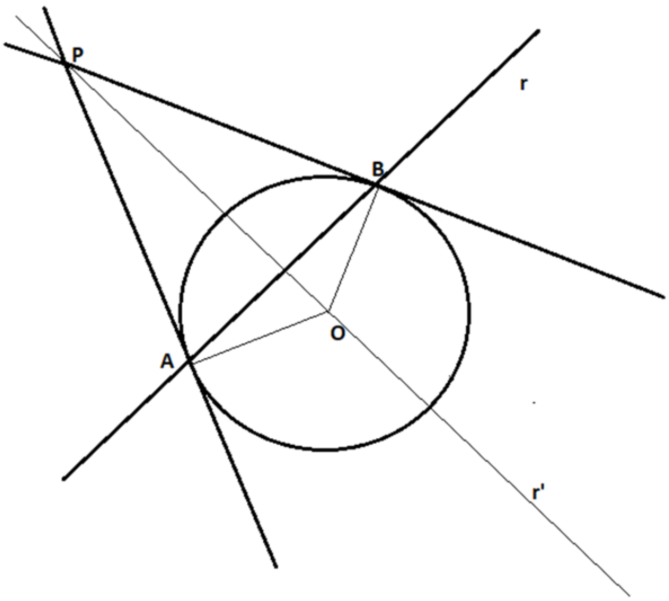
SOLUCIONES PROBLEMAS LII OLIMPIADA (FASE LOCAL, SALAMANCA)

1. Considera una circunferencia cualquiera y una recta r que la corta determinando una cuerda AB que no es un diámetro. Las tangentes en A y en B se cortan en un punto P, que se llama *polo* de la recta r; a su vez la recta r se llama *polar* del punto P. Si se fija la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se pide:

a) Determinar el polo de la recta $x - y + 1 = 0$.

b) Determinar la polar del punto $(7, 0)$.

Solución. a) La recta r' que pasa por P y por el centro de la circunferencia es perpendicular a r. Sea O el centro de la circunferencia, que es el origen de coordenadas. Así mismo, los radios OA y OB son perpendiculares a las tangentes por A y B, respectivamente. Como r tiene por ecuación x-y+1=0, se deduce que r' es x+y=0. Además, los puntos A y B son las soluciones comunes de $x^2+y^2=25$ y de x-y+1=0. El cálculo da A=(-4, -3) y B=(3,4). En particular, la recta que prolonga PB es la que pasa por B, con vector director v=(-4,3) (que es un vector perpendicular a OB): puntos (x,y)=(3,4)+t(-4,3)=(3-4t,4+3t), donde t es un parámetro. Calculando la intersección de dicha recta con r', se obtiene P: 0=3-4t+(4+3t)=7-t. Es decir, P=(-25,25).



b) Siguiendo el mismo esquema, sea, ahora, P=(7,0) y calculemos r. Como debe ser perpendicular al vector OP=(7,0), se deduce que su ecuación es x=c, para alguna constante c. En ese caso, los puntos A y B de corte de r con la circunferencia serán $(c, \pm\sqrt{25-c^2})$. Aplicando, por ejemplo, el hecho de que OA es perpendicular a AP, tenemos la anulación del siguiente producto escalar: $0=(c, \sqrt{25-c^2})\cdot(c-7, \sqrt{25-c^2})=c^2-7c+25-c^2=-7c+25$; es decir, c=25/7 y, por tanto, la recta polar es x=25/7.

2. Con baldosas cuadradas de lado k decímetros (k es un número entero) se ha enlosado una habitación de superficie igual a 18144 decímetros cuadrados de la siguiente manera: el primer día se puso una baldosa, el segundo dos baldosas, el tercero tres, etc., hasta que el n-ésimo y último día se colocaron n baldosas completando la obra. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

Solución. Supongamos que fueron necesarias n baldosas y que su tamaño es $k \times k$. Entonces $nk^2 = 18144 = 2^5 \times 3^4 \times 7$. Hay nueve casos posibles para n, a saber, 2×7, $2^3 \times 7$, $2^5 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 7$, $2^5 \times 3^2 \times 7$, $2 \times 3^4 \times 7$, $2^3 \times 3^4 \times 7$, $2^5 \times 3^4 \times 7$. Además este número tiene que poderse expresar en la forma $1+2+3+\cdots+N = N(N+1)/2$ y esto sólo es posible en el caso sexto: $2^5 \times 3^2 \times 7 = 63 \times 64/2 = 2016$. Para descartar los otros casos rápidamente observamos que N y $N+1$ son números primos entre sí. Si por ejemplo $N(N+1)/2 = 2^3 \times 7$, tendría que ser $N+1 = 2^4$ y $N = 7$, que es imposible, etc. Por tanto, se necesitaron 2016 baldosas.

3. *a*) Dadas cuatro cifras diferentes a, b, c, d, determina cuántas variaciones ordinarias hay de estas cuatro cifras tomadas de dos en dos y cuánto vale la suma de los números así formados.

b) Halla un número de cuatro cifras diferentes que sea igual a la suma de los números de dos cifras que se pueden obtener formando todas las variaciones ordinarias de dichas cuatro cifras tomadas de dos en dos.

Solución. a) El número de variaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2 es $V_{4,2}=4\cdot 3=12$. Entre todos los números formados, cada cifra a,b,c,d ocupa la posición de las unidades 3 veces y otras tantas la de las decenas. Por tanto, la suma total es:

$$3\cdot 10\cdot(a+b+c+d)+3\cdot(a+b+c+d) = 33\cdot(a+b+c+d)$$

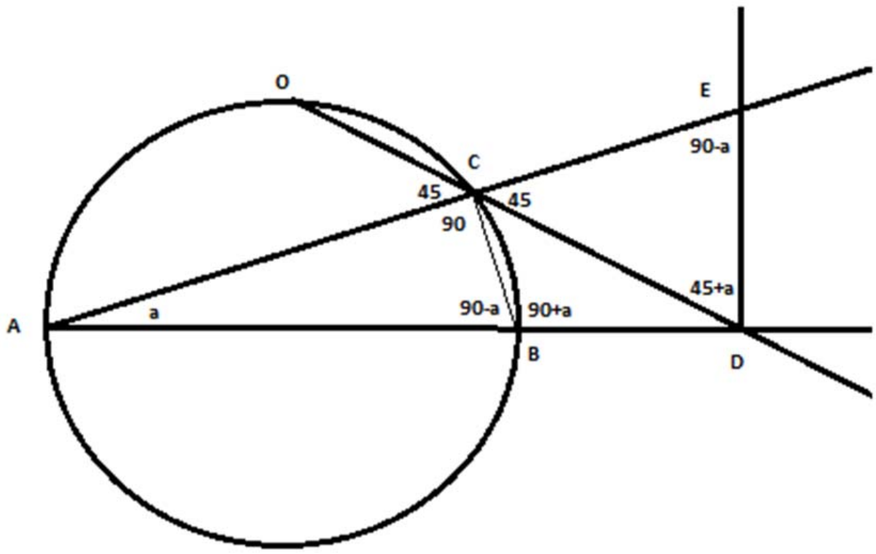
b) Se busca que el número abcd cumpla abcd=33·(a+b+c+d), luego abcd es múltiplo de 3 y de 11 (luego, de 33). En particular, la suma de sus cifras a+b+c+d debe ser múltiplo de 3. Por tanto abcd es múltiplo de 99. Es decir, abcd=99·AB, para cierto número AB, entre 1 y 99. Pero la suma de las cifras de un número de la forma 99·AB es siempre 18:

$$99\cdot AB = 100\cdot AB-AB = AB00-AB = \text{(cifras)} = A(B-1)(10-A+1)+(10-B)$$

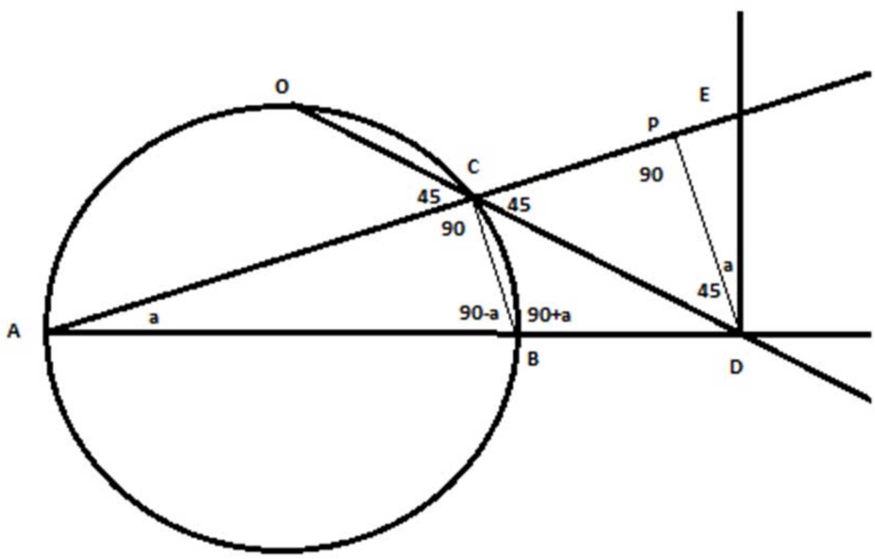
cuyas cifras suman A+(B-1)+(10-A+1)+(10-B) = 18. En consecuencia, el número buscado tiene que ser 33·18=0594.

4. Sean AB el diámetro de una circunferencia, O el punto medio de uno de los arcos que van de A a B, y C un punto cualquiera del arco OB. Sea D el punto de intersección de la recta OC con la recta AB; y sea finalmente E el punto en el que la perpendicular a la recta AB por el punto D corta a la recta AC. Demostrar que los segmentos BD y DE tienen la misma longitud.

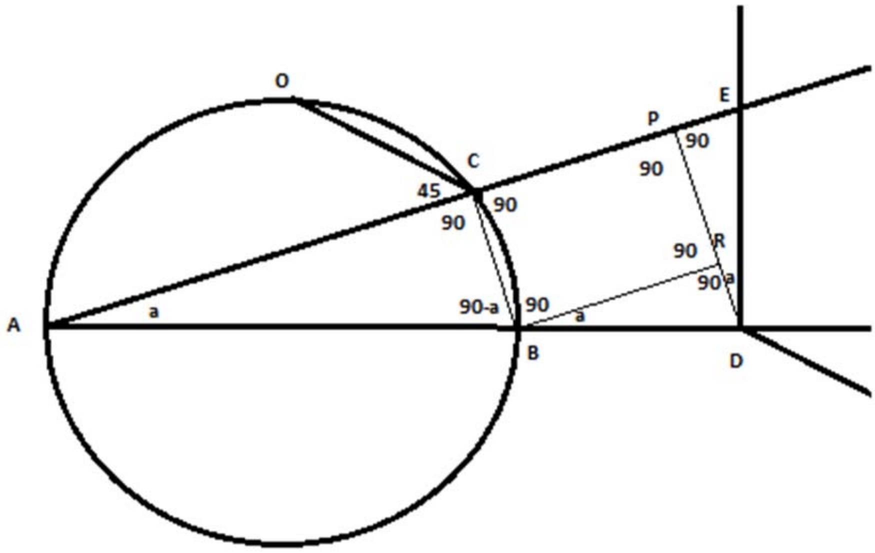
Solución. Siguiendo el enunciado y aplicando algunas relaciones elementales (ángulos complementarios, arco abarcado, suma de ángulos interiores a un triángulo, etc.) construimos la siguiente figura donde quedan determinados un cierto número de ángulos en función del ángulo a (medidos en grados):



Trazamos una perpendicular desde el punto D hasta la recta AE, denotando el punto de apoyo por P:



Se deduce la igualdad de los segmentos CP y DP. Trazamos, finalmente, desde B una paralela a CP. El punto de corte de dicha paralela con el segmento DP lo denotamos R.



Los triángulos BRD y DPE son semejantes. Puesto que los segmentos CP y BR son iguales, resulta que dichos triángulos son idénticos. En particular, sus hipotenusas BD y ED son iguales, como se quería demostrar.

5. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Hallar B.

Solución. Sean u, v y w las tres raíces y supongamos que $w^2 = u^2+v^2$. Por las relaciones de Cardano, $u+v+w = 14$, $uv+uw+vw = B$ y $uvw = 84$. Si $s = u+v$ y $p = uv$, se tiene entonces que $s+w = 14$, $pw = 84$ y $s^2 = w^2+2p$. Sustituyendo en esta última ecuación los valores de s y p en función de w y operando, queda $w^2 - 7w + 6 = 0$, luego $w = 1$ ó 6. Si fuera $w = 1$, tendríamos $s = 13$, $p = 84$ y u y v serían raíces de $x^2 - 13x + 84 = 0$, que no tiene soluciones reales. Por tanto, $w = 6$, $s = 8$, $p = 14$ y $B = p + ws = 62$. (Efectivamente, las tres raíces de $x^3 - 14x^2 + 62x - 84$ son 6, $4+\sqrt{2}$ y $4-\sqrt{2}$ y $6^2 = (4+\sqrt{2})^2 + (4-\sqrt{2})^2$.)

6. En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar una misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

Solución. Si pintamos las casillas del tablero alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, sucede que una ficha cuyo color visible coincida con el de la casilla, al moverse seguirá teniendo el mismo color que la nueva casilla (puesto que tanto el color de la ficha como el de la casilla cambian). Supuesto que la casilla superior izquierda la hemos dejado blanca, en el inicio hay 3 fichas cuyo color (blanco) coincide con el de la casilla. En todo momento deberá suceder que el color de tres fichas es el mismo que el de la casilla que ocupen (y el de las otras dos, diferente). Sin embargo, colocando las fichas con la cara negra en la última fila, resulta que sólo dos fichas tendrán el color (negro) de su casilla. Por lo tanto, no es posible colocar las fichas de esta manera.