

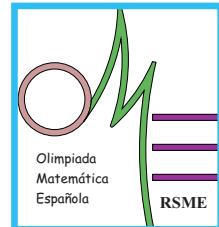


LIII Olimpiada Matemática Española

Fase local Univ. Salamanca

Primera sesión

Viernes mañana, 13 de enero de 2017



1. Sobre los lados de un triángulo equilátero de 2 metros de lado se construyen rectángulos iguales y se unen los vértices exteriores consecutivos. Calcular la altura de uno de los rectángulos para que el hexágono así construido sea regular.
2. Considera la siguiente tabla infinita:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
...

a) Demuestra que el número k que está en la fila “m” y la columna “n” es:

$$n(2m + 1) + m.$$

b) Demuestra que si un número k pertenece a la tabla, entonces $2k + 1$ no es primo.

3. Sea E una elipse (puede tomarse la de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, por ejemplo) y consideremos tres rectas paralelas r_1 , r_2 y r_3 , cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos $A_1, B_1; A_2, B_2$; y A_3, B_3 ; respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1 , A_2B_2 y A_3B_3 están alineados.

No está permitido el uso de calculadoras.

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

El tiempo de la sesión es de 3 horas y media.

Se deben entregar todos los problemas y por separado.

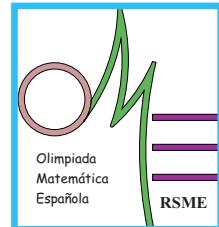


LIII Olimpiada Matemática Española

Fase local Univ. Salamanca

Segunda sesión

Viernes tarde, 13 de enero de 2017



4. Determinar los valores reales de a para los que la ecuación

$$x^2 + (a - 2)x - (a - 1)(2a - 3) = 0$$

tiene dos raíces, una de las cuales es el cuadrado de la otra.

5. Encontrar razonadamente los números primos p, q, r sabiendo que uno de los números pqr y $p + q + r$ es 101 veces el otro.
6. Sea ABC un triángulo rectángulo en C , con hipotenusa AB y cateto más largo BC . Sea D el pie de la altura desde C . La circunferencia k de centro D y radio CD corta a BC en el punto Q y a la recta AB en dos puntos distintos, E y F , donde F está en la hipotenusa AB . El segmento QE corta al cateto AC en un punto P . Demostrar que $PE = QF$.
7. Determinar cuántos triángulos rectángulos de lados enteros tienen uno de sus catetos de longitud $a = 75 \cdot 2^{135}$.

No está permitido el uso de calculadoras.

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

El tiempo de la sesión es de 3 horas y media.

Se deben entregar todos los problemas y por separado.