PROBLEMA 1

Los enteros positivos x, y, z cumplen

$$x + 2y = z, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310.$$

Halla todos los posibles valores del producto xyz.

Solución 1. Podemos despejar $2y$ de la primera ecuación y sustituir en la segunda, con lo que ha de cumplirse

$$310 = x^2 - (z - x)^2 + z^2 = 2zx, \qquad zx = 155 = 5 \cdot 31.$$

Luego al ser $5, 31$ primos, se tiene que z ha de tomar uno de los valores $155, 31, 5, 1$, tomando x respectivamente los valores $1, 5, 31, 155$. Como además $z = x + 2y > x$, los dos últimos casos quedan descartados. En los dos primeros casos, se tiene que $y = \frac{z-x}{2}$ toma respectivamente los valores 77 y 13, resultando respectivamente en

$$xyz = 1 \cdot 77 \cdot 155 = 11935, \qquad xyz = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015.$$

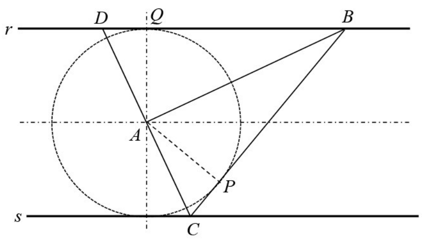
Solución 2. Como $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y) = z(x - 2y)$, tenemos que z ha de dividir a $310 - z^2$, luego a 310. Además, z no puede ser par, pues en ese caso x también lo sería, y $x^2 - 4y^2 + z^2$ sería múltiplo de 4, pero 310 no lo es. Luego z ha de dividir a $155 = 5 \cdot 31$, es decir, z ha de tomar uno de los valores $1, 5, 31, 155$. Como $z = x + 2y$, con x, y enteros positivos, es imposible que $z = 1$, y si $z = 5$, entonces bien $x = 3$, $y = 1$, bien $x = 1$, $y = 2$, que obviamente no satisfacen la segunda ecuación. Se tiene entonces que $z = 31$ o $z = 155$, tomando entonces respectivamente $2y - x = \frac{z^2-310}{z}$ los valores 21 y 153, que junto a $2y + x = z$, nos permite hallar los mismos valores de x, y que por el método anterior, bastando multiplicarlos para hallar los dos mismos valores del producto xyz.

□

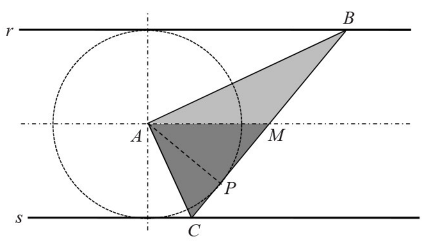
PROBLEMA 2

Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\angle BAC = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

Solución 1. Sea Q el punto de r tal que AQ es perpendicular a r. Sea D el punto donde AC corta a r. Como A está a la misma distancia de las rectas r y s, $AC = AD$. Los triángulos ABC y ABD son ambos rectángulos en A, comparten el lado AB, y el lado AC es igual al lado AD. En consecuencia, ambos triángulos son iguales. Los pies de las alturas desde A en cada triángulo son P y Q, respectivamente, por lo que $AP = AQ$. Como Q no depende de B, la distancia $AP = AQ$ es fija, y el punto P está sobre la circunferencia fija de centro A, que es tangente simultáneamente a las rectas r y s.



Solución 2. Sea M el punto medio del segmento BC. Como el triángulo ABC es rectángulo en A, M es su circuncentro, es decir, $AM = MB = MC$. Llamando d a la distancia de A a las rectas r y s, nótese que la longitud de las alturas desde B y desde C sobre AM es d, con lo que las áreas de AMB y AMC son ambas iguales a $\frac{d \cdot AM}{2}$, y el área del triángulo ABC es $d \cdot AM$. Pero $BC = MB + MC = 2AM$, luego la longitud AP de la altura desde A sobre BC es $2\frac{d \cdot AM}{2AM} = d$, que es constante, concluyendo igual que en la solución anterior.



Solución 3. Si h es la distancia entre A y las rectas r y s, podemos tomar un sistema de coordenadas cartesianas tales que $A \equiv (0,0)$, $r \equiv y = h$, $s \equiv y = -h$, y para cualquier punto $B \equiv (d, h)$, la recta AB tiene pendiente $\frac{h}{d}$, con lo que

$$AC \equiv y = -\frac{dx}{h}, \qquad C \equiv \left(\frac{h^2}{d}, -h\right), \qquad BC \equiv y = \frac{2hdx}{d^2 - h^2} - \frac{h\left(d^2 + h^2\right)}{(d^2 - h^2)}.$$

La ecuación de la recta AP es entonces $y = -\frac{d^2 - h^2}{2hd}x$, con lo que podemos hallar P como la intersección de esta recta con la recta BC, resultando finalmente tras algo de álgebra en

$$P \equiv \left(\frac{2h^2 d}{d^2 + h^2}, -\frac{h\left(d^2 - h^2\right)}{d^2 + h^2}\right), \qquad AP^2 = h^2 \frac{4h^2 d^2 + \left(d^2 - h^2\right)^2}{(d^2 + h^2)^2} = h^2,$$

es decir $AP = h$, concluyéndose como en las soluciones anteriores.

$\square$

PROBLEMA 3

Demostrar que si α es una raíz doble del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ entonces α es una raíz simple del polinomio $\frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{3}x + \frac{b}{6}$.

Solución Si α es una raíz doble, denotando por β la otra raíz de $x^3 + ax^2 + bx + c$, se tiene que

$$x^3+ax^2+bx+c = (x-\alpha)^2(x-\beta) = (x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x-\beta) = x^3+(-2\alpha-\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\beta\alpha^2.$$

Entonces ha de ser

$$\begin{aligned} a &= -2\alpha - \beta \\ b &= \alpha^2 + 2\alpha\beta \\ c &= -\beta\alpha^2, \end{aligned}$$

con lo que $\dfrac{1}{2}\,\alpha^2 + \dfrac{a}{3}\,\alpha + \dfrac{b}{6} = \dfrac{1}{2}\,\alpha^2 - \dfrac{2\alpha+\beta}{3}\,\alpha + \dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta}{6} = 0.$

PROBLEMA 4

Demuestra que

$$(ax+by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a+b=1, a, b \geq 0$. *¿En qué casos se da la igualdad?*

Solución 1. Nótese que

$$ax^2 + by^2 - (ax+by)^2 = a(1-a)x^2 + b(1-b)y^2 - 2abxy = ab(x-y)^2,$$

donde hemos usado que $1-a=b$ y $1-b=a$. Esta expresión es claramente no negativa, siendo nula si y sólo si bien $ab=0$ (es decir, uno de entre a, b es 0 y el otro es 1), bien $x=y$.

Solución 2. Considérense los vectores $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$ y $\left(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y\right)$, cuyo producto escalar es $ax+by$, y cuyos módulos son $\sqrt{a+b}=1$ y $\sqrt{ax^2+by^2}$. La desigualdad propuesta es equivalente a la desigualdad del producto escalar aplicada a estos vectores, y por lo tanto cierta, dándose la igualdad si y sólo si ambos vectores son proporcionales, cosa que puede pasar bien si una de sus coordenadas es nula (es decir, si $a=0$ o $b=0$), bien si ambas coordenadas son proporcionales cuando no son nulas, es decir, $x=y$.

Solución 3. La función $f(z)=z^2$ es claramente convexa, con lo que por la desigualdad de Jensen, para cualesquiera reales no negativos a, b, y cualesquiera reales x, y, se tiene

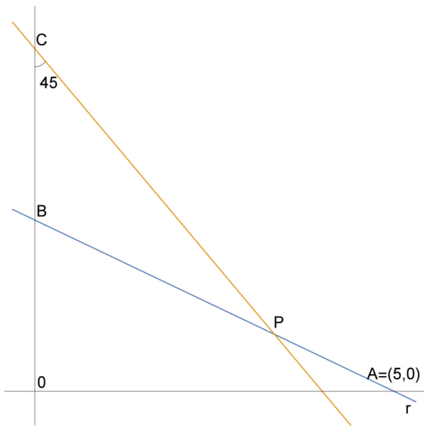
$$(ax+by)^2 = f(ax+by) \leq \frac{af(x)+bf(y)}{a+b} = \frac{ax^2+by^2}{a+b}.$$

Usando que $a+b=1$, se obtiene el resultado pedido, dándose la igualdad bien si uno de los dos puntos "desaparece" (es decir, $a=0$ o $b=0$), o en caso contrario si ambos puntos coinciden (es decir, $x=y$).

$\square$

PROBLEMA 5

Sea r una recta que pasa por el punto $A = (5, 0)$ y corta al eje Y en el punto $B = (0, b)$ con $b > 0$. Sean C el punto del eje Y situado a 2 unidades de distancia por encima de B, y P el punto de corte de la recta r con la recta que pasa por C y forma un ángulo de $45°$ con el eje Y. Determinar la ecuación del lugar geométrico del punto P cuando r gira alrededor de A. ¿Podrías conjeturar qué tipo de curva se obtiene?



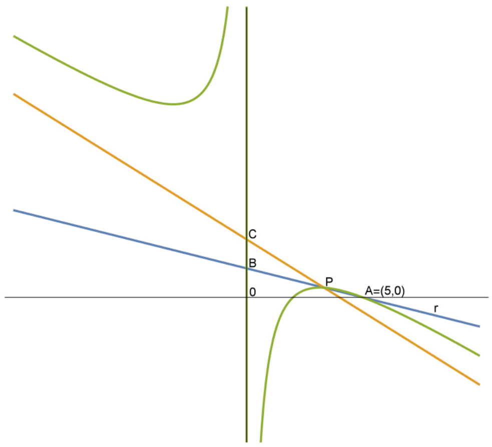
Solución Si $P = (x, y)$, como $B = (0, b)$ y $C = (0, b + 2)$, se tiene que

$$1 = \operatorname{tg}(45°) = \frac{x}{b + 2 - y},$$

de donde $b = x + y - 2$. Por otro lado, la ecuación de r es

$$y = \frac{-b}{5}(x - 5),$$

ya que su pendiente vale $-b/5$ y pasa por A. Entonces $5y = -b(x - 5) = (2 - x - y)(x - 5)$, con lo que P es un punto de la curva $x^2 + xy - 7x + 10 = 0$, que es una cónica ya que responde a la forma general $Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$; como esta ecuación se puede escribir $x(7 - x - y) = 10$ se trata de una hipérbola con asíntotas $x = 0$, $x + y = 7$; otra forma de comprobar que es una hipérbola es observar que para sus coeficientes se cumple $B^2 - 4AC > 0$.



PROBLEMA 6

Sobre los vértices de un polígono regular de 4030 *lados, se pueden colocar banderitas de colores, rojas y blancas. Dos jugadores A y B juegan, alternándose turnos (es decir, en un turno juega A, en el siguiente B, luego otra vez A, etc.) En cada turno, el jugador al que le toque jugar elige dos vértices sobre los que no haya banderitas, y coloca una banderita blanca en uno, y otra banderita roja en el otro, pasándose luego al siguiente turno. El juego se inicia con todos los vértices vacíos, y acaba cuando en cada vértice hay una banderita. El objetivo de A es conseguir que haya tres banderas del mismo color (las tres blancas, o las tres rojas) en vértices consecutivos del polígono regular. El objetivo de B es conseguir que esto no suceda. Demostrar que, independientemente de qué jugador inicie el juego, B siempre tiene una estrategia para asegurarse ganar el juego.*

Solución. Partamos de un vértice cualquiera, recorriendo los vértices del polígono en el sentido de las agujas del reloj, agrupando los dos primeros vértices que encontramos, luego los dos siguientes, y así sucesivamente, de forma que los vértices quedan divididos en 2015 parejas de vértices consecutivos. Nótese que, para que haya tres banderas consecutivas del mismo color, una de estas 2015 parejas ha de tener banderitas del mismo color. El problema se reduce entonces a demostrar que B siempre puede conseguir que en cada pareja de vértices haya banderitas de colores distintos.
Si el primer turno es para el jugador B, coloca sus dos banderas en dos vértices que forman pareja. A partir de ahí, su estrategia es la misma que si el primer turno es para A:

- si A coloca sus banderas en dos vértices que forman pareja, entonces B, en su turno, coloca sus banderas en dos vértices que forman pareja.
- Si A coloca la bandera blanca en un vértice i, y la roja en un vértice j, que no forman pareja, entonces B, en su turno, coloca su bandera blanca en el vértice que forma pareja con el j y su bandera roja en el que forma pareja con el i.

Es obvio que de esta manera B gana, pues evita que pueda haber dos vértices de los que forman pareja con banderas del mismo color.

$\square$