LVII Olimpiada Matemática Española

Fase Regional, Castilla y León

Segunda prueba, viernes 12 de febrero de 2021

4. Dos piedras, una blanca y una negra, están ubicadas en dos casillas de un tablero de ajedrez (de dimensiones 8×8). En cada *movimiento* (o jugada, u operación) una de las piedras se mueve a una casilla vecina (dos casillas son vecinas si tienen un lado común), de manera que en ningún momento las dos piedras están en una misma casilla.

Determinar si es posible o no que, después de una secuencia de movimientos, cada forma de ubicar a las piedras sobre el tablero haya aparecido exactamente una vez.

5. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales x, y se verifica que

$$y^2 f(x+1) = f(xy) + 2xf(y) + y^2.$$

6. Encontrar todos los enteros positivos a, b, c tales que los números

$$ab - 1, ac - 1, bc - 1$$

sean potencias de 2. Las potencias de 2 son $2^0, 2^1, 2^2$, etc.

No está permitido el uso de calculadoras ni dispositivos electrónicos.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de esta prueba es de 3 horas y media.

Soluciones.-

4. Dos piedras, una blanca y una negra, están ubicadas en dos casillas de un tablero de ajedrez (de dimensiones 8×8). En cada *movimiento* (o jugada, u operación) una de las piedras se mueve a una casilla vecina (dos casillas son vecinas si tienen un lado común), de manera que en ningún momento las dos piedras están en una misma casilla.

Determinar si es posible o no que, después de una secuencia de movimientos, cada forma de ubicar a las piedras sobre el tablero haya aparecido exactamente una vez.

Consideramos la coloración estándar del tablero de ajedrez con dos colores, por ejemplo blanco y negro. Clasificamos las posibles configuraciones para las piedras en dos tipos: M, si están ambas piedras en casillas del mismo color, y D, si están en casillas de distinto color.

La clave en este problema consiste en observar que en cada movimiento una piedra se queda fija y la otra se mueve hacia una casilla de distinto color, por lo tanto a partir de una configuración M siempre se pasa a una D, y de una D se pasa a una M.

Por otra parte, para cada posición de la piedra blanca hay 63 posibles posiciones de la piedra negra, en 32 de ellas se tiene una configuración D, y en 31 de ellas N.

Repitiendo el razonamiento anterior con todas las posibles posiciones de la piedra blanca, hay $64 \cdot 32 = 2048$ configuraciones de tipo D y $64 \cdot 31 = 1984$ de tipo M. Puesto que $2048 > 1984$, es imposible ir alternando entre configuraciones M y D, y la respuesta a la pregunta del problema es no.

5. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales x, y se verifica que

$$y^2 f(x+1) = f(xy) + 2xf(y) + y^2.$$

Solución 1. La sustitución $x = y = 0$ implica que $0 = f(0) + 0 + 0$, es decir, $f(0) = 0$.
Sustituyendo $x = 0$, $y = 1$, se tiene que $f(1) = f(0) + 0 + 1$, luego $f(1) = 1$.
Haciendo ahora $x = y = 1$ tenemos que $f(2) = f(1) + 2f(1) + 1$, luego $f(2) = 4$.
Además, si para todo y sustituimos $x = 1$ en la ecuación original se obtiene:

$$y^2 f(2) = f(y) + 2f(y) + y^2 \Rightarrow 3y^2 = 3f(y) \Rightarrow f(y) = y^2,$$

por lo que la única función candidata a ser solución es $f(x) = x^2$.

Finalmente, $f(x) = x^2$ es efectivamente una solución, ya que la igualdad

$$y^2(x+1)^2 = (xy)^2 + 2xy^2 + y^2$$

se cumple para todo par de números reales x, y.

Solución 2: sustituyendo $x = 1$, para todo y se cumple que:

$$y^2 f(2) = f(y) + 2f(y) + y^2 \Rightarrow f(y) = \left(\frac{f(2)-1}{3}\right) y^2,$$

es decir, f es necesariamente de la forma $f(x) = ax^2$, para cierto $a \in \mathbb{R}$. Para obtener un valor válido de a, debe cumplirse que

$$y^2 a(x+1)^2 = a(xy)^2 + 2axy^2 + y^2$$

para todo x, y. Es claro que $a = 1$ es un valor posible. Eligiendo $x = y = 1$ vemos que $4a = 3a+1$, por lo que necesariamente $a = 1$, y la única solución es $f(x) = x^2$.

6. Encontrar todos los enteros positivos a, b, c tales que los números

$$ab - 1, ac - 1, bc - 1$$

sean potencias de 2. Las potencias de 2 son $2^0, 2^1, 2^2$, etc.

Escribimos $ab - 1 = 2^x$, $ac - 1 = 2^y$, $bc - 1 = 2^z$.

Primero analizamos el caso en que dos variables son iguales, por ejemplo $a = b$. La primera ecuación es entonces $2^x = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$. En particular $a - 1$ y $a + 1$ son potencias de 2, y difieren en 2 unidades. Esto solamente es posible cuando $a = 3$.

Vamos a la segunda ecuación $3c - 1 = 2^y$, es decir $c = \frac{2^y+1}{3}$. Hay infinitas soluciones, puesto que cada valor impar de y proporciona un valor entero de c. Análogamente se obtienen infinitas soluciones con $a = c = 3$ y con $b = c = 3$. Concretamente, para cada y impar hay 3 soluciones:

$$\left(\frac{2^y+1}{3}, 3, 3\right), \quad \left(3, \frac{2^y+1}{3}, 3\right), \quad \left(3, 3, \frac{2^y+1}{3}\right).$$

A partir de ahora supondremos que a, b, c son distintos, y probaremos que no existen más soluciones. Podemos asumir sin pérdida de generalidad $a < b < c$, lo que significa $ab < ac < bc$, y por lo tanto $2^x < 2^y < 2^z$. La única potencia de 2 impar es $2^0 = 1$. En particular $2^y, 2^z$ son pares, lo cual llevado a las ecuaciones segunda y tercera implica que ac y bc son impares, y en consecuencia a, b, c son impares.

A continuación restamos la tercera ecuación menos la segunda:

$$c(b - a) = 2^z - 2^y.$$

Se trata de un múltiplo de 2^y estrictamente positivo, pues $z > y$. Dado que c no tiene ningún factor 2, deducimos que $b - a$ es múltiplo de 2^y, positivo, claro. Finalmente, la condición $b - a \geq 2^y$ llevada a la primera ecuación nos dará una contradicción:

$$2^x = ab - 1 \geq a(a + 2^y) - 1 \geq 1 + 2^y - 1 > 2^x.$$