LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 16 de enero de 2015

1. Los enteros positivos x, y, z cumplen

$$x + 2y = z\,, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

Halla todos los posibles valores del producto xyz.

2. Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\widehat{BAC} = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre la circunferencia de centro A que es tangente a r y a s.

3. Demostrar que si α es una raíz doble del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ entonces α es una raíz simple del polinomio $\frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{3}x + \frac{b}{6}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LI Olimpiada Matemática Española

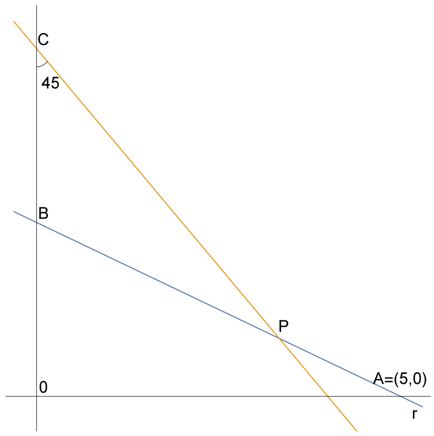
Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 16 de enero de 2015

4. Demuestra que
$$(ax + by)^2 \le ax^2 + by^2$$
para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a + b = 1, a, b \ge 0$. ¿En qué casos se da la igualdad?

5. Sea r una recta que pasa por el punto $A = (5, 0)$ y corta al eje Y en el punto $B = (0, b)$ con $b > 0$. Sean C el punto del eje Y situado a 2 unidades de distancia por encima de B, y P el punto de corte de la recta r con la recta que pasa por C y forma un ángulo de 45° con el eje Y. Determinar la ecuación del lugar geométrico del punto P cuando r gira alrededor de A de modo que el ángulo $\widehat{OAB}$ (donde O representa el origen de coordenadas) pasa de 0° a 90°. ¿Podrías conjeturar qué tipo de curva se obtiene?



6. Sobre los vértices de un polígono regular de 4030 lados, se pueden colocar banderitas de colores, rojas y blancas. Dos jugadores A y B juegan, alternánose turnos (es decir, en un turno juega A, en el siguiente B, luego otra vez A, etc.) En cada turno, el jugador al que le toque jugar elige dos vértices sobre los que no haya banderitas, y coloca una banderita blanca en uno, y otra banderita roja en el otro, pasándose luego al siguiente turno. El juego se inicia con todos los vértices vacíos, y acaba cuando en cada vértice hay una banderita. El objetivo de A es conseguir que haya tres banderas del mismo color (las tres blancas, o las tres rojas) en vértices consecutivos del polígono regular. El objetivo de B es conseguir que esto no suceda. Demostrar que, independientemente de qué jugador inicie el juego, B siempre tiene una estrategia para asegurarse ganar el juego.