1 - Los números reales a, b y c no son menores que 1. Demostrar que

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

Ver/ocultar solución.

Aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica primero a los números b, c y luego a los números $\frac{1}{c}, a - \frac{1}{b}$ (son todos positivos, por ser $a, b, c \geq 1$) tenemos que:

$$b + c \geq 2\sqrt{bc} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{1}{c}\left(a - \frac{1}{b}\right)} \leq \frac{\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b}}{2}.$$

En consecuencia, podemos afirmar que:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab-1}{bc}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a - \frac{1}{b}\right)} \leq \frac{\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b}}{4}.$$

De manera similar se tienen las acotaciones:

$$\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \leq \frac{\frac{1}{a} + b - \frac{1}{c}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{\frac{1}{b} + c - \frac{1}{a}}{4},$$

y sumando las tres acotaciones obtenidas se tiene la desigualdad deseada. La igualdad ocurre cuando los números a, b, c son iguales y además $\frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}$, es decir $a = \sqrt{2}$. ■

2 - Un entero positivo n se denomina *cuadricubo* si puede escribirse como $n = a^2 + b^3$, con a, b enteros positivos. Demostrar que:

(i) Existen infinitas parejas de cuadricubos consecutivos $(n, n+1)$.

(ii) Existen infinitas parejas de cuadricubos (a, b) tales que el producto ab es un cuadricubo.

Ver/ocultar solución.

(i) Sea i cualquier impar, entonces i^3 es un impar, que escribimos como $2x+1$, y esto es la diferencia de dos cuadrados $(x+1)^2 - x^2$, por lo tanto $(x+1)^2 = x^2 + i^3$ es un cuadricubo. Y el número que le sigue es $(x+1)^2 + 1^3$, también un cuadricubo.

(ii) Partimos del cuadricubo $a = 2 = 1^2 + 1^3$ y buscaremos infinitos cuadricubos b tales que $2b$ también sea un cuadricubo. Una posibilidad es buscar b como suma de potencias de 2. Proponemos

$$b = (2^i)^2 + (2^j)^3,$$

con i, j enteros positivos elegidos astutamente para que $2i + 1$ sea múltiplo de 3, y $3j + 1$ par, es decir $2i + 1 = 3x$, $3j + 1 = 2y$, con x, y enteros. Esto se consigue siempre que i sea múltiplo de 3 más 1, y j impar. Entonces

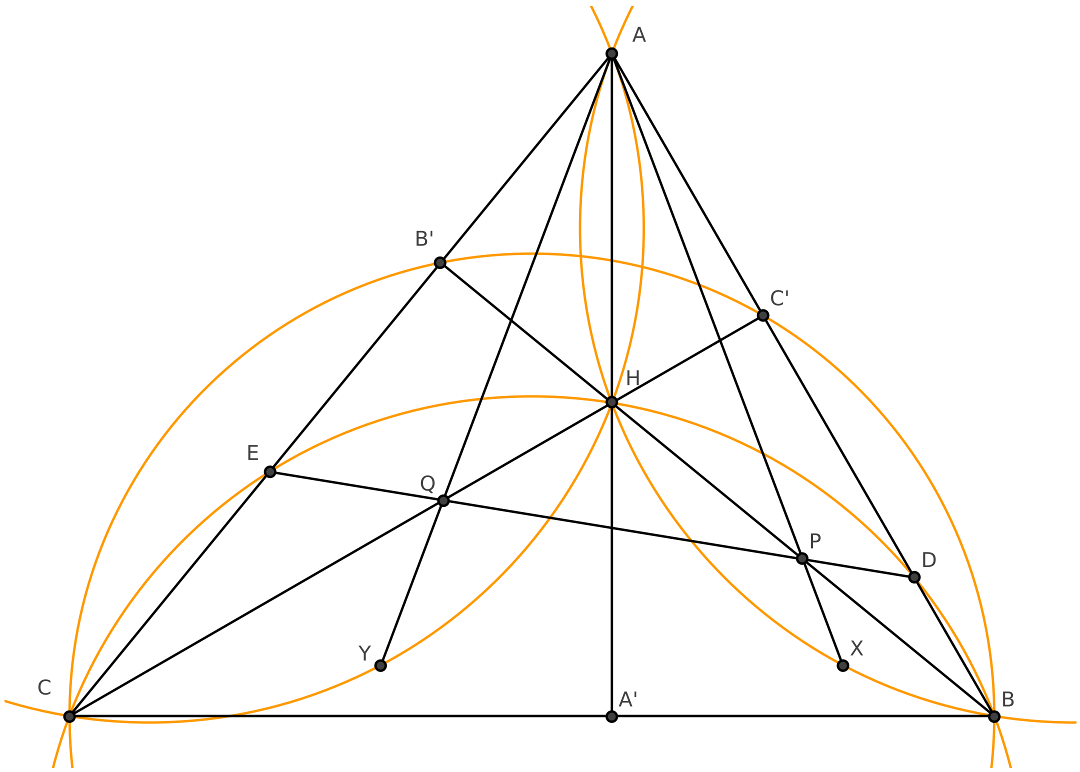
$$2b = 2(2^i)^2 + 2(2^j)^3 = 2^{2i+1} + 2^{3j+1} = (2^x)^3 + (2^y)^2.$$

---

3 - Sea ABC un triángulo acutángulo de ortocentro H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersecar a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y (distintos de A) que están sobre las rectas AP y AQ, respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B están sobre una circunferencia, y los puntos Y, A, H y C están también en una circunferencia.

Demostrar que las rectas XY y BC son paralelas.

Ver/ocultar solución.



Sean A', B' y C' los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente (en el triángulo ABC).

El cuadrilátero $BC'B'C$ es cíclico porque $\angle BC'C = 90^o = \angle BB'C$.

Tenemos que los puntos A y E son simétricos con respecto a la altura BB' ya que

$$\angle B'BE = \angle HBE = \angle HCE = \angle C'CB' = \angle C'BB' = \angle ABB'.$$

De modo similar, A y D son simétricos respecto de la altura CC'.

Las circunferencias (BHE) y (BHA) son simétricas con respecto a BB' y por tanto D y X también. De modo similar, Y y E son simétricos con respecto a CC'. Entonces $XA = DE = AY$, con lo que el triángulo AXY es isósceles.

Además AH biseca el ángulo $\angle XAY$, ya que se tienen las igualdades:

$$\angle XAH = \angle XBH = \angle HBD = \angle B'BC' = \angle B'CC' = \angle ECH = \angle YCH = \angle YAH.$$

Pero como el triángulo AXY es isósceles, resulta que $XY \perp AH$. Y como, además, $AH \perp BC$ tenemos que $XY || BC$, como queríamos demostrar. ■