XXIV Olimpiada Española de Física 22 de febrero de 2013

Fase Local, Universidad de Salamanca

Nombre y apellidos:

Centro: Curso:

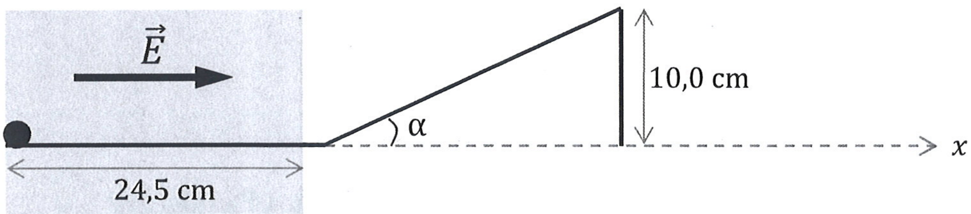
Problema 1 (3 puntos)

Una esfera conductora de masa 5,0 g cargada con +20 μC parte del reposo y es sometida a la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$ en la dirección x durante un tramo de longitud 24,5 cm (zona sombreada de la figura). Bajo la acción del campo la esfera se desplaza sin rozamiento por una superficie horizontal, y a continuación, tras cesar la acción del campo, se encuentra con un plano inclinado como el mostrado en la figura, por el que se desplaza igualmente sin rozamiento. El plano inclinado forma un ángulo α con la horizontal. Suponiendo que la esfera se comporta como una partícula puntual, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el campo eléctrico mínimo que ha de actuar sobre la esfera para que alcance la parte superior del plano inclinado?

b) Cuando la esfera es sometida al campo calculado en el apartado anterior, tarda 0,5 s en recorrer el plano inclinado. ¿Cuánto vale el ángulo α?

c) ¿A qué distancia del borde vertical del plano inclinado caerá la esfera sobre la superficie horizontal si el campo eléctrico que actúa sobre ella es de $4{,}61 \times 10^3$ V/m?



a) $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= m \cdot g \cdot h \\ v^2 - v_i^2 &= 2ad \\ a &= \frac{qE}{m} \end{aligned}\right\} \quad gh = \frac{v^2}{2} = ad = \frac{q \cdot E \cdot d}{m}$$

$$\boxed{E = \frac{m \cdot g \cdot h}{q \cdot d} = \frac{5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1}{20 \times 10^{-6} \cdot 0{,}245} = 1000 \frac{V}{m}}$$

b) $a' = g \cdot \text{sen}\,\alpha$

$v_f = v_i + a't \Rightarrow 0 = v_i - g \cdot \text{sen}\,\alpha\, t$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{v_i}{g \cdot t} = \dfrac{1{,}4}{9{,}8 \times 0{,}5} = 0{,}2857 \Rightarrow \boxed{\alpha = 16{,}6^\circ}$ 1

$v = \sqrt{2ad} = \left(2 \dfrac{qE}{m} \cdot d\right)^{1/2} = 1{,}4 \;m/s$

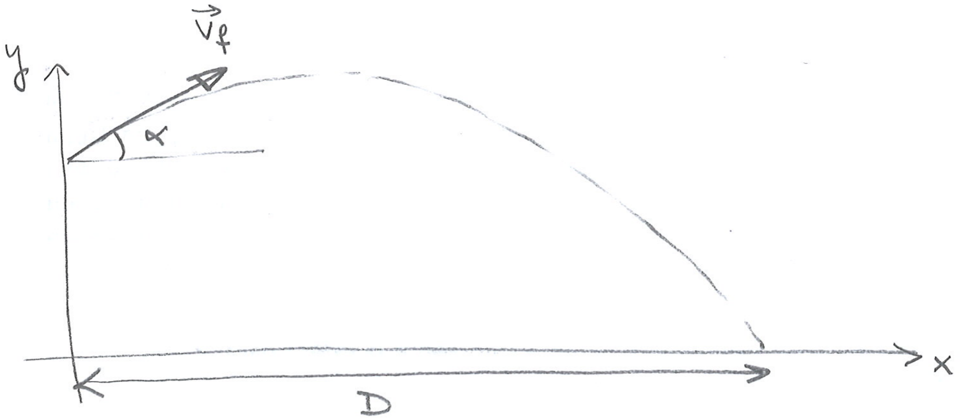
XXIV Olimpiada Española de Física 22 de febrero de 2013

Fase Local, Universidad de Salamanca

Nombre y apellidos:

Centro: Curso:

c)



$$\frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \; 2\frac{qE}{m}\cdot d = q\cdot E\cdot d$$

$$v_i^2 = 2ad = 2\frac{qE}{m}\cdot d$$

$$E_{cf} = E_{ci} - mgh = qEd - mgh$$

$$v_f = \left(\frac{2E_{cf}}{m}\right)^{1/2} \qquad \vec{v}_f = v_f\cdot\cos\alpha\,\hat{x} + v_f\cdot \operatorname{sen}\alpha\,\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_f\cdot\cos\alpha\, t \\ y(t) &= 10 + v_f\cdot\operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \quad t = \frac{x}{v_f\cdot\cos\alpha}$$

$$y(x) = 0{,}1 + \frac{v_f\cdot\operatorname{sen}\alpha}{v_f\cdot\cos\alpha}\, x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_f^2\cdot\cos^2\alpha}$$

$$x = D \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{g}{2v_f^2\cdot\cos^2\alpha} D^2 - tg\alpha\, D - h = 0$$

$$\boxed{X =} \frac{v_f^2\cdot\cos^2\alpha}{g}\left(\tan\alpha + \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{2gh}{v_f^2\cdot\cos^2\alpha}}\right) = 0{,}61 \text{ m}$$

2

XXIV Olimpiada Española de Física 22 de febrero de 2013
Fase Local, Universidad de Salamanca

Nombre y apellidos:

Centro: Curso:

Problema 2 (3 puntos)

El Premio Nobel de Física de 1993 fue otorgado a los radioastrónomos R. A. Hulse y J. H. Taylor por el descubrimiento del púlsar denominado PSRB1913 +16. Un púlsar se puede asimilar a un faro giratorio (similar a la luz de una ambulancia) que emite una señal electromagnética con un periodo aproximado de $60\ \mathrm{ms}$. En la figura 1 se representa la intensidad luminosa recibida del pulsar en función del tiempo (los destellos).

Un modelo **muy simplificado** de PSRB1913 +16 consiste en una estrella de neutrones de 1,4 veces la masa del Sol que gira en torno a un eje propio con un periodo de milisegundos y describe, además, una órbita circular alrededor de otra estrella. El radio de la órbita es aproximadamente $2{,}3\ \mathrm{s.l.}$ (segundos-luz) y el periodo orbital 7,8 horas.

De acuerdo con las mediciones de Hulse y Taylor, el radio de su órbita disminuye con el paso del tiempo y, como consecuencia, también lo hace su periodo orbital (ver figura 3) La explicación de este fenómeno es que PSRB1913 +16 emite energía en forma de ondas gravitatorias, unas ondas que predice la teoría de la Relatividad de Einstein y que todavía no han sido detectadas con detectores específicos.

a) Determina la masa de la estrella central.

b) Escribe la energía total de la estrella en función del radio y obtén por derivación una fórmula que relacione la pérdida de energía por unidad de tiempo con la disminución del periodo orbital por unidad de tiempo.

c) Utilizando la expresión del apartado anterior haz una estimación de la energía emitida por PSRB1913 +16 al cabo de 20 años suponiendo que el periodo orbital ha disminuido en 14 segundos en ese intervalo de tiempo y considerando que el radio ha permanecido constante.

d) Suponiendo que nuestra línea de visión del púlsar está contenida en el plano de la órbita, da una explicación de la figura 2, la cual representa la variación del periodo observado del púlsar (intervalo entre dos destellos) con el tiempo. ¿Por qué varía dicho periodo? ¿A qué corresponde el periodo T?

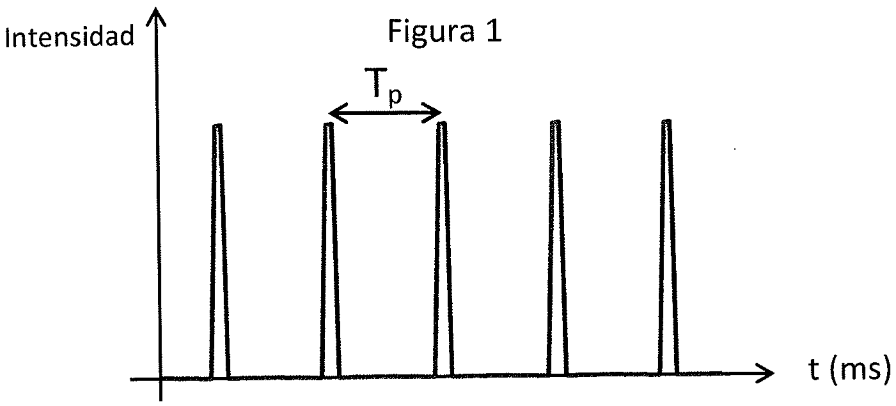
Datos:
Constante de gravitación: $\mathrm{G} = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2}$
Masa del Sol: $\mathrm{M_S} = 2 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$
Velocidad de la luz: $\mathrm{c} = 3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

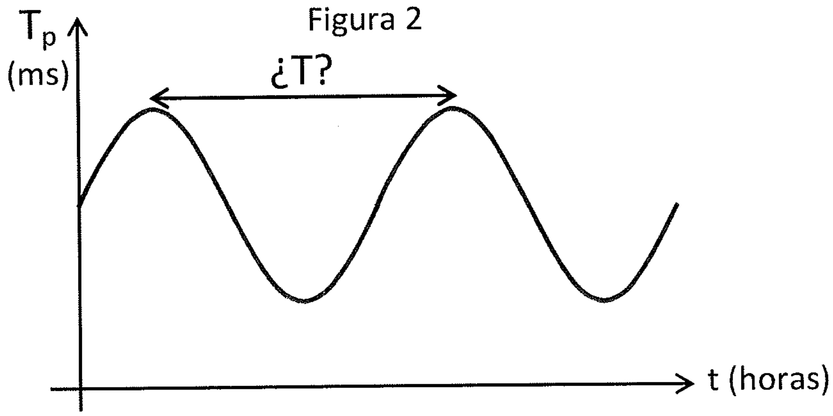
XXIV Olimpiada Española de Física
Fase Local, Universidad de Salamanca

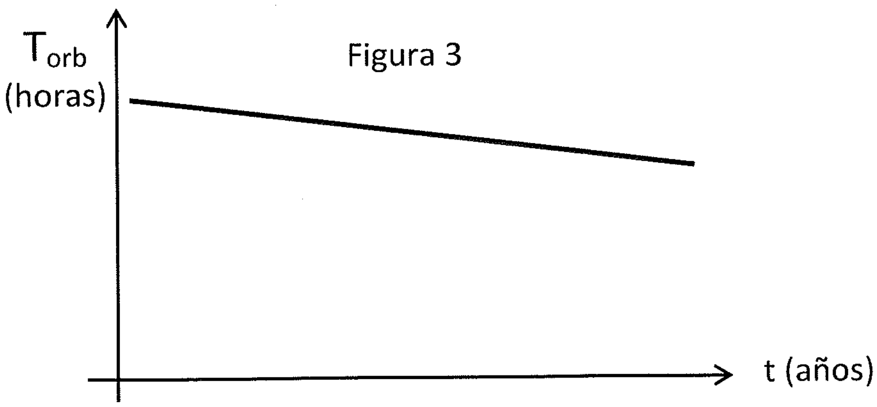
22 de febrero de 2013

Nombre y apellidos:

Centro: Curso:







Problema 2

$m = 1{,}4 \ M_{sol}$

$R = 2{,}3 \ s.l.$

$T = 7{,}8 \ h.$

a) $G \dfrac{M \cdot m}{R^2} = m \dfrac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{M = \dfrac{v^2 \cdot R}{G}} = \dfrac{4\pi^2 R^3}{T^2 \cdot G} \boxed{= 2{,}5 \times 10^{29} \ kg}$

b) $E = -\dfrac{GM \cdot m}{2R}$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{GM \cdot m}{2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{GM \cdot m}{2R^2} \frac{dR}{dt}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \frac{3}{2} R^{1/2} \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{GM}{R}} \frac{dT}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt}} = \frac{GM \cdot m}{2R^2} \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{GM}{R}} \frac{dT}{dt} = \boxed{\frac{(GM)^{3/2} \cdot m}{6\pi} \frac{1}{R^{5/2}} \frac{dT}{dt}}$$

c) $\boxed{E = \dfrac{dE}{dt} dt} \boxed{= 1{,}10 \times 10^{37} \ J}$

d) Efecto Doppler.

T es el periodo de la órbita del púlsar alrededor de la estrella.

Nombre y apellidos:

Centro: Curso:

Problema 3 (4 puntos)

En octubre de 2012 el austriaco Félix Baumgartner batió el record de caída libre tras saltar desde un globo a $39000\ \mathrm{m}$ sobre el nivel del mar. En total, la caída duró 9 minutos, de los cuales $4\ \mathrm{min}$ y $20\ \mathrm{s}$ fueron sin ayuda de paracaídas. En ese tiempo llegó hasta una altura de $2500\ \mathrm{m}$ respecto del suelo. Félix iba provisto de un equipo especial, con elementos de protección y de medida, de manera que su masa conjunta era de $105\ \mathrm{kg}$. Para los cálculos que se proponen a continuación supondremos que el salto se produjo con velocidad inicial nula.

a) Suponiendo que la caída libre (sin paracaídas) se diera con aceleración constante ¿cuál fue esa aceleración? Compárala con la aceleración de la gravedad a $30000\ \mathrm{m}$ de altura sobre el nivel del mar.

Dato: $R_T = 6370\ \mathrm{km}$ (radio de la Tierra)

La pequeña aceleración promedio se debe a que, a partir de $27000\ \mathrm{m}$, el efecto de la fuerza de rozamiento con el aire empieza a ser considerable. Esta fuerza de fricción depende de la velocidad del cuerpo que cae según la expresión

$$F_r = \frac{1}{2} C\ \rho\ A\ v^2$$

donde

- C es la constante de arrastre, que depende sólo de la forma del cuerpo que cae,
- ρ es la densidad del aire,
- A es la sección transversal (proyección del área del cuerpo en un plano perpendicular a la dirección del movimiento),
- v es la velocidad de caída.

La fuerza de fricción, por tanto, aumenta con la velocidad y, al cabo de un tiempo corto, se establece una situación de equilibrio dinámico y el cuerpo cae con una velocidad constante llamada **velocidad límite**.

En los cálculos que se proponen a partir de ahora considera que la aceleración de la gravedad es independiente de la altura ($\mathrm{g} = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$) y utiliza los valores $C = 1{,}3$ y $A = 0{,}4\ \mathrm{m}^2$.

b) Supongamos que la que la densidad de la atmósfera fuera cero por encima de $27000\ \mathrm{m}$ y uniforme (independiente de la altura) de valor $\rho = 0{,}35\ \mathrm{kg/m^3}$ desde dicha altura hasta la superficie de la Tierra. Calcula la velocidad límite que alcanzaría Felix en su salto. ¿Cuál sería en este caso la presión atmosférica en la superficie de la Tierra al nivel del mar?

Sin embargo, la densidad de la atmósfera no es uniforme. En la gráfica 1 podemos ver la gráfica real de la velocidad de Felix en función del tiempo durante la caída libre. Como puede verse, hay un tramo inicial de aceleración prácticamente constante hasta que la velocidad alcanza un máximo en torno a $t = 50\ \mathrm{s}$. A partir de entonces, tenemos un segundo tramo en el que la velocidad disminuye de forma continua debido a la variación de la densidad de la atmósfera a medida que Felix cae. En este tramo descendente podemos considerar que la velocidad de Felix en cada instante de tiempo es la velocidad límite a la altura en la que se encuentra.

c) Teniendo en cuenta esto último, estima la densidad del aire a la altura a la que se encuentra Felix en los instantes $t = 75\ \mathrm{s}$ y $t = 200\ \mathrm{s}$. Haz una gráfica aproximada de cómo varía la

Nombre y apellidos:

Centro: Curso:

densidad del aire en función de la altura a partir de los cálculos anteriores. Para estimar la altura a la que se encuentra Felix en cada instante de tiempo puedes relacionar los datos de la velocidad del sonido que aparecen en la gráfica 1 con los de la gráfica 2, en los que se representa la velocidad del sonido en función de la altura.

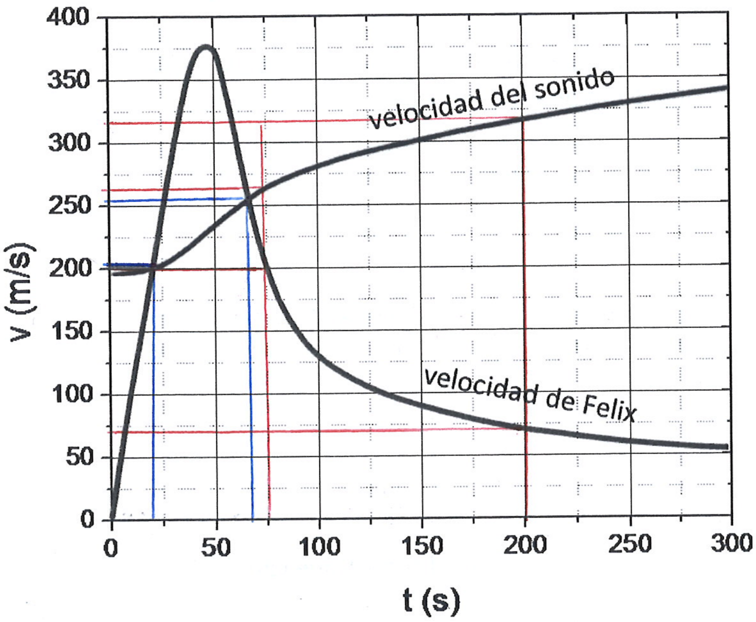


Figura 1

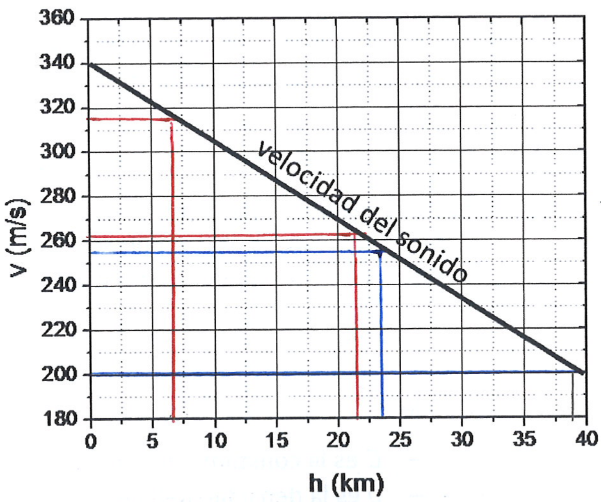


Figura 2

d) Estima entre qué alturas la velocidad de Félix fue superior a la del sonido.

e) Con su hazaña, Félix Baumgartner batió varios récords: mayor velocidad alcanzada en caída libre ($373\ \mathrm{m/s}$), salto en paracaídas desde mayor altura ($39000\ \mathrm{m}$) y mayor distancia en caída libre ($36500\ \mathrm{m}$). Uno de los récords que no pudo batir fue el de mayor duración de un salto en caída libre. Éste lo estableció el coronel Kittinger en 1960 con un salto que duró 16 segundos más que el de Félix ($4\ \mathrm{min}$ y $36\ \mathrm{s}$). Félix podría haber estado más tiempo en el aire incrementando su sección transversal A. ¿en qué porcentaje debería haber aumentado A para conseguir igualar el récord de Kittinger?

Problema 3

a) $$\frac{g_{30km}}{g_0} = \left(\frac{R_T}{R_T + 30\times10^3}\right)^2 = 0{,}99 \Rightarrow g_{30km} = 9{,}72\ m/s^2$$

$$d = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2\times36500}{260^2} = 1{,}08\ m/s^2$$

$$\boxed{a << g_{30km}}$$

b) $$m\frac{dv}{dt} = -mg + \frac{1}{2}C\cdot\rho\cdot A\cdot v^2$$

$$mg = \frac{1}{2}C\cdot\rho\cdot A\cdot v_{lim}^2 \Rightarrow \boxed{v_{lim} = \left(\frac{2mg}{C\cdot\rho\cdot A}\right)^{1/2} = 106\ \frac{m}{s}}$$

$$\boxed{P = \rho\cdot g\cdot h = 0{,}35\times9{,}8\times27000 = 92610\ Pa = 0{,}91\ atm}$$

c) $$\boxed{t = 75\ s} \qquad v_{lim} = 200\ \frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{2\cdot m\cdot g}{C\cdot A\cdot v_{lim}^2} = 0{,}099\ \frac{kg}{m^3}}$$

$$V_s = 263\ m/s \Rightarrow \boxed{h = 21{,}5\ Km}$$

$$\boxed{t = 200\ s} \qquad v_{lim} = 70\ m/s \Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}81\ \frac{kg}{m^3}}$$

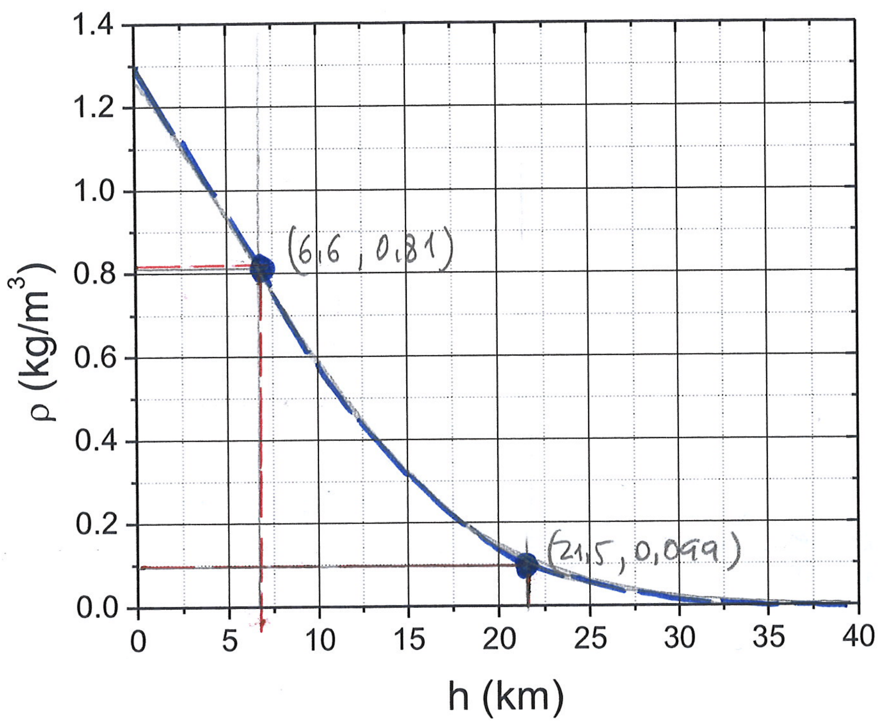
$$V_s = 316\ m/s \Rightarrow \boxed{h = 6{,}6\ Km}$$

XXIV Olimpiada Española de Física 22 de febrero de 2013
Fase Local, Universidad de Salamanca

Nombre y apellidos:

Centro: Curso:

c)



d) $t_1 = 20\,s$, $v_{S1} = 205\ {}^{m}/_{s} \Rightarrow$ $h_1 = 38$ Km

$t_2 = 65\,s$, $v_{S1} = 255\ {}^{m}/_{s} \Rightarrow$ $h_2 = 23$ Km

e) $$t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{v_{lim}} = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{C\cdot\rho\, A}{2\cdot m\cdot g}\right)^{1/2} dz = \left(\frac{C\cdot A}{2mg}\right)^{1/2} \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\, dz$$

$$\frac{t}{t'} = \frac{210}{216} = \left(\frac{A}{A'}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{A' = 1{,}04\ A}$$