

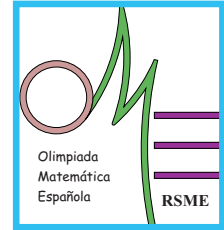


# L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2014



1. Dada la siguiente disposición de los números naturales

			1						
			2	3	4				
		5	6	7	8	9			
10	11	12	13	14	15	16			
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

- (a) Calcula la suma de todos los términos que ocupan la fila 100.
- (b) Generaliza el resultado para calcular la suma de los términos de una fila cualquiera.

2. Sean  $a, b$  números positivos. Probar que

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

3. Un jardinero debe regar un terreno con forma de cuadrilátero convexo con vértices  $A, B, C$  y  $D$ . Para ello coloca aspersores en los puntos  $I, J, K, L$ , que son los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  respectivamente. El aspersor colocado en el punto  $I$  riega una semicircunferencia empezando en el segmento  $IA$  y girando un ángulo de  $180^\circ$  hasta llegar al segmento  $IB$ . Análogamente para el resto de los aspersores, de forma que entre todos riegan cuatro semicírculos.

- (a) Demostrar que si el terreno tiene forma de cuadrado entonces toda la superficie queda regada.
- (b) ¿Es cierto que para cualquier cuadrilátero ocurre lo mismo?

**No está permitido el uso de calculadoras.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

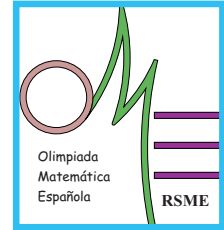


# L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 18 de enero de 2014



4. Sea  $ABC$  un triángulo cuyo ángulo en  $A$  es igual a  $120^\circ$ . Sean  $E$  y  $F$  los puntos de corte de las alturas que pasan por los vértices  $B$  y  $C$  respectivamente con las correspondientes bases. Si  $D$  es el punto medio del lado  $BC$  demostrar que el triángulo  $DEF$  es equilátero.

5. Hallar para qué valores del número real  $a$  todas las raíces del polinomio

$$x^3 - 2x^2 - 25x + a$$

son números enteros.

6. Encontrar las tres últimas cifras del número  $7^{2014}$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**