Problema 1

(a) Cuando el sistema está equilibrado se cumple

$$m_1 g\, x = m_2 g\,(0.3 - x) \;\Rightarrow\; \rho_1 V_1 g\, x = \rho_2 V_2 g\,(0.3 - x),$$

siendo 1 la esfera grande, 2 la pequeña y x la distancia entre el pivote y el punto donde está colgada la esfera grande.

Resolvemos la ecuación para obtener x:

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_2}{V_1}\,(0.3 - x) = \frac{5}{2}\frac{1}{3}(0.3 - x) \;\Rightarrow\; x\left(1 + \frac{5}{6}\right) = \frac{5 \cdot 0.3}{6} \;\Rightarrow x = 13.6\text{ cm}$$

(b) Con el sistema sumergido en agua, debemos tener en cuenta los empujes. En la nueva posición de equilibrio se cumple:

$$(P_1 - E_1)\, g\, x' = (P_2 - E_2)\, g\,(0.3 - x')$$

$$\left(\rho_1 - \rho_{H_2O}\right) V_1\, g\, x' = \left(\rho_2 - \rho_{H_2O}\right) V_2\, g\,(0.3 - x')$$

$$\rho_{H_2O}\, V_1\, x' = 4\, \rho_{H_2O}\, V_2\,(0.3 - x')$$

$$x' = 4\frac{V_2}{V_1}(0.3 - x') = \frac{4}{3}(0.3 - x')$$

$$3x' = 1.2 - 4x' \quad \Rightarrow \quad x' = 17.1\text{ cm}$$

(c) Planteamos las ecuaciones de equilibrio en el aire y en el agua con la misma posición de equilibrio x'' en ambas:

$$\rho_1 V_1 g\, x'' = \rho_2 V_2 g\,(0.3 - x'')$$

$$\left(\rho_1 - \rho_{H_2O}\right) V_1\, g\, x'' = \left(\rho_2 - \rho_{H_2O}\right) V_2\, g\,(0.3 - x'')$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_{H_2O}} = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_{H_2O}} \;\Rightarrow\; \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 - \rho_{H_2O}}{\rho_2 - \rho_{H_2O}} \;\Rightarrow\; \rho_1 = \rho_2$$

Por tanto, sólo cuando las dos esferas tienen la misma densidad, el sistema equilibrado en el aire permanece en equilibrio cuando se sumerge en agua.

Problema 2

(a) Al tratarse de interacción coulombiana entre las cargas y no haber rozamiento, la energía total se conserva. La energía total es:

$$E = E_c + E_p = E_c + \mathrm{K}\frac{Q\, q}{r}$$

donde K es la constante de Coulomb y r es la distancia entre las dos cargas. entre Q y la posición de la carga q. Escribiendo la energía potencial elecrostática en función de la distancia horizontal x respecto al punto O se tiene

$$E = E_c + E_p = E_c + \mathrm{K}\frac{Q\, q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

En la posición inicial ($x = 0$ y $E_c = 2$ J) se obtiene que la energía total es

$$E = 2 + 9 \times 10^9 \frac{0.1 \cdot (-1.6 \times 10^{-9})}{0.24} = -4 \text{ J}$$

Cuando la carga q está en $x = 5$ cm, teniendo en cuenta que la energía total se conserva:

$$E_c = E - E_p = -4 - 9 \times 10^9 \frac{0.1 \cdot (-1.6 \times 10^{-9})}{\sqrt{0.24^2 + 0.05^2}} = 1.87 \text{ J}$$

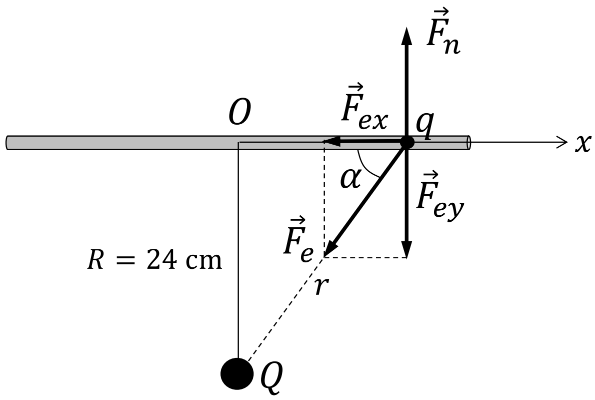
(b) A medida que la carga q se aleja de O, su energía potencial es mayor (menos negativa) y la energía cinética será más pequeña. Así, q va reduciendo su velocidad hasta llegar a un punto en que $E_c = 0$. En ese punto la separación respecto de O es x_{max} y vendrá dada por:

$$0 = E - \text{K} \frac{Q\, q}{\sqrt{x_{max}^2 + R^2}}$$

Despejando obtenemos

$$x_{max} = \sqrt{(\text{K}\, Q\, q/E)^2 - R^2} = 26.8 \text{ cm}$$

(c) Diagrama de fuerzas:



Como no hay movimiento en la dirección vertical, la componente de la fuerza electrostática en esta dirección se compensa con la fuerza normal que ejerce la base del túnel ($F_n = F_{ey}$), mientras que la componente en la dirección x tiende siempre a devolver a la carga q a su posición inicial O ($x = 0$). Por esto último, y por el hecho de que la energía se conserva, la partícula oscilará indefinidamente en torno al punto O. La oscilación será simétrica respecto a dicho punto. Sin embargo, no se trata de una oscilación armónica puesto que la fuerza neta no depende linealmente de la posición. En concreto:

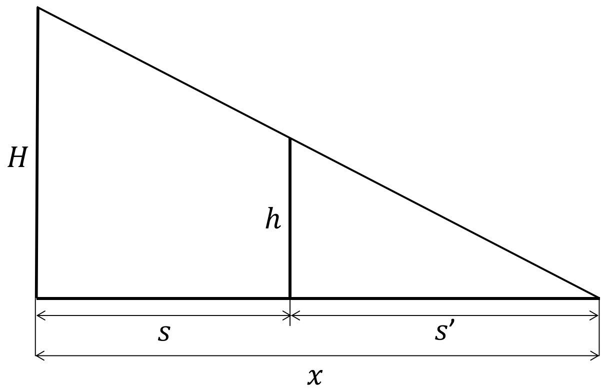
$$F_x = K \frac{Q\, q}{x^2 + R^2} \cos\alpha = K \frac{Q\, q}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = K \frac{Q\, q\, x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Sólo si el desplazamiento en horizontal es muy pequeño en comparación con la distancia que separa las cargas ($x \ll R$) entonces tendremos una oscilación armónica, ya que, en este caso, $x^2 + R^2 \approx R^2$ y entonces

$$F_x = K \frac{Q\, q\, x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{KQq}{R^3} x$$

Problema 3

Hacemos un esquema de la situación que plantea el problema:



donde llamamos s a la distancia entre el peatón y la farola, s' a la distancia entre el peatón y la sombra de la cabeza y x a la distancia desde dicha sombra a la farola.

La velocidad con la que el peatón se mueve hacia la farola es, por tanto, $v_1 = \frac{ds}{dt}$, mientras que la velocidad de la sombra con respecto a la farola es $v = \frac{dx}{dt}$.

(a) Por semejanza de triángulos, se tiene que

$$\frac{h}{H} = \frac{s'}{x} \;\Rightarrow\; h \cdot x = H \cdot s' = H \cdot (s - x)$$

Derivamos con respecto al tiempo:

$$h \cdot \frac{dx}{dt} = H \cdot \left(\frac{ds}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) \;\Rightarrow\; h \cdot v = H \cdot (v - v_1)$$

Despejando v obtenemos

$$v = \frac{H}{H - h} v_1$$

Por tanto, si el peatón se mueve con velocidad constante la velocidad de la sombra también es constante.

(b) Teniendo en cuenta la expresión anterior, la velocidad de la sombra de la cabeza siempre es mayor que la del peatón.

(c) Llamando v' a la velocidad de la sombra respecto del peatón tenemos que

$$v' = \frac{ds'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - s) = \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} = v - v_1$$

Utilizando el resultado del apartado (a) obtenemos

$$v' = \frac{h}{H - h} v_1$$

(d) A partir de la expresión anterior se tiene que:

- $h > H/2 \;\Rightarrow\; v' > v$
- $h < H/2 \;\Rightarrow\; v' < v$
- $h = H/2 \;\Rightarrow\; v' = v$