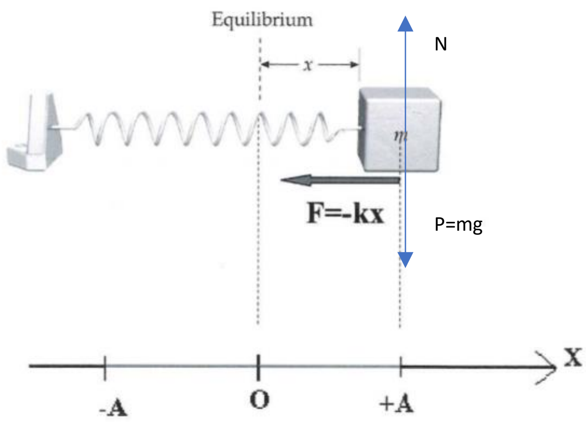


Ilustración 3: Muelle y fuerza recuperadora

Importante aplicación Ley de Hooke: $F_{elástica}=-kx$. Siendo k *la* constante de recuperación del muelle y x la elongación. Interesante explicar el significado físico del signo negativo, indicativo de la oposición de la fuerza al desplazamiento.

En la dirección vertical del muelle horizontal no existe cambio dinámico/estático y lo mismo sucede con respecto a lo posición de equilibrio en el eje x. Este sistema en más sencillo de analizar que el péndulo pues trabajamos en una dimensión desde el principio, de ahí que podemos retar al alumnado a buscar la solución por aplicación de un método visual similar.

$$\begin{cases} -P+T_y=ma_y \\ -T_x=ma_x \end{cases} \begin{cases} -mg+T\cos\theta=m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ -T\sin\theta=m\dfrac{d^2x}{dt^2} \end{cases} sistema\ de\ ecuaciones\ diferenciales$$

$$\{ma_x=-F_{elástica} \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx \end{cases}$$

Dividiendo entre m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Al igual que con el péndulo buscamos la huella que deja el movimiento, empleando un dispositivo similar al de la ilustración 4. Resolviendo así visualmente la variación de la elongación con el tiempo:

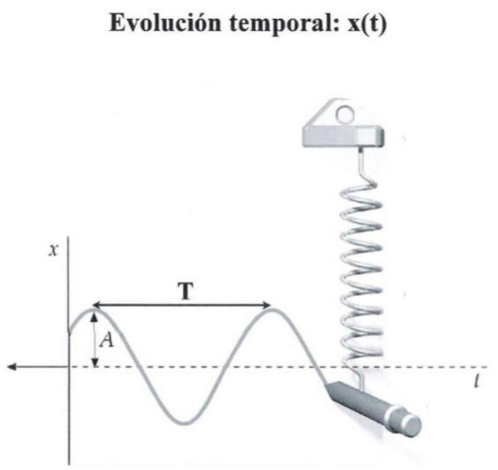


Ilustración 4: Evolución temporal registrada de la oscilación de un muelle vertical.

$$x(t) = A\cos(\omega t) = A\cos(2\pi f t) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

Derivando igual que anteriormente:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -A\omega \sin \omega t$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}) = -A\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

Por analogía entre las ecuaciones:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt})} = -A\omega^2 \cos(\omega t) = \boldsymbol{-\omega^2} x(t)$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2}} + \boldsymbol{\frac{k}{m}}x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \rightarrow \frac{k}{m} = (\frac{2\pi}{T})^2 \rightarrow \boldsymbol{T_{muelle\ analítico}} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

La constante de proporcionalidad tiene el valor de $\boldsymbol{2\pi}$.

El **análisis dimensional** nos ayuda a ver la dependencia del periodo con el resto de las magnitudes al igual que la experimentación.

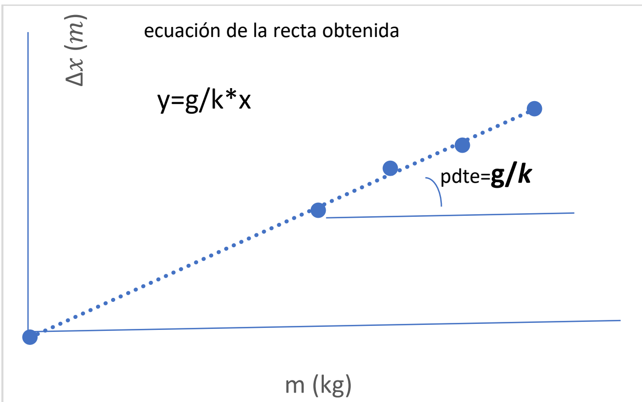
$$T = f(m, k, g \ldots)$$

Se pueden hacer estiramientos con diversos muelles para demostrar las diferentes resistencias, incluso llegar al límite de elasticidad en algún caso, se conseguirá que interpreten la funcionalidad o no del mecanismo.

$$T \alpha \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = \mathrm{K}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La **experimentación/medida/observación** se realizará con un muelle/dinamómetro vertical, se contribuye a la asimilación del método científico y a fomentar el gusto por la ciencia en el alumnado, pues verán la asignatura de física dinámica, divertida y útil. Fomentando la participación, mediremos la elongación para diferentes pesos de uno de los muelles/dinamómetros elegidos al azar. Tras registrar los datos en una tabla, se procede a graficar las parejas de números obtenidas. El análisis gráfico concluye en la obtención de una función lineal que pasa por el origen de coordenadas como era de esperar. Se debe ajustar la ecuación de la Ley de Hooke para determinar en este caso el valor de la constante.

$\Delta x\ (m)$	m (kg)
.....	....
.....	....
.....	....
.....	....



Así podríamos determinar el valor de la constante de elasticidad.

La dependencia del periodo en un muelle se puede analizar modificando las magnitudes implicadas y observando si existe cambio en el valor del periodo o no. Así al aumentar el peso que pende del muelle vertical se aprecia un aumento del tiempo que tardamos en registrar 10 periodos sin embargo no es función de la gravedad. Al modificar la amplitud tampoco existe cambio en el valor del periodo cuando computamos el mismo número de movimientos. Tan sólo podemos observar una pequeña variación debido al error o errores cometidos en la medida. Si es decisivo en los muelles horizontales la existencia de rozamiento con la superficie, por lo tanto, debemos evitar su uso.

Actividades de consolidación y ampliación

Plantear actividades estimulantes y retadoras sirven para consolidar las ideas impartidas. Dejar preguntas abiertas genera curiosidad y la participación facilita la ampliación de conocimientos. En este caso sería interesante plantear a los alumnos las siguientes preguntas ¿Cómo determinaría la masa de un cuerpo en ausencia de gravedad?, ¿es posible determinar la altura del patio de un edificio si en su interior existe un péndulo de grandes dimensiones anclado al punto más elevado del techo y que casi impacta con el suelo? ¿la tensión de la cuerda en el péndulo es función del ángulo? Relacionar con tema de Energía.

Evaluación

La evaluación se puede realizar desde dos puntos de vista. El primero de ellos es la satisfacción del estudiante y el segundo la utilidad en la comprensión de los nuevos conceptos. Para analizar la opinión de los alumnos es necesarios conocer su impresión, por lo tanto, el diálogo directo o a través de formularios anónimos nos darán el nivel de éxito o de fracaso de las sesiones. Por otro lado, realizar nuevas experimentaciones en el laboratorio basado en la medida, los errores, la toma de datos y la interpretación/representación de estos ayudará al profesor a evaluar si ha existido asimilación o no, u la destreza adquirida.

A nivel conceptual se podría plantear un ejercicio para promover diferentes formas a través del método científico de medir la gravedad g con un péndulo simple.

Bibliografía

Metodologías e idea:

Walter Lewin profesor, Doctor en física, astrofísico y exprofesor emérito de física del Instituto de Massachusetts: https://youtu.be/tNpuTx7UQbw

Definiciones: https://www.fisicalab.com/apartado/concepto-oscilador-armonico

Ilustración 3 y 4:

http://recursostic.educacion.es/eda/web/eda2009/newton/galicia/materiales/fernandez_antonio_p3/mas.pdf