María Ruso López

Movimiento armónico simple: período, frecuencia, péndulo y muelle

Contexto

Esta actividad está dirigida a alumnos de 2º de bachillerato, los cuales cursan física como optativa. Según la LOMCE 2013, los alumnos de este curso ya deberían conocer estos conceptos (aparecen dentro del curriculum de 1º de bachillerato), por lo que se llevará a cabo una ampliación de los mismos mediante la demostración de las fórmulas y demostraciones presenciales del péndulo y del muelle. Además, deberían conocer:

- Ley de Hooke (2º ESO)
- Gravedad (3º ESO)
- Leyes de Newton y descomposición vectorial (4º ESO)
- Movimiento circular (1º Bachillerato)

Objetivos

Los objetivos de esta actividad son:

- Repasar los conceptos de período y de frecuencia (lineal y angular) definiéndolos y relacionándolos con aspectos de la vida cotidiana. También se repasarán los conceptos de movimiento (periódico y vibratorio), amplitud, espacio angular, espacio lineal, velocidad angular, velocidad lineal y aceleración con el fin de relacionar el movimiento circular con el péndulo y con el muelle.
- Recordar y aplicar la ley de Hooke, la ley de la gravedad y la segunda ley de Newton con el fin de comprender las ecuaciones del muelle y del péndulo.

Herramientas

La actividad se llevará a cabo en clase, empleando la pizarra, un péndulo y un muelle. Los alumnos dispondrán de cuaderno cuadriculado, bolígrafos de colores y calculadora científica. En el caso de las actividades por grupos, se acudirá al laboratorio donde se les proporcionará papel milimetrado y un péndulo y un muelle.

Descripción del desarrollo de la actividad docente

El desarrollo de la sesión constará, en primer lugar, de una explicación teórica de los contenidos y continuará con las demostraciones cuantitativas de los mismos con el fin de alcanzar su comprensión.

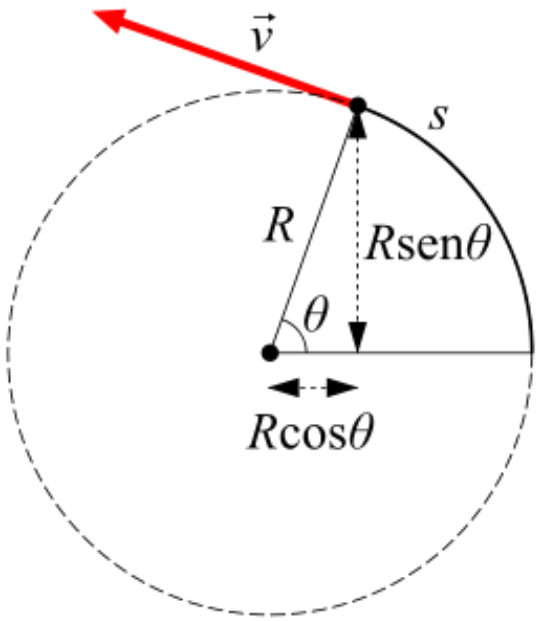
Definiciones:

- **Movimiento periódico:** aquel que se repite a intervalos iguales de tiempo. Por ejemplo: el minutero del reloj y la vibración de la membrana de un tambor.

Se hará hincapié en que no todos los movimientos periódicos son circulares y un claro ejemplo son el muelle y el péndulo (se mostrarán a los alumnos ambos objetos).

- **Movimiento vibratorio**: aquel que se produce a un lado y a otro de una posición de equilibrio estable. En este caso se mostrarán el péndulo y el muelle en clase y se observará el hecho de la oscilación alrededor del equilibrio.

- **Movimiento circular uniforme**: aquel descrito por un cuerpo que se mueve con radio constante, por lo que su trayectoria describe una circunferencia



Espacio angular: ángulo generado en el movimiento. Se mide en radianes.
Espacio lineal: es el espacio recorrido sobre la trayectoria. Se mide en metros
Velocidad angular: ángulo recorrido en la unidad de tiempo. Se mide en radianes por segundo.
Velocidad lineal: distancia recorrida en la unidad de tiempo. Se mide en metros por segundo.

Aceleración: en este movimiento, la velocidad tiene el mismo módulo, pero dirección y sentido varían. De esta manera, esta aceleración se denomina centrípeta debido a que la dirección del vector va en la línea que une la partícula con el centro y el sentido desde la partícula hasta el centro de giro. Se mide en metros por segundo al cuadrado.

- **Período:** tiempo que tarda en repetirse el movimiento. Es el inverso de la frecuencia lineal y se mide en segundos.

Por ejemplo, el tiempo que tarda en llegar el minutero en dar una vuelta completa al reloj.

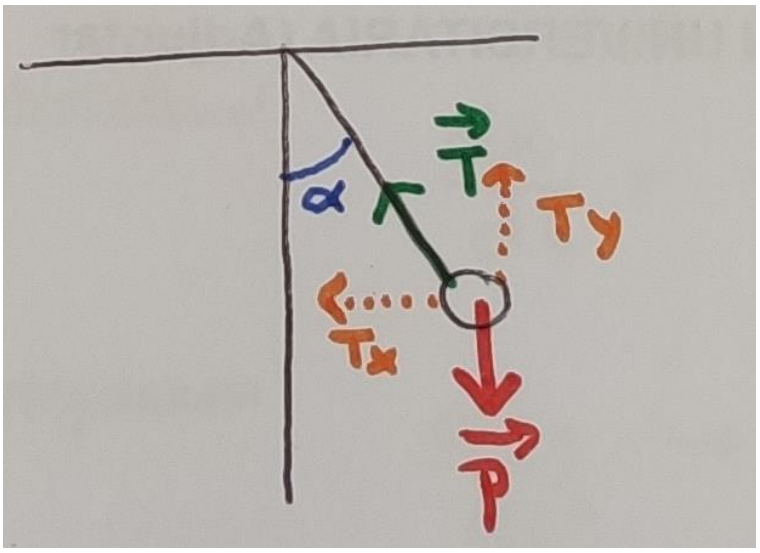
- **Frecuencia lineal:** número de vueltas que realiza el objeto en la unidad de tiempo. Se mide en segundos a la menos uno o Hz y es la inversa del período.

Por ejemplo, el número de vueltas que da el minutero en 120 segundos.

- **Frecuencia angular:** ángulo recorrido durante el giro en la unidad de tiempo. Se mide en radianes por segundo.
- **Amplitud:** máximo desplazamiento que tiene lugar durante una oscilación. Se mide en metros.

Péndulo simple

A continuación, se explicará el péndulo simple, comenzando por una descomposición vectorial.



En segundo lugar, se puede realizar un análisis dimensional para comprobar de que magnitudes depende el período.

$$T = f(m, l, g)$$

$$s = Kg^{\propto} * m^{\beta} * g^{\gamma}$$

$$s = Kg^{\propto} * m^{\beta} * \frac{m^{\gamma}}{s^{\gamma}} = \frac{Kg^{\propto} * m^{\beta+\gamma}}{s^{2\gamma}}$$

- α es 0. El período no depende de la masa
- β + γ es 0 Sustituyendo γ se observa que el período depende del inverso de la raíz de la longitud
- 2 γ es 1. El período depende de la raíz de la gravedad

Si se representa el período frente a la raíz de la longitud y se calcula la pendiente como el cociente del período entre la raíz de la pendiente se obtiene:

$$b = \frac{T}{\sqrt{l}};\ \ T = b * \sqrt{l} = b * \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Se continuará con la demostración de que el período no depende de la masa y para ello se cuantifica el tiempo que tarda el péndulo en realizar diez oscilaciones. Se realizará dos veces, cada una de ellas con bolas de diferente masa. Los resultados obtenidos, por ejemplo, podrían ser:

- Bola grande: 15, 05 segundos en realizar 10 oscilaciones.
- Bola pequeña: 15, 05 segundos en realizar 10 oscilaciones

Para obtener el valor de b se calcula el período para diferentes longitudes y se calcula la pendiente

longitud (m)	**10T**	**T^2**
0,4	13,4	1,69
0,5	15,05	2,25
0,6	15,9	2,56
0,7	17,46	3,06
1	20,58	4,24

Tomando cuadrados: $a = \frac{T^2}{l} = \frac{4{,}24}{1} = 4{,}24;\ \ 4{,}24 = \frac{b^2}{g}$

g= 9,8 m/s^2

Despejando b= $\sqrt{4{,}24 * 9{,}8}$ = 6,5 aprox a 2π

Para demostrar que 2π es el 6,5 obtenido, se tiene en cuenta el movimiento circular, que también es un movimiento en dos dimensiones. La ecuación es:

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

Cuando $\cos(\omega t)$ es igual a 1, se alcanza la amplitud máxima. Entonces:

$$\omega t = \arccos(1) = 2\pi;\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo en la ecuación x(t), la ecuación de la velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega sen(\omega t)$$

$$\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

Comparando

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{l} = 0 \ \text{con}\ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{g}{l};\quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Finalmente se comprueba igualando las dos expresiones:

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Una vez esto, se recordará la **segunda ley de Newton:** “á aceleración que adquiere un cuerpo es proporcional a la fuerza aplicada sobre él” para obtener la ecuación de velocidad y la aceleración.

F=m*a

Descomponiendo el movimiento:

Eje x $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Tx = -Tsen\ \alpha$

Eje y $m\frac{d^2y}{dt^2}$ = -mg + Ty = $-mg + T\cos\alpha$

Si se tiene en cuenta que en el eje x se produce mayor desplazamiento que en el eje y

Y=0

$$-mg + T\cos\alpha = 0$$

$$mg = T\cos\alpha$$

$$-mg + Ty = 0; Ty = mg$$

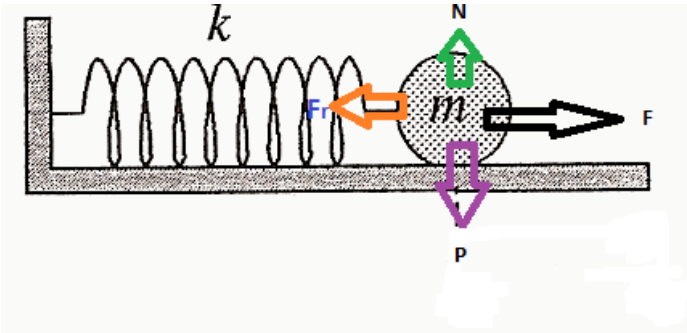
Sustituyendo en la ecuación del eje x obtenemos el valor de la aceleración.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\alpha; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-gx}{l}$$

Muelle

Cabe destacar que este sistema es más sencillo que el péndulo ya que se produce en una sola dimensión.

En primer lugar, se realizará la descomposición de fuerzas, siendo:



- N: la normal
- P: el peso
- F: fuerza ejercida para estirar el muelle
- Fr: la fuerza recuperadora elástica

Seguidamente, debe comentarse que, al soltar el muelle, F es igual a cero. De esta manera, se elimina el equilibrio y el sistema se mueve alrededor de la posición de equilibrio (ir y venir).

Se repasará la ley de Hooke “el alargamiento que experimenta un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo”

$$\mathrm{Fe} = \mathrm{mg} = \mathrm{k}\Delta\mathrm{x}$$

Aplicando la segunda ley de Newton (F = ma), obtenemos:

$$\frac{\mathrm{md}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} = -\mathrm{kx} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} = \frac{-\mathrm{kx}}{\mathrm{m}}$$

Siendo k la constante elástica propia de cada muelle y x el desplazamiento. El signo negativo es debido a que esa fuerza recuperadora se opone al desplazamiento.

Despejando la ecuación

$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{-\mathrm{kx}}{\mathrm{m}} = 0$ puede observarse que la solución, al igual que en el péndulo, vuelve a ser sen / cos.

Si $\mathrm{x(t)} = \mathrm{Acos(\omega t)}$, despejando en la ecuación $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{-\mathrm{kx}}{\mathrm{m}} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{-\mathrm{k\,A\cos(\omega t)}}{\mathrm{m}} = 0$$

Se puede observar por comparación con la ecuación del péndulo ($\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right) = -\mathrm{A}\omega^2\mathrm{cos(\omega t)}$), que $\omega^2 = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$. Por lo que el período $(\mathrm{T} = 2\pi\omega)$ es igual a $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$

De forma experimental, se practicará con el muelle realizando medidas de elongación y de masa y representando la elongación frente a la masa, se calcula la pendiente que es la inversa de la constante elástica

Conclusión

Tenemos dos sistemas diferentes que se comportan de forma similar. Mientas que el período del muelle depende de la constante elástica del mismo y de la masa, el período del péndulo es independiente de la masa, pero dependiente de la longitud de la cuerda y de la gravedad.

Actividades de consolidación y ampliación

Con el objetivo de afianzar conocimientos, se propondrán los siguientes problemas que realizará cada alumno de forma individual.

1. Un péndulo de masa 10 g y 80 cm de longitud se aparta 20º hacia la derecha de su posición de equilibrio y se deja oscilar libremente. Determina: el período y la frecuencia de la oscilación y la ecuación de posición en función del tiempo.
2. Un muelle tiene una longitud de 10 cm. Cuando se cuelga de él un cuerpo de 100 gramos de masa, su longitud en el equilibrio resulta ser de 20 cm. Calcula: la constante recuperadora del muelle. Si desplazamos la masa 5 cm por encima de la posición de equilibrio y la dejamos oscilar libremente, calcula la amplitud de oscilación, la frecuencia y la velocidad con la que pasará por la posición de equilibrio.

Por grupos heterogéneos (a convenir según el número de alumnos) y en el laboratorio, se realizarán las siguientes experiencias:

1. ¿Depende el período de la magnitud de la oscilación en un péndulo?
2. Representa gráficamente la masa frente al período y la constante elástica frente al período empleando un muelle
3. ¿Cambia el valor de la constante del muelle si se corta este por la mitad? En caso afirmativo, ¿de qué manera se modifica el período?

Como actividades de ampliación se propondrán las siguientes para que las realicen de forma individual y opcional:

1. Razona cómo son los movimientos de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes. ¿En qué punto se cruzan?
2. Si tenemos un cuerpo de masa desconocida y un resorte de constante k también desconocida, ¿cómo podremos averiguar el período de oscilación del sistema sin hacerlo oscilar?

Finalmente, como actividades de atención a la diversidad y de refuerzo y enganche, se propondrán:

1. ¿Cuándo se dice que un movimiento es armónico simple?
2. ¿Cuál será el período de oscilación de un muelle si su longitud se reduce a la cuarta parte?
3. Si la amplitud de un movimiento armónicos simple se duplica, calcula cuánto varían el período, la velocidad y la aceleración.
4. Si aplicamos una fuerza de 20N sobre un muelle y provocamos un alargamiento de 30 cm, a) calcula la fuerza que producirá un alargamiento de 20 cm y b) el alargamiento producido por una fuerza de 100N.

Evaluación de la actividad docente y propuestas de mejora

Las actividades propuestas de forma individual y para afianzar conocimientos, se entregarán al profesor, con el fin de ser corregidas y aprender de los errores.

Como propuestas de mejora para entender mejor el temario serían la visualización de videos en clase relacionados con el tema tratado.

Bibliografía

http://ciencias.buenconsejoicod.com/wp-content/uploads/2017/03/Ley-de-Hooke.pdf

http://selectividad.intergranada.com/Bach/fyq1/Oxford/unidad15.pdf

https://www.uv.es/jmarques/_private/MAS%20y%20ondas.pdf