LVII Olimpiada Matemática Española

Fase local distrito universitario de Salamanca

Viernes, 15 de enero del 2021

1. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático con dos raíces reales distintas. Cualesquiera que sean los números reales a, b que satisfacen $|a|, |b| \geq 2021$, se tiene que $P(a^2 + b^2) \geq P(2ab)$.

Demostrar que al menos una de las raíces de $P(x)$ es negativa.

2. Las funciones $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ y $g(x) = 18x^2 + 15x + 5$ están definidas sobre los números enteros.

Probar que f alcanza todos los valores que alcanza g, y que existen infinitos valores enteros alcanzados por f pero no por g.

3. En un tablero cuadriculado de dimensiones 8×8 algunas casillas están vacías y otras tienen una piedra, de manera que en toda región de tamaño 2×2 (ocupando 4 casillas del tablero) hay un número par de piedras.

¿Es posible que el tablero contenga exactamente 20 piedras? ¿Y 22 piedras?

4. En el triángulo ABC, el ángulo A es menor que el ángulo C. El punto D está en la recta BC (con B entre C y D), de tal manera que $BD = AB$. El punto E está en la bisectriz del ángulo $\widehat{ABC}$ de tal manera que los ángulos $\widehat{BAE}$ y $\widehat{ACB}$ son iguales. Los segmentos BE y AC se cortan en el punto F. El punto G está en el segmento AD de manera que EG y BC son paralelos.

Demostrar que $AG = BF$.

Se deben entregar todos los problemas y por separado.
Cada problema se califica sobre 7 puntos
Tiempo máximo: 4 horas 30 min

No se permite el uso de calculadoras ni otros instrumentos electrónicos, ni otros documentos escritos distintos de los que pudiera facilitar el Tribunal. En particular, los teléfonos móviles deben estar desconectados.