SOLUCIONES A LA SESIÓN DEL VIERNES TARDE 11 DE ENERO DE 2019

Problema 1

Tenemos cinco números reales $a < b < c < d < e$. **Sumamos todas las parejas de estos números y anotamos las diez sumas. Las tres menores sumas son 32, 36 y 37; y las dos mayores son 48 y 51.**

Determinar, razonadamente, el valor de e.

<u>Solución</u>

La mayor suma es $d + e$, y la inmediatamente anterior es $c + e$. Por tanto, $d + e = 51$ y $c+e = 48$.

Además, la más pequeña es $a + b$ y $a + c$ la inmediatamente mayor que ella, así que $a+b=32$ y $a + c = 36$.

Hay que determinar qué suma suma ocupa la tercera posición (en orden creciente), que podrá ser $a + d$ o bien $b + c$.

Observemos que

$$a + d = (a + c)+(d + e) - (c+ e) = 36 + 51 - 48 = 39,$$

luego $a + d$ no puede ser la tercera suma en orden creciente, de manera que obtenemos

$b + c = 37$. Combinando todos los resultados encontrados llegamos a

$$2\cdot e = 2(c+e) - (a + c) - (b + c) + (a + b) =$$

$$= 2\cdot 48 - 36 - 37 + 32 = 55,$$

luego $e = 55/2$. ■

Problema 2

Entre todas las cuaternas $a < b < c < d$ cuyos elementos pertenecen al conjunto $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, llamamos *curiosillas* a las que verifican $\frac{d-b}{d+b} = \frac{c-a}{c+a}$. Por otra parte, se denominan *curiosetas* a las cuaternas que cumplen la condición $\frac{d-c}{d+c} = \frac{b-a}{b+a}$.

Demostrar que toda cuaterna curiosilla es curioseta, y determinar todas las cuaternas curiosillas que contienen al 2019.

Empezamos simplificando la condición de cuaterna curiosilla:

$$\frac{d-b}{d+b} = \frac{c-a}{c+a} \Leftrightarrow (d-b)(c+a) = (d+b)(c-a) \Leftrightarrow dc+da-bc-ba = dc-da+bc-ba \Leftrightarrow 2ad = 2bc,$$

es decir, (a, b, c, d) es curiosilla si y sólo si $ad = bc$.

Análogamente, al intercambiar los papeles de b, c y operar vemos que (a, b, c, d) es curioseta si y sólo si se cumple la misma condición $ad = bc$, lo que prueba que toda cuaterna curiosilla es curioseta, y viceversa.

Nótese que el número 2019 pertenece a una cuaterna curiosilla solamente en el caso $d = 2019$, es decir, debe cumplirse que $2019a = bc$.

Como $2019 = 3 \cdot 673$ es divisor de bc, al menos uno de los números b, c debe ser múltiplo de 3, y al menos uno es múltiplo de 673, pero ninguno puede ser múltiplo de ambos a la vez, pues sería múltiplo de 2019, pero b y c son < 2019. En consecuencia, uno de ellos es múltiplo de 3 y el otro de 673. Distinguimos dos casos.

Caso 1) $b = 3x$, $c = 673y$, $a = xy$. La restricción $c < 2019$ obliga a que sea $y = 1$ o $y = 2$.

Con $y = 1$ salen las soluciones

$$x < 3x < 673 < 2019, \qquad \text{para } x = 1, 2, \ldots, 224.$$

Con $y = 2$ obtenemos

$$2x < 3x < 2 \cdot 673 < 2019, \qquad \text{para } x = 1, 2, \ldots, 448.$$

Caso 2) $b = 673x$, $c = 3y$, $a = xy$. Ahora la restricción $b < 2019$ implica $x = 1$ o $x = 2$.

Para $x = 1$ se tienen las soluciones

$$y < 673 < 3y < 2019, \qquad y \text{ desde } 225 \text{ hasta } 672.$$

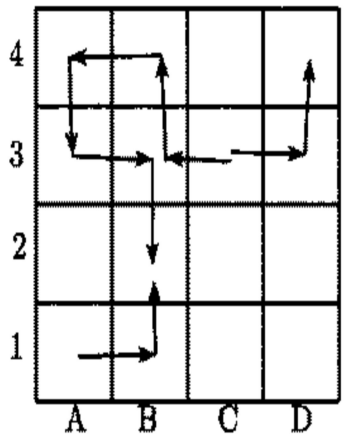
Para $x = 2$ tenemos las soluciones

$$2y < 2 \cdot 673 < 3y < 2019, \qquad y \text{ desde } 449 \text{ hasta } 672.$$

Problema 3

En un tablero de tamaño 4x4 se desarrolla el siguiente juego. Se comienza con una ficha situada en la casilla inferior izquierda. Esta ficha se desplaza hacia casillas contiguas (las que tienen un lado común), alternando movimientos horizontales y verticales, empezando con un movimiento horizontal. El juego termina cuando se llega por primera vez a la casilla superior derecha, siempre que se haya pasado antes por la esquina superior izquierda. Demostrar que en todo juego finalizado con movimientos legales existen dos casillas contiguas a y b tales que nuestra ficha se ha movido al menos dos veces desde a hacia b.

A4 Denotamos las casillas desde A1 hasta D4, como en esta figura.



Caso 4×4

Empezamos notando que los dos primeros movimientos son obligatoriamente $A1 \to B1 \to B2$.

A continuación, teniendo en cuenta la coloración estándar de las casillas en blancas y negras, vemos que A1 y D4 tienen el mismo color, por lo tanto el juego acaba en un número par de movimientos. El último movimiento debe ser vertical, obligatoriamente proveniente de D3, y el penúltimo sólo ha podido partir desde C3.

Por otra parte, a la casilla A4 se llegará en un número impar de movimientos. El último movimiento debe ser horizontal, y solamente puede provenir de B4. A su vez, a la casilla B4 debe haberse llegado mediante un movimiento vertical, que sólo pudo partir de B3. Además, después de visitar lá casilla A4 estamos obligados a movernos hacia A3 y luego hasta B3.

Finalmente, si deseamos evitar repetir movimientos (en cuyo caso el problema ya quedaría resuelto), se deduce que el movimiento anterior a $B3 \to B4$ debió ser $C3 \to B3$, y el movimiento siguiente a $A3 \to B3$ debe ser $B3 \to B2$.

En este momento, la figura muestra mediante una flecha todos los movimientos obligatorios deducidos hasta ahora. Nótese que la casilla B2 se visita al menos dos veces. Si alguna vez nos moviéramos hacia A2, se produciría alguna de las dos secuencias obligadas de movimientos:

$$A2 \to A3 \to B3 \qquad \text{o} \qquad A2 \to A1 \to B1,$$

en ambos casos repitiendo un movimiento ya hecho en el pasado, o que se hará con seguridad en el futuro. Por lo tanto, el movimiento $B2 \to A2$ es imposible, y en consecuencia estamos obligados a mover $B2 \to C2$ las dos veces que visitamos B2, y así queda demostrado el caso 4×4.

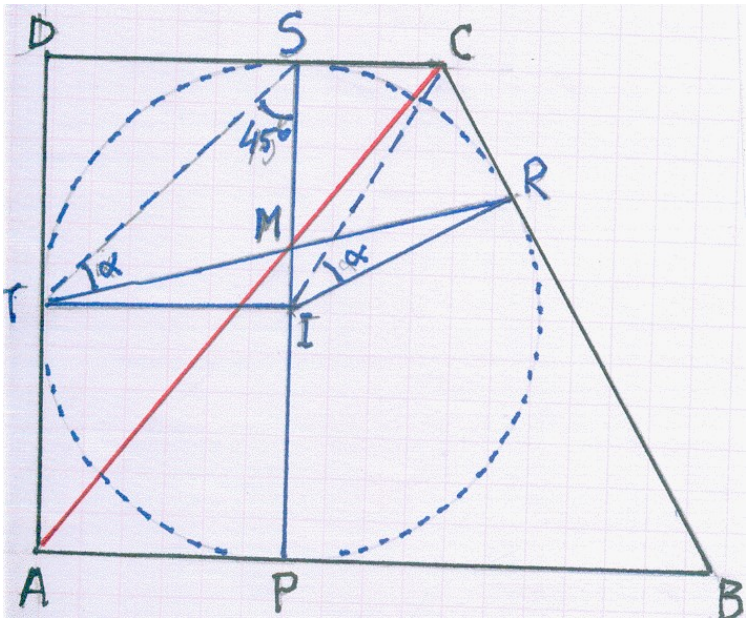
Problema 4

Sea ABCD un trapecio, con AB paralelo a CD, y tal que AB > CD; el trapecio tiene una circunferencia inscrita y además AD es perpendicular a AB.

La circunferencia inscrita (de centro I) es tangente a los lados AB, BC, CD y DA en los puntos P, R, S y T, respectivamente. Sea M el punto de intersección de PS y RT.

Demostrar que A, M y C están alineados.

<u>Solución</u>



<u>Observación inicial:</u> Presentamos una solución trigonométrica que minimiza el número de parámetros que intervienen en el problema.

Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que el radio de la circunferencia inscrita en ABCD vale 1. Llamemos k = SC < 1, ya que DC < AB.

Consideremos el ángulo $\alpha = \angle CIR = \angle CIS$; entonces $\tan\alpha = k$, porque en el triángulo CIR se tiene $\tan\alpha = \frac{CR}{IR} = \frac{CR}{1} = CS$, por tratarse de dos segmentos de tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.

Vamos a aplicar el teorema de los senos en el triángulo SMT:

$$\frac{SM}{\sin\alpha} = \frac{ST}{\sin(\alpha + 45^{\circ})} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{2k}{1+k} \ .$$

Entonces $\frac{SM}{SC} = \frac{2}{1+k} = \frac{DA}{DC}$, y los triángulos ADC y MSC son semejantes, así que A, M y C están alineados.

SOLUCIONES SESIÓN DEL SÁBADO 12 DE ENERO DE 2019

Problema 5. Sean $a > 0$ y $b < 0$ las soluciones de la ecuación $x^2 = x + 1$. Sea t_n la sucesión de término general $t_n = a^n - b^n$, $n \geq 1$. Escribir los 4 primeros términos de esta sucesión en función de los 4 primeros términos de la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ (sucesión de Fibonacci).

Solución: Las soluciones de $x^2 = x + 1$ son $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por tanto, si denotamos $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$,..., a los términos de la sucesión de Fibonacci, resulta de un cálculo directo que omitimos,

$$\begin{aligned} t_1 &= a - b = \sqrt{5} = f_1\sqrt{5} \\ t_2 &= a^2 - b^2 = \sqrt{5} = f_2\sqrt{5} \\ t_3 &= a^3 - b^3 = 2\sqrt{5} = f_3\sqrt{5} \\ t_4 &= a^4 - b^4 = 3\sqrt{5} = f_4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

En general, se puede demostrar que siempre es $t_n = f_n\sqrt{5}$ debido a lo siguiente: como a y b son soluciones de $x^2 = x + 1$ tendremos

$$a^n = a^{n-2}a^2 = a^{n-2}(a + 1) = a^{n-1} + a^{n-2}$$

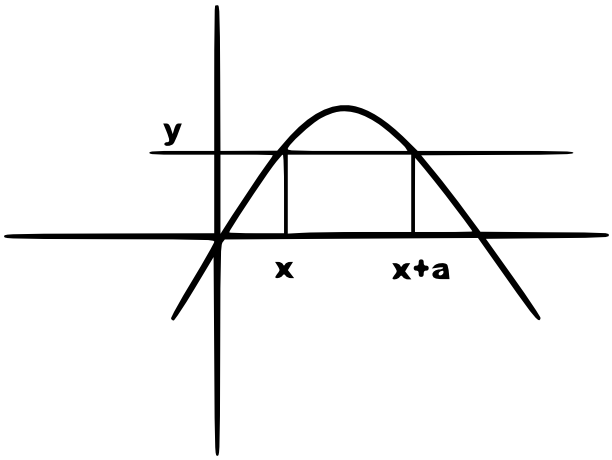
y una formula análoga para b. Por eso,

$$t_n = a^n - b^n = a^{n-1} + a^{n-2} - \left(b^{n-1} + b^{n-2}\right) = t_{n-1} + t_{n-2}.$$

Como consecuencia, la sucesión t_n se forma exactamente igual que la de Fibonacci, salvo que tenemos $t_1 = t_2 = \sqrt{5}$, mientras que $f_1 = f_2 = 1$.

Problema 6. Se considera la función $f(x) = x(1 - x)$ definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Demostrar que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo $(0, 1)$ del eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de f.

Solución: Consideremos la gráfica $y = f(x)$ como en el siguiente diagrama y busquemos valores de x y a de modo que $y = f(x) = f(x + a) = a$ y, así, se forme un cuadrado como el pedido en el enunciado:



(Los puntos de corte de la parábola con

el eje OX son 0 y 1). Resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(1-x) &= a \\ (x+a)(1-x-a) &= a \end{aligned}$$

Desarrollando la segunda, obtenemos

$$a = x(1-x) - xa + a - ax - a^2.$$

Haciendo uso de la primera ecuación $x(1-x) = a$, quedará

$$a = a - 2xa + a - a^2,$$

así que $a^2 = a - 2xa = a(1-2x)$ o, lo que es equivalente

$$a(a - 1 + 2x) = 0$$

que tiene las soluciones $a = 0$, que no conduce a nada, y

$$a = 1 - 2x, \quad \text{o sea} \quad x = \frac{1-a}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación $a = x(1-x)$, tendremos

$$a = \frac{1-a}{2}\left(1 - \frac{1-a}{2}\right) = \frac{1-a}{2}\frac{1+a}{2} = \frac{1-a^2}{4}.$$

Es decir, $a^2 + 4a - 1 = 0$, de donde, $a = -2 \pm \sqrt{5}$. De las dos elecciones posibles, solo es válida la positiva y, así,

$$a = -2 + \sqrt{5}$$

y, también,

$$x = \frac{1-a}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Puede comprobarse que $f(x) = f(x+a) = -2 + \sqrt{5}$.

Solución alternativa: Sea h la altura a la que se situa el máximo de la parábola. Para cada y en el intervalo $[0, h]$ hay dos valores posibles de x tales que $y = f(x)$. De ese modo quedan definidas dos funciones continuas $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, digamos $g_1 < g_2$ (se pueden calcular explícitamente, pero no es importante para el siguiente razonamiento). Así, cada valor de y define un rectángulo con dos vértices sobre la parábola y otros dos sobre el eje OX, que tendrá anchura $g_2(y) - g_1(y)$ y altura y. Consideremos la función:

$$G(y) = g_2(y) - g_1(y) - y.$$

Los valores de y para los que $G(y) = 0$ son aquellos que definen un cuadrado como el pedido, porque, en ese caso, la anchura $g_2(y) - g_1(y)$ coincidirá con la altura y. Pero siempre habrá valores de y tales que anulen a G porque

$$G(0) = g_2(0) - g_1(0) > 0, \quad \text{mientras que} \quad G(h) = g_2(h) - g_1(h) - h = -h < 0$$

Problema 7. Sean n y k números naturales.

a) Probar que, si k es impar, en la factorización del polinomio $x^k + 1$ aparece el factor $x + 1$.

b) Demostrar que si $2^n + 1$ es múltiplo de $n - 1$, entonces $2^{(2^n+2)} + 2$ es múltiplo de $2^n + 2$.

Solución: Para la parte a) basta observar que -1 es solución de $x^k + 1$ cuando k es impar.

Para la parte b), por hipótesis, $2^n + 1 = k(n-1)$, para algún número natural k que tendrá que ser, necesariamente, impar. Sustituyendo tendremos

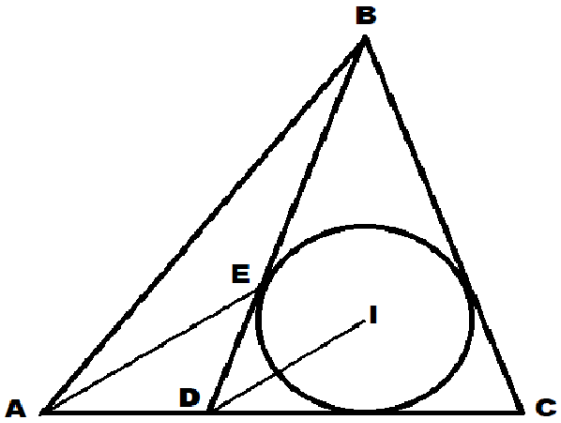
$$2^{2^n+2} + 2 = 2\left(2^{2^n+1} + 1\right) = 2\left(2^{k(n-1)} + 1\right).$$

Ahora aplicamos la parte a) para el valor $x = 2^{n-1}$, resultando que

$$2^{2^n+2} + 2 = \text{múltiplo de } 2\left(2^{(n-1)} + 1\right),$$

es decir, un múltiplo de $2^n + 2$, como queríamos probar.

Problema 8. Sea BCD un triángulo isósceles con $\overline{BC} = \overline{BD}$. Sea, también, I el centro de la circunferencia inscrita en él y E el punto de tangencia de dicha circunferencia con el lado BD. Consideremos el punto A de la recta DC tal que $\overline{DC} = 2\,\overline{AD}$ (el punto A es exterior al segmento DC). Demostrar que $\widehat{EAD} = \widehat{IDC}$.



Solución: Sea F el punto medio del segmento DC (justo donde dicho segmento es tangente a la circunferencia, dado que el triángulo BDC es isósceles). En consecuencia, ED y DF son tangentes al círculo inscrito en BDC y además $ED = DF = AD$. Por otro lado, el segmento DI será la bisectriz de $\widehat{EDF}$. Es decir,

$$\widehat{IDF} = \frac{1}{2}\widehat{EDF}.$$

De $AD = DE$ obtenemos

$$\widehat{EAD} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}\left(180^{\circ} - \widehat{ADE}\right) = \frac{1}{2}\widehat{EDF} = \widehat{IDF},$$

o sea, igual a $\widehat{IDC}$.