VNIVERSIDAD D SALAMANCA

Planificación de una actividad docente

Estudio del movimiento armónico en dos sistemas: un muelle y un péndulo.

Manuel Diego Gajate

Planificación de una Actividad Docente.

1.-Título.

Estudio del movimiento armónico simple en dos sistemas: un muelle y un péndulo.

2.-Contexto de la actividad docente.

La actividad docente va dirigida a alumnos de 2º de Bachillerato y se va a realizar en una sesión de 50 minutos en el laboratorio o aula de clase. El contenido relacionado con esta actividad corresponde según normativa (*Currículo según Decreto 52/2007*) al tema: "*Movimiento Oscilatorio: estudio experimental de las oscilaciones de un muelle. Ecuación del movimiento armónico simple: elongación, velocidad y aceleración. Dinámica del movimiento armónico simple. Energía de un oscilador armónico"* correspondiente al bloque 3 *(Vibraciones y Ondas).*

Para entender el movimiento armónico simple en los dos sistemas propuestos (*péndulo y muelle*), son necesarios algunos conceptos previos como el periodo, la frecuencia, el péndulo, la ley de Hook, las leyes de Newton, conceptos matemáticos de trigonometría y algebra. En algunos cursos en los que ya se han tratado contenidos similares, son el primer curso de Bachillerato, en especial los temas de *"Sistemas de referencia inerciales. Magnitudes necesarias para la descripción del movimiento. Iniciación al carácter vectorial de las magnitudes que intervienen"* correspondiente al bloque 2 (*Estudio del movimiento*) y el tema "*Estudio de algunas situaciones dinámicas de interés teórico y práctico: peso, fuerzas de fricción en superficies horizontales e inclinadas, tensiones y fuerzas elásticas. Dinámica del movimiento circular uniforme"* correspondiente al bloque 3 (*Dinámica*).

Contenidos relacionados con el m.a.s los tratarán en un futuro alumnos que cursen en la Universidad ingenierías, física y otras carreras de ciencias y así como alumnos que accedan a algunos ciclos formativos de grado superior.

3.-Objetivos de la actividad.

Que los alumnos aprendan lo que es el movimiento armónico simple diferenciando los conceptos de periodo, elongación, amplitud, frecuencia lineal y angular y que sepan identificarlo y describirlo en situaciones de la vida cotidiana.

Conocer las aplicaciones y funcionalidad que se derivan del conocimiento de m.a.s como son las de determinar masas o medidas de longitudes.

Se pretende que los alumnos adquieran el método científico como la herramienta fundamental de trabajo para la adquisición de conocimientos, en nuestro caso relacionados con el m.a.s. .

Afianzar conceptos matemáticos relacionados con la física.

Adquirir destreza en la toma de medidas necesarias en la experimentación y familiarizarse con los aparatos de medida.

4.- Herramientas docentes necesarias.

Laboratorio o aula de clase.

Pizarra.

Ordenador con Excel para proyectar gráficas.

Cronómetro.

Dinamómetro.

Distintas pesas.

Péndulos con distintas masas.

Cuaderno de Laboratorio.

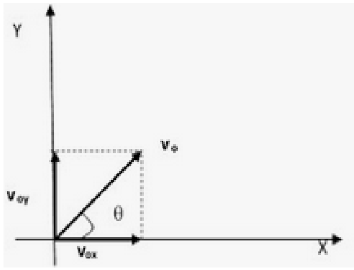
Calculadora.

5.- Descripción del desarrollo de la actividad docente.

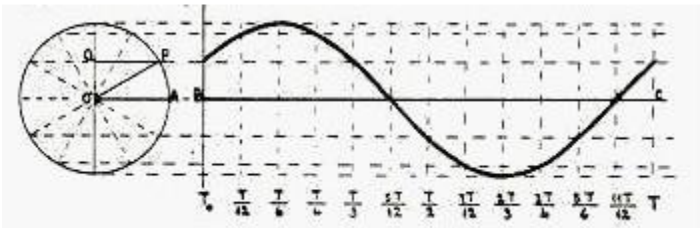
5.1.- Introducción y conexión con conocimientos previos.

Esta actividad será de tipo expositiva donde se expongan de forma resumida conceptos teóricos básicos pertenecientes a contenidos de cursos anteriores relacionados con el tema y que son fundamentales para llevar a cabo la experimentación y la comprensión de nuevos conceptos. También se realizará una descripción de movimientos oscilatorios en el mundo que nos rodea, a modo de ejemplo: un reloj, un columpio, una flecha al clavarse en una diana, los planetas,….

Imaginemos que tenemos un reloj de pared y si nos fijamos en el segundero ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa? La respuesta es 60 segundos, pues eso es el periodo, es decir algo que se repite en un intervalo de tiempo fijo. ¿Cómo es el movimiento del segundero? Se trata de un movimiento circular en 2D, de tal forma que el movimiento del segundero se puede descomponer en 2 movimientos, uno a lo largo del eje x y otro a lo largo del eje y como muestra la figura:



Si ahora representamos el movimiento que tiene lugar a lo largo del *eje y* frente al *tiempo*, podemos apreciar un movimiento oscilatorio, llamado ***movimiento armónico simple***.



Imágen obtenida: www.monografias.com

Si apreciamos el movimiento descrito, corresponde al de un coseno (o al de un seno) y la Ecuación del Movimiento Armónico Simple se puede definir como:

$$y(t)=A\cdot\cos(wt)$$

En este punto de la exposición, definiría los elementos relacionados con el m.a.s: *oscilación, vibración, elongación, amplitud, periodo, frecuencia, correción de fase y posición de equilibrio.*

5.2.-Estudio cualitativo o experimental del m.a.s en un péndulo.

· ***Observación*** por parte de los alumnos de un Movimiento Armónico Simple de un péndulo.

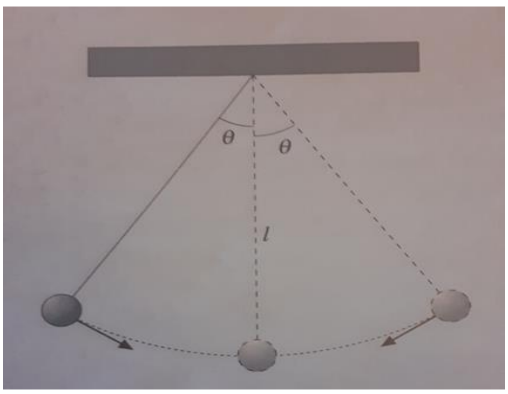


Imagen obtenida del libro 2º de Bachillerato. Alberto Galindo.Ed McGraw Hill

Siguiendo las etapas propias del método científico, vamos a observar el m.a.s de un péndulo y hacernos una serie de preguntas relacionadas con el mismo.

¿De qué variables puede depender el periodo T *(entendiéndose éste cómo el intervalo de tiempo en el que algo se repite)*? ¿Depende de la masa? ¿Depende de la longitud de la cuerda del péndulo? ¿Depende del ángulo desde el que se suelta el péndulo? ¿Depende de la forma del péndulo?..

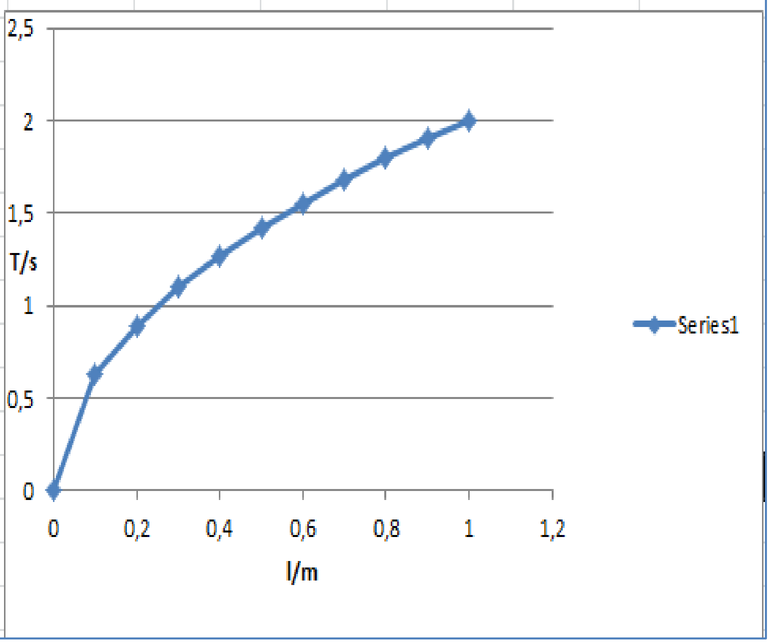
En función de todas estas preguntas, nos ***planteamos la hipótesis*** de que el periodo es función de *la masa*, *la forma*, *la longitud de la cuerda*, *el ángulo*…. $T= f\,(m,\text{forma},\ell,\Theta)$.

Posteriormente, mediante ***la experimentación*** comprobamos si el T se mantiene constante o va cambiando respecto a cada una de estas variables. Tras la realización de los experimentos, podemos apreciar que el periodo solo cambia sí variamos la longitud de la cuerda y permanece constante para el resto de los variables. Por lo que podemos afirmar que el $T=f(\ell)$.

Tomamos una serie de ***medidas experimentales*** del T para distintos valores de longitud 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 y 1,0 m.

· <u>Podemos hacer *una primera representación gráfica* a partir de estos datos experimentales del periodo frente a la longitud para intentar predecir la relación entre ambas</u>.

T/s	l/m
0	0
0,63	0,1
0,89	0,2
1,1	0,3
1,27	0,4
1,42	0,5
1,55	0,6
1,68	0,7
1,8	0,8
1,9	0,9
2	1



Como podemos apreciar en la gráfica dibujada obtenemos una *media parábola* que parte del origen, por lo que la relación $T=f(\ell)$ corresponde a la de una ***función radical***, es decir el periodo T es función de la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda $T\alpha\sqrt{(\ell)}$.

· <u>Podemos hacer un análisis dimensional del periodo respecto a una serie de variables.</u>

En nuestro análisis dimensional, incluimos la *longitud* porque ya hemos comprobado experimentalmente que el *Periodo* es función de ella y aunque también hemos demostrado empíricamente que el periodo no depende de *la masa*, la vamos a incluir en el análisis dimensional para confirmarlo. Por otra parte, sabemos que cualquier cuerpo está sometido a la acción de *la gravedad*, por lo que en la formula tiene que estar presente esta aceleración.

$[T]=f(m,l,g)$

$[T]=[M]^{\alpha}[L]^{\beta}[g]^{\gamma}$

$s= Kg^{\alpha}m^{\beta}(m^{\gamma}/s^{2\gamma})$

Para que $Kg^{\alpha}=1$ -----> $\alpha=0$ (lo que nos confirma que T no es función de la masa)

$s=m^{\beta+\gamma}/ s^{2\gamma}$

Por lo que $1=-2\gamma$----------> despejando $\gamma=-1/2$

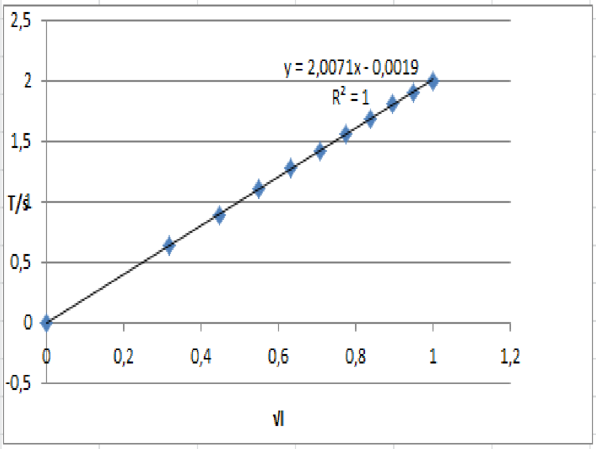
Para que $m^{\beta+\gamma}=1$ ---------> $\beta+\gamma=0$ -------------> despejando $\beta=1/2$ (lo que nos confirma la predicción del apartado anterior de que el periodo es función de la *$\sqrt{(l)}$*.

Por lo tanto, según nuestro análisis dimensional hemos llegado a la conclusión que $[T]=f(\ell/g)^{1/2}$ y por lo tanto podemos afirmar que:

$$\boxed{\mathbf{T=k\sqrt{(\ell/g)}}}$$

· <u>Podemos hacer a partir de los datos experimentales obtenidos en el apartado 1, una representación gráfica de **T** frente a **√(*l*)** para obtener la constante de proporcionalidad K.</u>

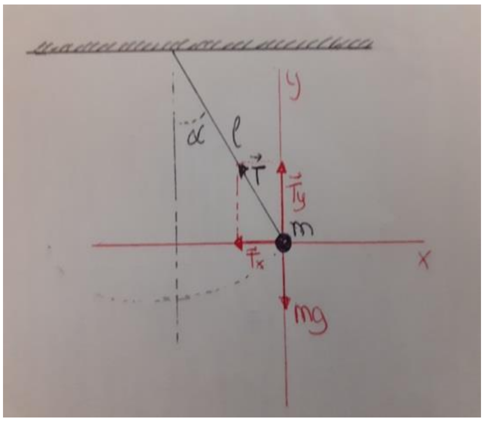
l/m	√(l) /m^1/2	T/s
0	0	0
0,1	0,316227766	0,63
0,2	0,447213595	0,89
0,3	0,547722558	1,1
0,4	0,632455532	1,27
0,5	0,707106781	1,42
0,6	0,774596669	1,55
0,7	0,836660027	1,68
0,8	0,894427191	1,8
0,9	0,948683298	1,9
1	1	2



Gráficamente, obtenemos una línea recta, cuya pendiente es m=2,01 y una ordenada en el origen que podemos considerar igual a cero. Por lo tanto, experimentalmente tenemos que k/√(g)=2,01 y despajando K obtenemos un valor de 6,29.

$$\mathbf{T_{exp}=6,29\cdot \sqrt{(\ell/g)}}$$

5.3.-Estudio cuantitativo o analítico del m.a.s en un péndulo.



Si descomponemos cada una de las fuerzas que están implicadas en el péndulo, y aplicamos la Ley de Newton para la componente x y la componente y, tenemos que:

Eje x: $m(d^2x/dt^2)= -T_x =-T\cdot sen\Theta$

Eje y: $m(d^2y/dt^2)= T\cdot cos\Theta-mg$

Para poder resolver el sistema, se necesita aplicar ecuaciones diferenciales, sin embargo a nivel de segundo de bachillerato, esto no es posible por lo que hay que realizar algún tipo de aproximación. Basándonos en la observación, podemos apreciar que para ángulos pequeños la aceleración a lo largo del eje y es muy pequeña y puede considerarse igual a cero y el ángulo Θ lo podemos considerar también próximo a cero, de tal forma que el cosΘ=1. Entonces nos queda la ecuación del movimiento en el eje y como:

$0= T\cdot cos0-mg$------> despejando $T=mg$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$m(d^2x/dt^2)= -mg\cdot sen\Theta$

Considerando que $sen\Theta=x/l$ y sustituyendo, nos queda:

$(d^2x/dt^2)=-g/l\cdot X$--------------------> $\mathbf{(d^2x/dt^2)+g/l\cdot X=0}$

Por otra parte, partiendo de la ecuación del m.a.s que sabemos que describe el péndulo, tenemos que x(t):

$x(t)=A\cdot cos(wt)$

$dx/dt=-w\cdot A\cdot sen(wt)$

$$d^2x/dt=-w^2\cdot A\cdot\cos(wt)$$

$$d^2x/dt=-w^2\cdot x$$

Llegamos a una ecuación que:

$$\mathbf{d^2X/dt + w^2\cdot X=0}$$

comparando ambas expresiones matemáticas obtenidas nos queda:

$$\mathbf{w^2=g/l}$$

Sabiendo que la relación entre w=f·2π=2π/T y sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$(2\pi/T)^2=g/l\text{----------------->}\ T^2=4\pi^2\cdot l/g\text{--------------->}\ \mathbf{T_{teorica}=2\pi\cdot\sqrt{(l/g)}}$$

$$\boxed{\mathbf{T_{teorica}=2\pi\cdot\sqrt{(l/g)}}}$$

5.4.-Estudio cuantitativo o analítico del m.a.s en un muelle.

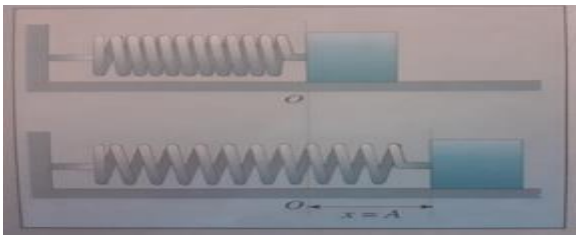


Imagen obtenida del libro 2º de Bachillerato. Alberto Galindo.Ed McGraw Hill

Sistema de un muelle sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

Partiendo de la segunda Ley de Newton y la Ley de Hook, tenemos que:

$$F=ma=m\cdot d^2x/dt^2$$

$$F=-K_ex$$

Teniendo en cuenta el sumatorio de fuerzas que intervienen:

$$\sum F=m\cdot d^2x/dt^2=-K_ex$$

$$\mathbf{d^2x/dt^2=-\ K_ex/m}$$

Esta es una ecuación diferencial que no se puede resolver a nivel de 2º de Bachillerato, por lo que vamos a encontrar otra forma de poderlo solucionar. Basándonos en la similitud con el sistema anterior y sabiendo que la ecuación del movimiento armónico simple para un muelle es una función sinusoidal:

$$x(t)=A\cdot \cos(wt)$$

$$dx/dt=-w\cdot A\cdot \text{sen}(wt)$$

$$d^2x/dt=-w^2\cdot A\cdot \cos(wt)$$

$$\mathbf{d^2x/dt=-w^2\cdot x}$$

Igualando ambas expresiones, se deduce que:

$$-K_e/m=-w^2$$

Por otra parte, sabemos que: $w=2\pi\cdot f=2\pi/T$

Sustituyendo una ecuación en otra:

$$K_e/m=4\pi^2/T^2$$

Despejando T:

$$\boxed{T=2\pi\cdot\sqrt{(m/K_e)}}$$

5.5.-Estudio Cualitativo o experimental del m.a.s en un muelle.

En el apartado anterior, hemos demostrado que **$T=2\pi\cdot\sqrt{(m/K_e)}$** desde un punto de vista analítico, y ahora podemos contrastar esta relación por medio de la experimentación. Para ello, es necesario previamente conocer *la constante de elasticidad del muelle K_e,* por lo que es necesario basarnos también en la experimentación para poderla obtener. Así de esta forma, utilizamos un *Dinamómetro* y medimos los alargamientos que tienen lugar para distintas masas. Sabemos por la Ley de Hook que la $F=-k_e\cdot\Delta x$ (*es importante saber que esta Ley se cumple hasta un determinado límite de elasticidad*), y cuando se alcanza el equilibrio es porque el Peso=$K_e\cdot\ \Delta x$, entonces si realizamos una representación gráfica de Δx frente al peso (mg), obtendremos una recta, cuya pendiente $m=1/K_e$.

Después de conocer la K_e, si vamos colocando en el muelle distintas masas, podemos medir el periodo de oscilación para cada una de ellas y compararlo con los valores teóricos al aplicar la fórmula matemática.

Algo que también podemos experimentar, es el hecho de que el periodo no dependa de la amplitud de la oscilación y solamente lo haga de la masa del objeto que coloquemos en el muelle.

6.-Actividades de consolidación y ampliación.

Como actividades de consolidación, propondría una actividad relacionada con el m.a.s de un péndulo y otra de un muelle.

Actividad 1: Llevar a cabo la determinación de la masa de distintos objetos basándose en el movimiento armónico simple de un muelle, es decir sin tener en cuenta la gravedad y la realización posterior de una comparación entre los resultados obtenidos mediante este método y la masa de los objetos determinada con una balanza o una báscula.

Actividad 2: Determinar la longitud de un columpio basándose en el movimiento armónico simple de un péndulo y comparar el resultado, con el obtenido por medida directa del columpio y hallar el error cometido.

7.- Evaluación de la actividad docente y propuesta de mejora.

Una vez realizada la actividad, se reflexionará sobre los aspectos positivos y negativos detectados en el desarrollo de la misma, con la finalidad de trabajar sobre las áreas de mejora y abordar las dificultades surgidas.

8.-Bibliografia.

Física 2 de Bachillerato; Alberto Galindo; McGrawHill.

Video: http://videolectures.net/mit801f99_lewin_lec10/

www.fisicalab.com/

https://ingenieriabasica.es

Decreto 52/2007 del 17 de Mayo.

www.monografías.com