[1] Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático con dos raíces reales distintas. Cualesquiera que sean los números reales a, b que satisfacen $|a|, |b| \geq 2021$, se tiene que $P(a^2+b^2) \geq P(2ab)$. Demostrar que al menos una de las raíces de $P(x)$ es negativa.

Solución 1. Supongamos que p y q son las dos raíces del polinomio y, con el fin de llegar a una contradicción, que ambas son no negativas. Entonces podemos escribir

$$P(x) = k(x-p)(x-q) = kx^2 - k(p+q)x + kpq,$$

donde k es un número real no nulo. Ahora la condición $P(a^2+b^2) \geq P(2ab)$ se puede escribir como

$$k(a^2+b^2)^2 - k(p+q)(a^2+b^2) + kpq \geq k(2ab)^2 - k(p+q)(2ab) + kpq$$

y haciendo operaciones obtenemos:

$$k(a^2-b^2)^2 - k(p+q)(a-b)^2 \geq 0$$

y de aquí

$$k(a-b)^2((a+b)^2 - (p+q)) \geq 0.$$

Ahora consideramos dos casos, según el signo que tenga k:

Si $k < 0$, entonces elegimos $(a, b) = (2021+p, 2021+q)$ y tenemos:

$$k(p-q)^2(p^2+q^2+2pq+8083p+8083q+4042^2) \geq 0,$$

que claramente es falso.

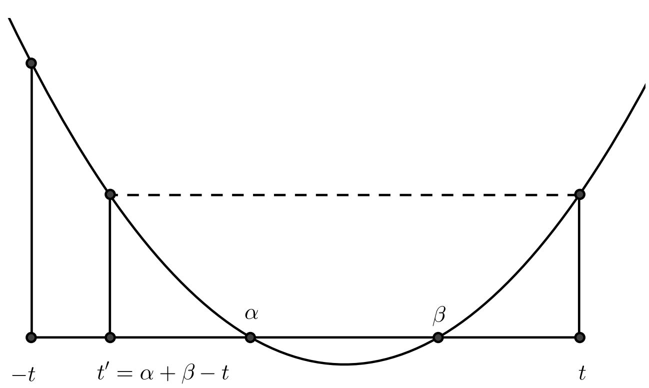
Si $k > 0$, entonces elegimos $(a, b) = (2021+\sqrt{p+q}, -2021-\frac{1}{2}\sqrt{p+q})$ y en este caso tenemos

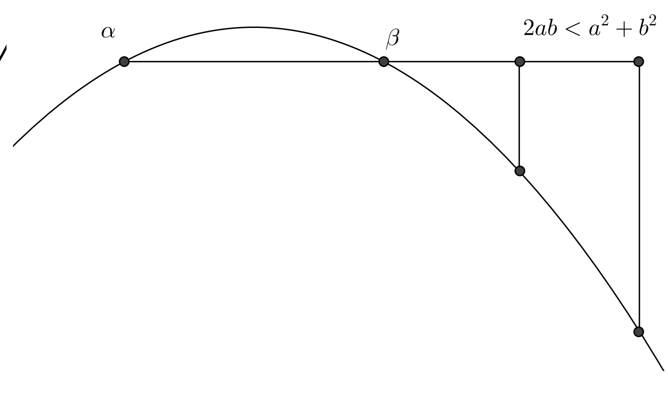
$$k(a-b)^2\left(-\frac{3}{4}(p+q)\right) \geq 0,$$

que también es falso. En ambos casos llegamos a una contradicción, por lo que p y q no pueden ser ambos no negativos y por lo tanto al menos una raíz tendrá que ser negativa. ■

Solución 2. Sean $\alpha < \beta$ las dos raíces reales y distintas de P. Si no hubiera ninguna raíz negativa, se tendría que $\alpha + \beta > 0$. Veamos que esto conduce a una contradicción.

Notemos que por ser P cuadrático, se tiene una simetría con respecto al punto medio del intervalo $[\alpha, \beta]$ y la gráfica de P tiene una de las dos formas siguientes:





Si el coeficiente de x^2 es positivo, estamos en la situación de la figura izquierda. En particular, P es decreciente en el intervalo $(-\infty, \alpha)$. Para todo $t > \beta$, su simétrico respecto al eje de simetría es $t' = \alpha + \beta - t$, un número que se encuentra entre $-t$ y α: en efecto, $t' < \alpha$ por ser $t > \beta$, y $t' > -t$ por ser $\alpha + \beta > 0$. Teniendo en cuenta la simetría y crecimiento de P podemos afirmar que $P(-t) > P(t') = P(t)$. La contradicción se obtiene eligiendo a suficientemente grande tal que $a > 2021$ y $2a^2 > \beta$. Para cualquier valor de a verificando esas condiciones, definimos $b = -a$ y $t = 2a^2$. Entonces

$$P(2ab) = P(-2a^2) = P(-t) > P(t') = P(t) = P(2a^2) = P(a^2 + b^2),$$

lo cual es una contradicción.

Si el coeficiente de x^2 en P es negativo, estamos en la situación de la figura derecha, siendo P decreciente en (β, ∞). Sean a, b mayores que 2021 y suficientemente grandes tales que $2ab > \beta$. Si además $a \neq b$, se tendrá que $a^2 + b^2 > 2ab$, puesto que $(a - b)^2 > 0$. Debido al crecimiento de P, se tiene que $P(a^2 + b^2) < P(2ab)$, que es una contradicción. ■

[2] Las funciones $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ y $g(x) = 18x^2 + 15x + 5$ están definidas sobre los números enteros.

Probar que f alcanza todos los valores que alcanza g, y que existen infinitos valores enteros alcanzados por f pero no por g.

Ver/ocultar solución.

Solución 1. Dado que 18 y 15 son múltiplos de 3 pero el 5 no lo es, está claro que g no alcanza ningún múltiplo de 3. Por otra parte, sustituyendo x por cualquiera de los infinitos múltiplos de 3 se consigue que $f(x)$ sea múltiplo de 3, luego f alcanza infinitos múltiplos de 3 que no son alcanzados por g.

Ya que al sustituir $x = 3k$ se obtiene un valor de $f(x)$ no alcanzado por g, probamos lo que ocurre al sustituir $x = 3k + 1$ y $x = 3k + 2$:

$$\begin{array}{rcl} f(3k+1) & = & 2(3k+1)^2 - 3(3k+1) + 3 = 18k^2 + 3k + 2 \\ f(3k+2) & = & 2(3k+2)^2 - 3(3k+2) + 3 = 18k^2 + 15k + 5 = g(k). \end{array}$$

Bingo! Descubrimos que $f(3k + 2) = g(k)$. Dado que todos los valores alcanzados por g son de la forma $g(k)$, para algún entero k, y hemos visto que $f(3k + 2) = g(k)$, esto quiere decir que f también alcanza el valor $g(k)$, completando el problema.

Solución 2. Veamos qué relación deben cumplir dos enteros n, k para que se tenga $f(n) = g(k)$:

$$\begin{array}{rcl} 2n^2 - 3n + 3 & = & 18k^2 + 15k + 5 \Leftrightarrow \\ n & = & \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3 - (18k^2 + 15k + 5))}}{4} \Leftrightarrow \\ n & = & \dfrac{3 \pm \sqrt{144k^2 + 120k + 25}}{4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{(12k+5)^2}}{4} \Leftrightarrow \\ n & = & \dfrac{3 \pm (12k+5)}{4}. \end{array}$$

El signo $-$ del $\pm$ conduce a un valor no entero de n, por lo que debe ocurrir necesariamente que $n = \frac{3+12k+5}{4} = 3k + 2$. Todo lo anterior se resume en la afirmación:

$f(n) = g(k)$ si y sólo si $n = 3k + 2$.

Es claro entonces que para todo k existe $n = 3k + 2$ tal que $f(n) = g(k)$, luego f alcanza todos los valores que alcanza g. Además, los infinitos enteros n que no son de la forma $3k + 2$ producen un valor $f(n)$ imposible de alcanzar por $g(k)$.

[3] En un tablero cuadriculado de dimensiones 8×8 algunas casillas están vacías y otras tienen una piedra, de manera que en toda región de tamaño 2×2 (ocupando 4 casillas del tablero) hay un número par de piedras.

¿Es posible que el tablero contenga exactamente 20 piedras? ¿Y 22 piedras?

Ver/ocultar solución. Denotaremos las casillas vacías mediante un 0, y las que tienen piedra con un 1. Veamos cómo son dos filas consecutivas del tablero:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{array}$$

Distinguiremos dos casos, según a_1, b_1 sean iguales o distintas.

Si $a_1 = b_1$, dado que $a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ es par, debe tenerse que $a_2 = b_2$, de la misma manera $a_3 = b_3$, y así sucesivamente hasta $a_8 = a_8$, es decir, las dos filas son iguales.

Si $a_1 \neq b_1$, esto es equivalente a que $a_1 + b_1 = 1$ (una de ellas es 1 y la otra 0). Al ser $a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ par, debe cumplirse que $a_2 + b_2 = 1$, y de igual forma $a_3 + b_3 = 1, \ldots, a_8 + b_8 = 1$, es decir, las dos filas son "complementarias" una de la otra, cada una tiene casillas vacías en las posiciones donde la otra tiene piedras, y viceversa.

El razonamiento anterior prueba que dos filas consecutivas son iguales o complementarias, y lo mismo vale para dos filas cualesquiera, ya que la condición de ser iguales o complementarias se propaga entre filas.

A continuación observamos que si pretendemos colocar 20 o 22 piedras en el tablero, ha de haber alguna fila con menos de 3 piedras (ya que $3 \cdot 8 = 24 > 22$). Sea a el número de piedras de dicha fila, siendo $a = 0, 1$ o 2. Por lo visto antes, todas las filas tienen a piedras o bien $8 - a$ piedras, supongamos que hay k filas con a piedras y $8 - k$ filas con $8 - a$ piedras. Por consiguiente, en el tablero hay $64 + 2ak - 8(a + k)$ piedras. Reemplazando a por sus posibles valores 0,1,2, las cantidades de piedras que podemos conseguir son las siguientes:

$$64 - 8k, \qquad 56 - 6k, \qquad 48 - 4k,$$

para cierto valor de k entre 0 y 8. Ninguna de las tres cantidades anteriores puede valer 22, ya que los valores de k deberían ser, respectivamente, $\frac{64-22}{8}$, $\frac{56-22}{6}$ y $\frac{48-22}{4}$, pero ninguno de ellos es entero.

En cuanto al 20, es posible alcanzarlo con $a = 1, k = 6$ (6 filas con 1 piedra y 2 filas con 7 piedras) o con $a = 2, k = 7$ (7 filas de 2 piedras, y 1 fila de 6). Por ejemplo:

```
    a=1, k=6                      a=2, k=7
1  0  0  0  0  0  0  0        1  1  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0        1  1  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0        1  1  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0        1  1  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0        1  1  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0        1  1  0  0  0  0  0  0
0  1  1  1  1  1  1  1        1  1  0  0  0  0  0  0
0  1  1  1  1  1  1  1        0  0  1  1  1  1  1  1
```

Nótese que ambas configuraciones son esencialmente iguales (una resulta de la otra por giros y simetrías).

[4] En el triángulo ABC, el ángulo A es menor que el ángulo C. El punto D está en la recta BC (con B entre C y D), de tal manera que $BD = AB$. El punto E está en la bisectriz del ángulo ABC de tal manera que los ángulos $\widehat{BAE}$ y $\widehat{ACB}$ son iguales. Los segmentos BE y AC se cortan en el punto F. El punto G está en el segmento AD de manera que EG y BC son paralelos.

Demostrar que $AG = BF$.

Ver/ocultar solución.

Solución 1. Sean α, β y γ los ángulos en A, B y C, respectivamente, con la condición $\alpha < \gamma$. Como el triángulo ABD es isósceles con $\angle ABD = 180^o - \beta$, sus otros dos ángulos $\angle BAD$ y $\angle BDA$ son iguales a $\frac{\beta}{2}$. Dado que también $\angle CBF = \frac{\beta}{2}$, deducimos que AD y BF son paralelos. Ahora, como los segmentos AG y BF son paralelos y nos piden demostrar que tienen la misma longitud, parece natural intentar demostrar que $AGBF$ es un paralelogramo.

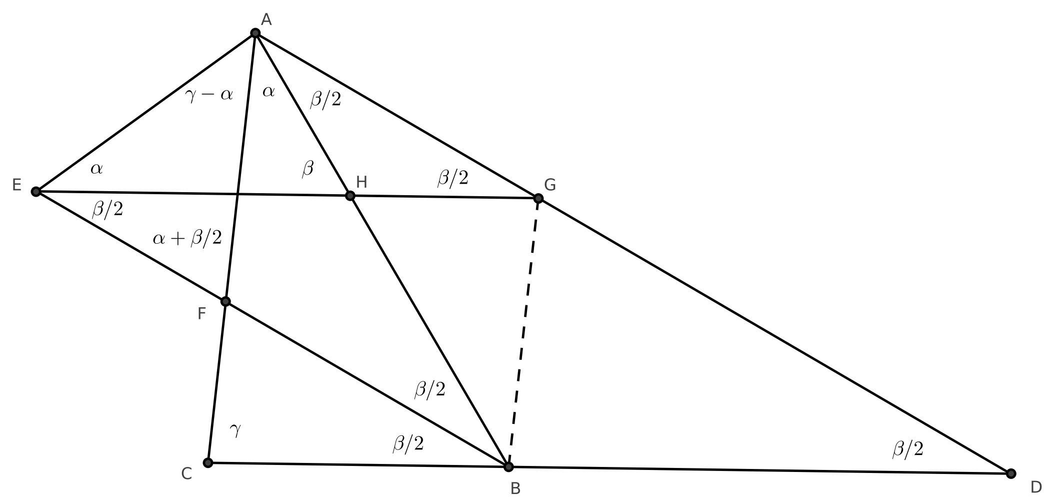
Ya tenemos que $AG||BF$, ahora probaremos que $AF||BG$.

El cuadrilátero $AEBG$ es cíclico ya que $\angle AGE = \angle ADC = \angle EBC = \angle EBA$ (todos $\frac{\beta}{2}$).

Los triángulos AEB y CFB son semejantes ya que $\angle EAB = \angle FCB$ y $\angle ABE = \angle CBF$.

Juntando todo tenemos que $\angle DGB = 180^o - \angle AGB = \angle AEB = \angle BFC = \angle DAC$.

Por tanto, AC y GB son paralelos y $AGBF$ es un paralelogramo, como queríamos demostrar. ■



Solución 2. Como en la solución anterior se prueba que $AD||BF$, y se deducen todos los ángulos indicados en la figura. Por ejemplo, $\angle AFE$ se obtiene como ángulo exterior a F en el triángulo ABF, es decir, $\angle AFE = \angle FAB + \angle ABF = \alpha + \frac{\beta}{2}$; $\angle EAF = \gamma - \alpha$ se obtiene de la hipótesis, y de forma similar los restantes ángulos se obtienen utilizando los paralelismos $GE||BC$ y $AD||BF$, o bien sumando y restando ángulos conocidos teniendo en cuenta que los ángulos de todo triángulo suman 180^o.

Añadiendo el punto $H = AB \cap EG$, se descubren dos triángulos isósceles HAG y HBE, con $HA = HG$ y $HB = HE$. Como además $\angle AHE = \angle GHB$, resulta que los triángulos AHE y GHB son congruentes por el criterio de igualdad lado-ángulo-lado. En consecuencia, $\angle GBH = \angle AEH$, ángulo que vale α, como $\angle CAB$. Finalmente, la igualdad $\angle GBA = \angle CAB$ prueba que $BG||AC$ y como en la primera solución se concluye que $AGBF$ es un paralelogramo. ■