LIV Olimpiada Matemática Española

Fase local Univ. Salamanca

Primera sesión

Viernes tarde, 11 de enero de 2019

1. Tenemos cinco números reales $a < b < c < d < e$. Sumamos todas las parejas de estos números y anotamos las diez sumas. Las tres menores sumas son 32, 36 y 37; y las dos mayores son 48 y 51. Determinar, razonadamente, el valor de e.

2. Entre todas las cuaternas $a < b < c < d$, cuyos elementos pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2018, 2019\}$, llamamos *curiosas* a las que verifican la condición $((d-b)/(d+b)) = ((c-a)/(c+a))$. Y se llaman *peculiares* a las que cumplen la condición $((d-c)/(d+c)) = ((b-a)/(b+a))$. Demostrar que toda cuaterna *curiosa* es *peculiar*, y determinar todas las cuaternas *curiosas* que contienen al número 2019.

3. En un tablero de tamaño 4x4 se desarrolla el siguiente juego. Se comienza con una ficha situada en la casilla inferior izquierda. Esta ficha se desplaza hacia casillas contiguas (las que tienen un lado común), alternando movimientos horizontales y verticales, empezando con un movimiento horizontal. El juego termina cuando se llega por primera vez a la casilla superior derecha, siempre que se haya pasado antes por la esquina superior izquierda. Demostrar que en todo juego finalizado con movimientos legales existen dos casillas contiguas a y b tales que nuestra ficha se ha movido al menos dos veces desde a hacia b.

4. Sea $ABCD$ un trapecio, con AB paralelo a CD, y tal que $AB > CD$; el trapecio tiene una circunferencia inscrita y además AD es perpendicular a AB. La circunferencia inscrita (de centro I) es tangente a los lados AB, BC, CD y DA en los puntos P, R, S y T, respectivamente. Sea M el punto de intersección de PS y RT. Demostrar que A, M y C están alineados.

No está permitido el uso de calculadoras ni otros dispositivos electrónicos.
En particular, los teléfonos móviles deben estar desconectados.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de la sesión es de 4 horas y media.
Se deben entregar todos los problemas y por separado.

LIV Olimpiada Matemática Española

Fase local Univ. Salamanca

Segunda sesión

Sábado mañana, 12 de enero de 2019

5. Sean $a > 0$ y $b < 0$ las soluciones de la ecuación $x^2 = x + 1$. Sea t_n la sucesión de término general $t_n = a^n - b^n$, $n \geq 1$. Escribir los 4 primeros términos de esta sucesión en función de los 4 primeros términos de la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ (sucesión de Fibonacci).

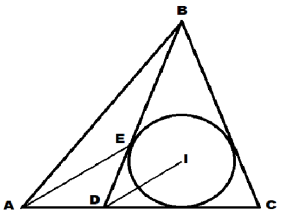
6. Se considera la función $f(x) = x(1-x)$ definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Demostrar que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo $(0, 1)$ del eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de f.

7. Sean n y k números enteros.

a) Probar que, si k es impar, en la factorización del polinomio $x^k + 1$ aparece el factor $x + 1$.

b) Demostrar que si $2^n + 1$ es múltiplo de $n - 1$, entonces $2^{(2^n+2)} + 2$ es múltiplo de $2^n + 2$.

8. Sea BCD un triángulo isósceles con $\overline{BC} = \overline{BD}$. Sea, también, I el centro de la circunferencia inscrita en él y E el punto de tangencia de dicha circunferencia con el lado BD. Consideremos el punto A de la recta DC tal que $\overline{DC} = 2\,\overline{AD}$ (el punto A es exterior al segmento DC). Demostrar que $\widehat{EAD} = \widehat{IDC}$.



No está permitido el uso de calculadoras ni otros dispositivos electrónicos.
En particular, los teléfonos móviles deben estar desconectados.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de la sesión es de 3 horas y media.
Se deben entregar todos los problemas y por separado.