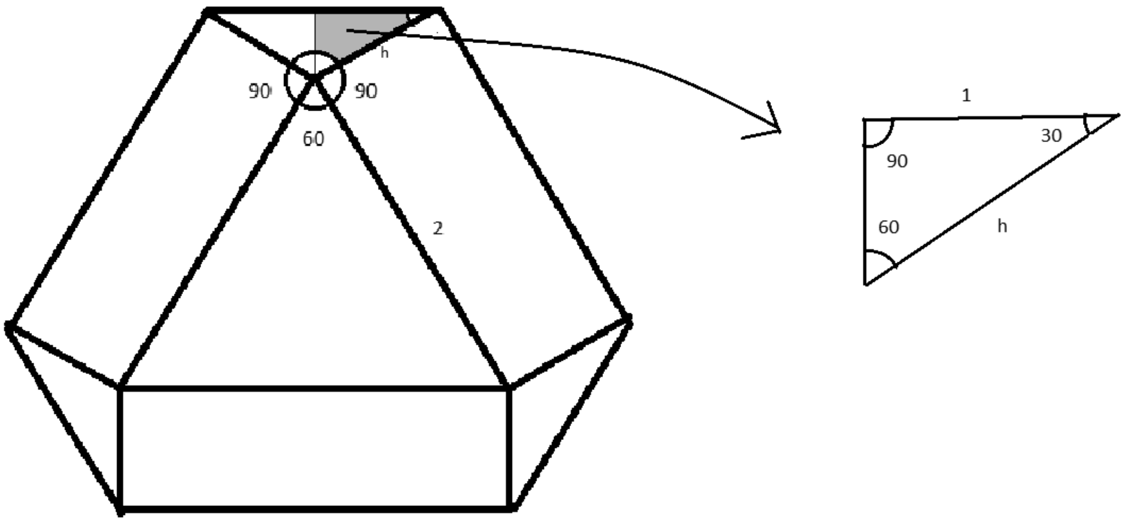
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE LA LIII OME (SALAMANCA)

1. Sobre los lados de un triángulo equilátero de 2 metros de lado se construyen rectángulos iguales y se unen los vértices exteriores consecutivos. Calcular la altura de uno de los rectángulos para que el hexágono así construido sea regular.

Solución. Sea h la altura de los rectángulos que se unen al triángulo equilátero. El hexágono debe tener lados de 2 metros. De los datos del problema obtenemos el siguiente diagrama donde son deducidos los ángulos que se indican a partir de relaciones elementales.



Como consecuencia tiene que ser $1 = \cos(30)\, h = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) h$. Por tanto $h = 2/\sqrt{3}$ es la altura de los rectángulos buscados.

2. Considera la siguiente tabla infinita:

4	7	10	13	16	19	$\cdots$
7	12	17	22	27	32	$\cdots$
10	17	24	31	38	45	$\cdots$
13	22	31	40	49	58	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

a) Demuestra que el número k que está en la fila "m" y la columna "n" es:

$$n(2m+1)+m.$$

b) Demuestra que si un número k pertenece a la tabla, entonces $2k+1$ no es primo.

Solución. a) La primera fila es una progresión aritmética de diferencia 3, la segunda fila es también una progresión aritmética, pero de diferencia 5, la tercera lo mismo con diferencia 7, etc. Por tanto, el elemento n-ésimo de la fila m-ésima se obtiene sumando al primer número de dicha fila el impar 2m+1 una cantidad n-1 de veces. Por otro lado, la primera columna es una progresión aritmética de diferencia 3, partiendo de 4. Por eso, el primer elemento de la fila m-ésima es 4+(m-1)3=3m+1. Por tanto, el número que ocupa la fila m, columna n es

$$3m+1+(n-1)(2m+1)=3m+1+n(2m+1)-2m-1=n(2m+1)+m$$

b) Sustituyendo la fórmula obtenida en a), tenemos

$$2k+1=2(n(2m+1)+m)+1=4nm+2n+2m+1=(2n+1)(2m+1)$$

que no es un número primo pues factoriza.

3. Sea E una elipse (puede tomarse la de ecuación $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, por ejemplo) y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1; A_2, B_2; y A_3, B_3; respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 yA_3B_3 están alineados.

Solución 1. *El resultado es inmediato en el caso de que la elipse sea una circunferencia. Esta tres rectas determinan tres cuerdas y sus puntos medios son los puntos de corte de las rectas con un diámetro perpendicular a todas ellas. En otro caso, pensando en la elipse como la intersección de un cono con un plano (el cono de Apolonio), la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono nos da una circunferencia y las rectas paralelas se proyectan en rectas paralelas.*

Solución 2. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. *Entre todas las rectas de pendiente dada* m *consideraremos dos particulares: en primer lugar la que pasa por el origen,* O, $y=mx$. *Por simetría, el origen será precisamente el punto medio de los dos puntos en que esta recta corta a la elipse; a continuación, consideramos una de las dos rectas tangentes a la elipse con esta pendiente* m *en el punto que llamamos* P. *Si nuestras rectas* r_1, r_2 *y* r_3 *tienen pendiente* m *y los puntos medios de los puntos de corte con la elipse van a estar alineados, estos puntos medios deben estar sobre la recta que pasa por* O *y* P.
Tomemos una recta con ecuación $y=mx+c$ *y determinemos sus intersecciones con la elipse,* A *y* B, *con coordenadas respectivas,* (x_A,y_A) *y* (x_B,y_B). x_A *y* x_B *serán las soluciones para la ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

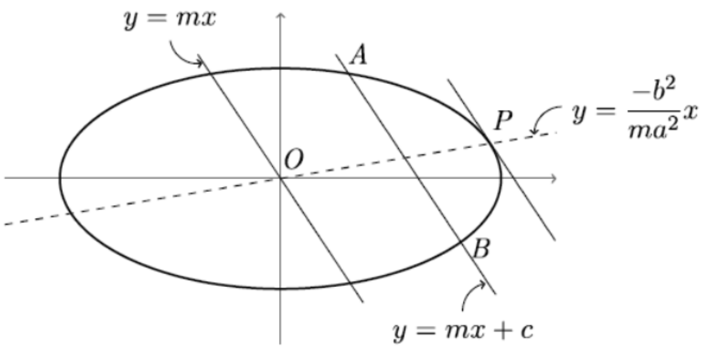
es decir,

$$(b^2+m^2a^2)x^2+(2ma^2c)x+a^2c^2-a^2b^2=0,$$

que vienen dadas por

$$\frac{-2ma^2c\pm\sqrt{(2ma^2c)^2-4(b^2+m^2a^2)(a^2c^2-a^2b^2)}}{2(b^2+m^2a^2)},$$

una para cada signo. Por lo tanto, si el punto medio tiene por coordenadas (x_M,y_M), *entonces* $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-ma^2c}{b^2+m^2a^2}$ *e* $y_M=mx_M+c=\dfrac{b^2c}{b^2+m^2a^2}$, *que están sobre la recta* $y=\dfrac{y_M}{x_M}x=\dfrac{-b^2}{ma^2}\,x$, *que es independiente del valor de* c *de la recta particular elegida.*



Solución 3. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *y que la pendiente común de* r_1, r_2 *y* r_3 *es* m. *La transformación,* f, *definida por*

$$(x', y') = f(x,y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$$

convierte la elipse en una circunferencia de ecuación $x'^2 + y'^2 = 1$, *y una recta de ecuación* $y = mx + c$ *en una recta de ecuación* $by' = max' + c$, *es decir,* $y' = \dfrac{ma}{b}x + \dfrac{c}{b}$. *Por tanto, las imágenes por* f *de* r_1, r_2 *y* r_3 *serán tres rectas que cortan a la circunferencia formando tres cuerdas paralelas entre sí, y sus puntos medios estarán entonces sobre el diámetro ortogonal a todas ellas, es decir, sobre la recta de ecuación* $y' = -\dfrac{b}{ma}x'$. *Como* f *conserva los puntos medios, por linealidad, los puntos medios de* A_1B1, A_2B_2 *y* A_3B_3 *estarán sobre la recta* $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{b}{ma}\dfrac{x}{a}$, *es decir,* $y = -\dfrac{b^2}{ma^2}x$, *el diámetro conjugado de* $y = mx$.

Problema 4

Determinar los valores reales de *a* para los que la ecuación

$$x^2+(a-2)x-(a-1)(2a-3)=0$$

tiene dos raíces, una de las cuales es el cuadrado de la otra.

Solución

El discriminante de la ecuación es $D=(a-2)^2+4(a-1)(2a-3)=(3a-4)^2$.

Entonces las dos raíces de la ecuación son $x_1=a-1, x_2=-2a+3$.

Si $x_1={x_2}^2 \Leftrightarrow a-1=(-2a+3)^2 \Leftrightarrow 4a^2-13a+10=0$, de donde $a\in\left\{2,\frac{5}{4}\right\}$.

Si $x_2={x_1}^2 \Leftrightarrow -2a+3=(a-1)^2 \Leftrightarrow a^2=2$ de donde $a=\pm\sqrt{2}$. ■

Problema 5

Encontrar razonadamente los números primos *p, q, r* sabiendo que uno de los números *pqr* y *p+q+r* es 101 veces el otro.

Solución

Podemos suponer que el mayor de los tres primos es *r*. Entonces $p+q+r\le 3r$ y $pqr\ge 4r$, así que la suma de los tres primos is siempre menor que su producto. Entonces de acuerdo con el enunciado,

$$pqr=101(p+q+r).$$

Pero 101 es primo, de manera que uno de los tres primos debe ser 101.

Supongamos que *r = 101.* Entonces $pq=p+q+101$. Esto se puede escribir como $(p-1)(q-1)=102$. Ya que $102=1\cdot 102=2\cdot 51=3\cdot 34=6\cdot 17$, las posibilidades para $\{p,q\}$ son $\{2,103\},\{3,52\},\{4,35\},\{7,18\}$. Pero el único caso en que ambos números son primos es el primero. Luego la única solución del problema es $\{p,q,r\}=\{2,101,103\}$. ■

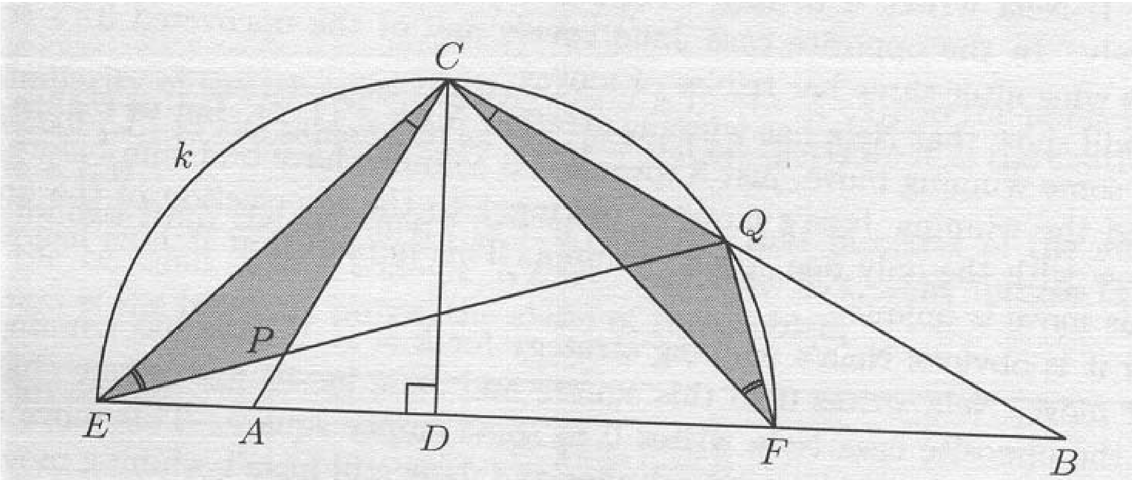
Problema 6

Sea ABC un triángulo rectángulo en C, con hipotenusa AB y cateto más largo BC. Sea D el pie de la altura desde C. La circunferencia *k*

de centro D y radio CD corta a BC en el punto Q y a la recta AB en dos puntos distintos, E y F, donde F está en la hipotenusa AB. El segmento QE corta al cateto AC en un punto P. Demostrar que PE = QF.

<u>1ª Solución</u> (Euclídea)

EF es el diámetro de la circunferencia *k*. El triángulo EFC es rectángulo isósceles, de manera que EC = CF. Demostraremos que los triángulos EPC y FQC son congruentes, lo que terminará el problema.



En la figura, $P = AC \cap EQ$. Los ángulos CEQ y CFQ son iguales porque son ángulos inscritos que abarcan la misma cuerda, CQ, de *k*. Los ángulos ECF y ACB son los dos rectos, así que son iguales. Por lo tanto los terceros ángulos de los dos triángulos son iguales también. Como además CE = CF, los dos triángulos son iguales y EP = FQ.■

<u>2ª Solución</u> (Analítica)

No hay pérdida de la generalidad en suponer D como el origen de coordenadas, y el radio de *k* igual a 1. Las coordenadas de algunos de los puntos relevantes en el problema son entonces

E(-1,0); A(-*m*,0); D(0,0); F(1,0); B(*n,0*); C(0,1).

Observemos que -1<-m<0 y que 1<n.

El teorema de la altura en el triángulo ABC (altura desde C) nos da

$$1 = mn \quad (*).$$

Este hecho, que se puede también obtener aplicando el teorema de Pitágoras en ABC, es importante porque nos permitirá expresar todo en función de uno de los parámetros *m* y *n*. Elegiremos *n.*

La ecuación de BC es $y=1-\frac{x}{n}$. La ecuación de *k* es $x^2+y^2=1$. Los puntos de intersección de *k* con BC son C y Q. Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones y teniendo en cuenta que la solución x = 0 corresponde al punto C, se obtiene para la abscisa de Q el valor

$$x_Q=\frac{2n}{n^2+1}, \text{ y para la ordenada, } \quad y_Q=\frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Entonces, la ecuación de la recta EQ, en sus términos más simplificados, es

$$EQ\equiv y=\frac{n-1}{n+1}\left(x+1\right)$$

Por su parte, la ecuación de la recta AC es

$$y=1+\frac{x}{m}=1+nx \text{ (por (*))}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de EQ y AC obtendremos las coordenadas de P:

$$x_P=-\frac{2}{n^2+1};\ y_P=\frac{\left(n-1\right)^2}{n^2+1}.$$

Calculando, finalmente, EP^2 y FQ^2 se obtiene

$$EP^2=FQ^2=\frac{2\left(n-1\right)^2}{n^2+1}, \text{ y hemos terminado}.\ \blacksquare$$

Problema 7

Determinar cuántos triángulos rectángulos de lados enteros tienen uno de sus catetos de longitud $a = 75 \cdot 2^{135}$.

Buscamos enteros positivos m (hipotenusa) y n (el otro cateto) tales que $m^2 - n^2 = a^2$, lo que factorizado se expresa como

$$\underbrace{(m+n)}_{x} \cdot \underbrace{(m-n)}_{y} = \underbrace{2^{270} \cdot 3^2 \cdot 5^4}_{a^2}.$$

Puesto que $x = m + n$ tiene la misma paridad que $y = m - n$, buscamos factorizaciones de a^2 como producto de dos factores x, y de la misma paridad, necesariamente ambos pares.

Para cada una de estas factorizaciones con $x < y$, ambos pares, podremos definir

$$m = \frac{x+y}{2}, n = \frac{x-y}{2}$$

y se tendrá un triángulo rectángulo válido con catetos a, n e hipotenusa m.

Contaremos el número de divisores pares d de a^2 tales que $\frac{a^2}{d}$ sea par. Un tal d es de la forma

$$d = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k, \quad \text{con } 1 \leq i \leq 269, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 4$$

¿Cuántos d hay? Tantos como ternas de exponentes (i, j, k) satisfaciendo las restricciones anteriores, es decir, $269 \cdot 3 \cdot 5 = 4035$. Pero de estos 4035 divisores pares, uno no sirve, el correspondiente a caso $i = 135, j = 1, k = 2$ (pues corresponde a la factorización $a^2 = a \cdot a$, que obligaría a definir $m = a^2, n = 0$, con lo cual no es posible formar un triángulo), y cualquier otro trío $(i, j, k) \neq (135, 1, 2)$ tiene asociado un compañero simétrico $(270 - i, 2 - j, 4 - k)$, que da lugar a la misma factorización (salvo el orden), y estas dos ternas deben ser contadas como el mismo triángulo rectángulo.

Por lo tanto, el número de triángulos rectángulos distintos es

$$\frac{4035 - 1}{2} = 2017.$$