

---

# Binarias eclipsantes y cruvas de luz

Guillermo Sánchez. [diarium.usal.es/guillermo](http://diarium.usal.es/guillermo)

Última actualización: 2016-09-30

---

## I. Paquete becl (Eclipsantes binarias y curvas de luz)

En este cuaderno utilizaremos el paquete becl (binarias eclipsantes y curvas de luz), desarrollado por Guillermo Sánchez dentro del proyecto. SA130U14 de la Junta de Castilla y León.

---

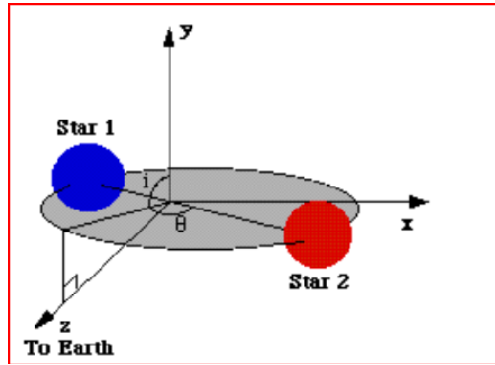
## 2. Sistemas binarios

De las estrellas que observamos más de la mitad son sistemas de dos o más estrellas. Normalmente no es posible con telescopio distinguir las distintas estrellas que forman los sistemas múltiples (no confundir con binarias visuales que normalmente se trata de estrellas que parecen próximas vistas desde la Tierra pero que realmente son estrellas de sistemas distintos muy distantes entre sí). La detección se suele realizar por el método del tránsito que consiste en analizar la variación de luminosidad que se produce cuando en un sistema binario (o múltiple) una estrella se interpone entre la otra estrella y el observador en la Tierra (es decir: las órbitas de las dos estrellas y el observador están en un mismo plano) lo que provoca una reducción de la luz que llega al observador, las binarias con estas características se conocen como binarias eclipsantes.

Este mismo método también se aplica a la búsqueda de planetas extrasolares, en este caso es el planeta el que se interpone entre la estrella y el observador en Tierra, naturalmente el cambio de luminosidad es mucho menor que los cambios de luz que experimentan las binarias eclipsantes,

A continuación vamos a describir como construir un sistema de este tipo con *Mathematica* y estudiar su luminosidad. Nos basaremos en el artículo disponible en <http://www.physics.sfasu.edu/astro/ebstar/ebstar.html>

La figura de abajo representa un sistema binario (aunque nos referiremos a dos estrellas el método es similar si consideramos una estrella y un planeta). Las coordenadas del centro son  $(x_1, y_1, z_1)$  para la estrella 1 y  $(x_2, y_2, z_2)$  para la estrella 2 (Al suponer que son esferas homogéneas los centros de masa coinciden con los centros geométricos). Como origen de coordenadas  $\{0, 0, 0\}$  se toma el centro de masas del sistema. Las coordenadas se han elegido de forma que el observador, que se supone en la Tierra, está situado en el eje OZ. Es decir: el que va desde el centro de masas al observador. Como eje OY se toma la perpendicular a OZ en el plano que forma la estrella 1 cuando esta forma un ángulo  $\theta = 0$ , lo que ocurre cuando esta pasa por el punto más próximo al observador.



Sea

$i$  = inclinación orbital: ángulo, expresado en radianes, formado por la línea de visión y el eje del plano orbital.

$R$  = distancia entre los centros de ambas estrellas. Se expresan en unidades arbitrarias, lo normal es tomar como valor unidad la distancia media de separación entre las estrellas. En el caso de una órbita circular es una constante, y con el criterio anterior  $R=1$ .

$m_1, m_2$  = masa de las estrellas (pueden elegirse unidades arbitrarias pues lo importante es que se mantenga la relación  $q = m_2/m_1$ ).

$r_1, r_2$  = radios. Por conveniencia tomaremos  $r_1 > r_2$ , de hecho en la práctica en un sistema binario siempre pueden elegirse la estrella 1 y 2 de forma que se verifique esta condición. Los radios es conveniente expresarlos en fracciones de la longitud del semieje mayor. En el caso de una órbita circular obviamente el semieje mayor es igual al menor e idéntico al radio  $R$ .

$\theta$  = Fase, corresponde al ángulo que forma la estrella respecto a OZ, tomando por  $\theta = 0$  aquel en el que el centro de la estrella 2 está más próximo al observador. En un sistema binario concreto con órbita circular  $\theta$  es el parámetro variable (va variando con el tiempo) mientras que los parámetros anteriores suelen ser constantes (aunque no siempre es así, por ej.: Pueden producirse cambios intrínsecos de la luminosidad, incluso la masa puede experimentar cambios como ocurre cuando se va transfiriendo parte de la masa de una estrella a otra pero en lo que sigue nos referimos al caso más simple, que además es el más frecuente). Se dice que  $\theta$  es el ángulo azimutal y cumple  $\theta = \frac{2\pi(t-t_0)}{P}$ , donde  $P$  es el período orbital.

En un sistema binario las coordenadas  $\{x_1, y_1, z_1\}$  y  $\{x_2, y_2, z_2\}$  de los puntos en los que está cada estrella están dados por:

$$x_1 = \frac{-x}{1 + (1/q)}, \quad y_1 = \frac{-y}{1 + (1/q)}, \quad z_1 = \frac{-z}{1 + (1/q)};$$

$$x_2 = \frac{x}{1+q}, \quad y_2 = \frac{y}{1+q}, \quad z_2 = \frac{z}{1+q};$$

- Que podemos transformarlos a coordenadas esféricas mediante la transformación :

In[26]=

$$\begin{aligned} x &= R \sin[\theta]; \\ y &= R \cos[i] \cos[\theta]; \\ z &= R \sin[i] \cos[\theta]; \end{aligned}$$

- Entonces la posición de cada estrella en función de  $R, i, \theta, q$  con  $q = m_2/m_1$ .

In[29]=

$$\begin{aligned} \text{star1}[R_, i_, \theta_, q_] &= \left\{ \frac{-x}{1 + (1/q)}, \frac{-y}{1 + (1/q)}, \frac{-z}{1 + (1/q)} \right\}; \\ \text{star2}[R_, i_, \theta_, q_] &= \left\{ \frac{x}{1+q}, \frac{y}{1+q}, \frac{z}{1+q} \right\}; \end{aligned}$$

In[31]=

**star1[R, i,  $\theta$ , q]**

Out[31]=

$$\left\{ -\frac{R \sin[\theta]}{1 + \frac{1}{q}}, -\frac{R \cos[i] \cos[\theta]}{1 + \frac{1}{q}}, -\frac{R \cos[\theta] \sin[i]}{1 + \frac{1}{q}} \right\}$$

In[32]=

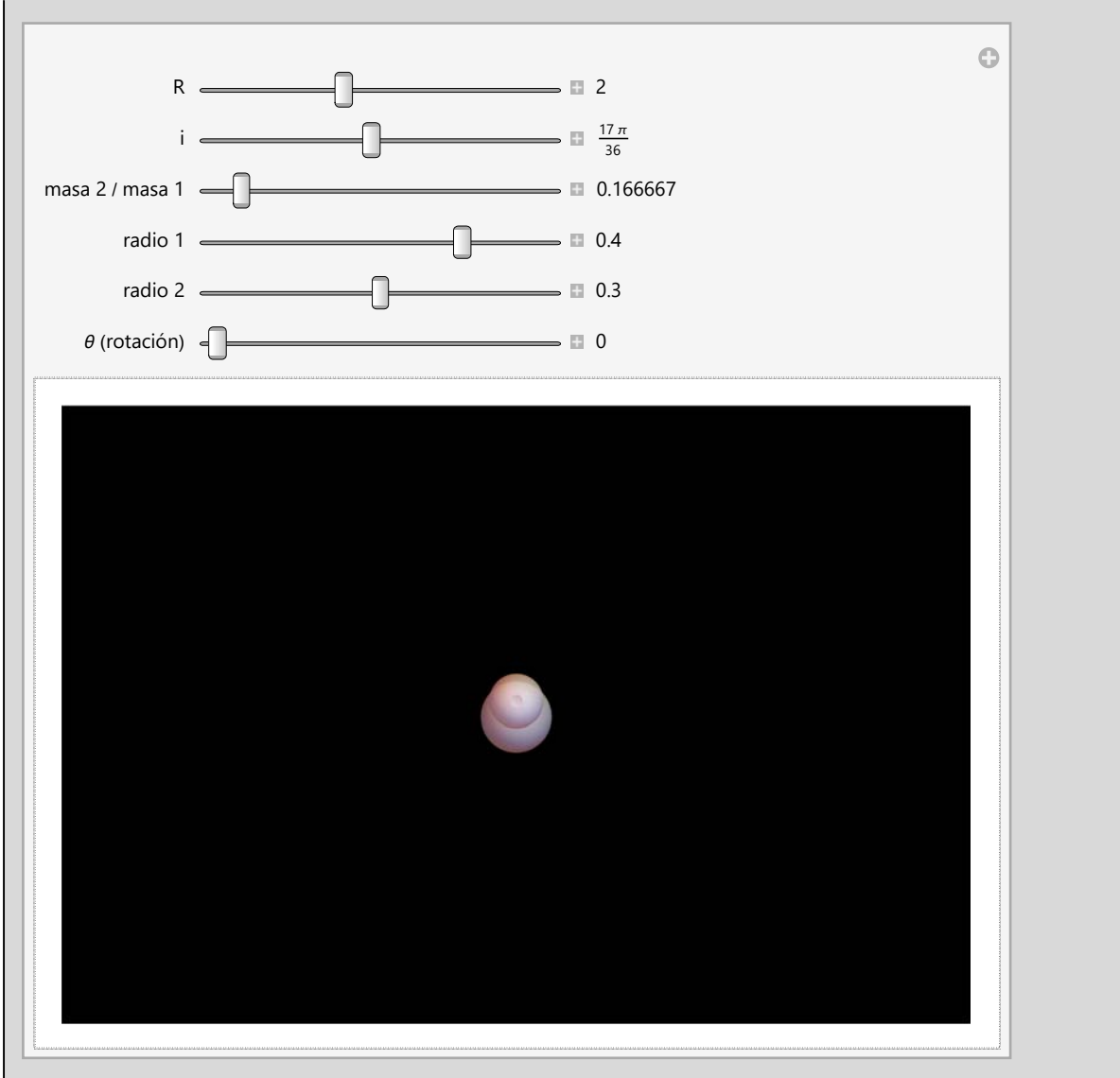
**star2[R, i,  $\theta$ , q]**

Out[32]=

$$\left\{ \frac{R \sin[\theta]}{1 + q}, \frac{R \cos[i] \cos[\theta]}{1 + q}, \frac{R \cos[\theta] \sin[i]}{1 + q} \right\}$$

- Se han utilizado las ecuaciones anteriores en el paquete `besv`, en la función `ec1bin[R, i,  $\theta$ , m2/m1, r1, r2]` (Debe cumplirse que  $m2 < m1$ ).
- Consideremos el sistema binario definido por los siguientes parámetros  $R = 2$ ,  $i = 2 \text{ Pi } 85 / 360$ ;  $m1 = 0.6$ ;  $m2 = 0.1$ ;  $R1 = 0.4$ ;  $R2 = 0.3$ . Pruebe a actuar sobre los controles. El instante inicial  $\theta = 0$  corresponde a aquel en el que ambas estrellas están alineadas y son vistas desde un punto del eje OZ (donde está el observador), es decir corresponde al momento en el que se produce la máxima interposición de una estrella con la otra. En un sistema real todos los parámetros serían fijos y el que variaría es  $\theta$  que es función del tiempo.

In[33]:= `eclbin[2, 2 Pi 85 / 360, 0, 0.1 / 0.6, 0.4, 0.3]`



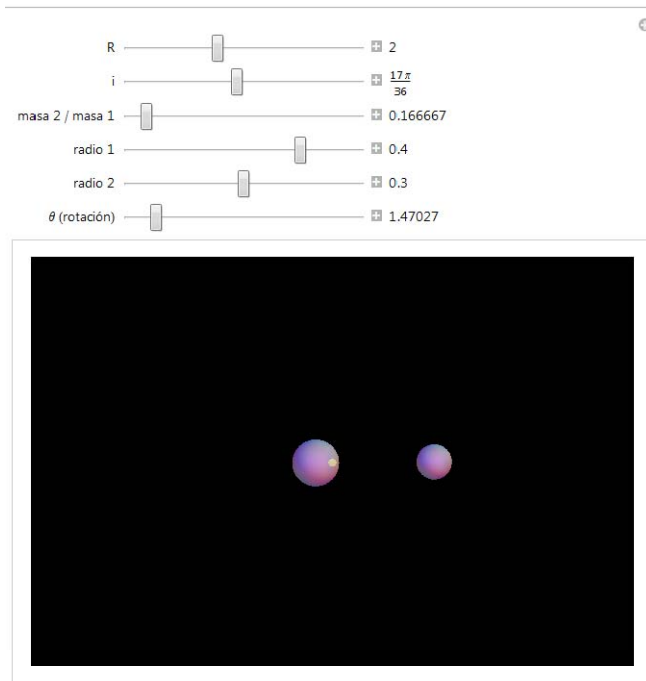
Out[33]=

The image shows a Mathematica notebook interface. At the top, the input cell contains the command `eclbin[2, 2 Pi 85 / 360, 0, 0.1 / 0.6, 0.4, 0.3]`. Below the input is a control panel with six sliders, each with a numerical value and a plus-minus icon:

- R: 2
- i:  $\frac{17\pi}{36}$
- masa 2 / masa 1: 0.166667
- radio 1: 0.4
- radio 2: 0.3
- $\theta$  (rotación): 0

Below the sliders is a large black rectangular area containing a 3D visualization of a binary system. It shows two spheres, one larger and one smaller, in a dark space, representing the output of the `eclbin` function.

La figura de abajo es una imagen copiada de la salida de arriba.



### 3. Curvas de luz en sistemas binarios

El método del tránsito, al que antes nos hemos referido, se basa en el estudio de la variación de la luminosidad que se produce cuando una estrella o un planeta se interpone delante de la otra estrella. Como se ha indicado, las estrellas binarias raramente pueden ser distinguibles visualmente, y menos aún una estrella y un planeta, lo que se observará será una variación de la luminosidad aparente.

El método que aquí se describe, con la llegada de las cámaras astronómicas CCD, está al alcance del buen aficionado a astronomía. Hay algún caso donde aficionados han llegado a detectar planetas extrasolares empleando esta técnica. Es un ejemplo, de cómo puede hacerse ciencia sin necesidad de grandes instalaciones.

La luminosidad  $l$  de una estrella está definida como la cantidad de energía que escapa de la estrella en la unidad de tiempo. El flujo  $F$  es la energía emitida por unidad de superficie y unidad de tiempo, esto es  $F_1 = \frac{l_1}{4\pi R_1^2}$  y  $F_2 = \frac{l_2}{4\pi R_2^2}$  donde  $l_1, l_2 =$  luminosidades (En unidades arbitrarias, lo que importa es que se mantenga la relación  $l_2/l_1$ ).

Entonces un observador verá al sistema con una luminosidad dada por:

$$I = K (F_1 A_1 + F_2 A_2)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  es el área del disco de cada estrella tal como es visto por el observador y  $K$  es una constante que puede ser determinada a partir del área del detector del observador, que está en el eje  $OZ$ , y la distancia entre la Tierra y el sistema binario.

Para encontrar estas áreas necesitamos conocer la distancia aparente  $\rho$  entre las dos estrellas tal como es vista por el observador (situado en el eje  $OZ$ ). La cual está dada por:

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

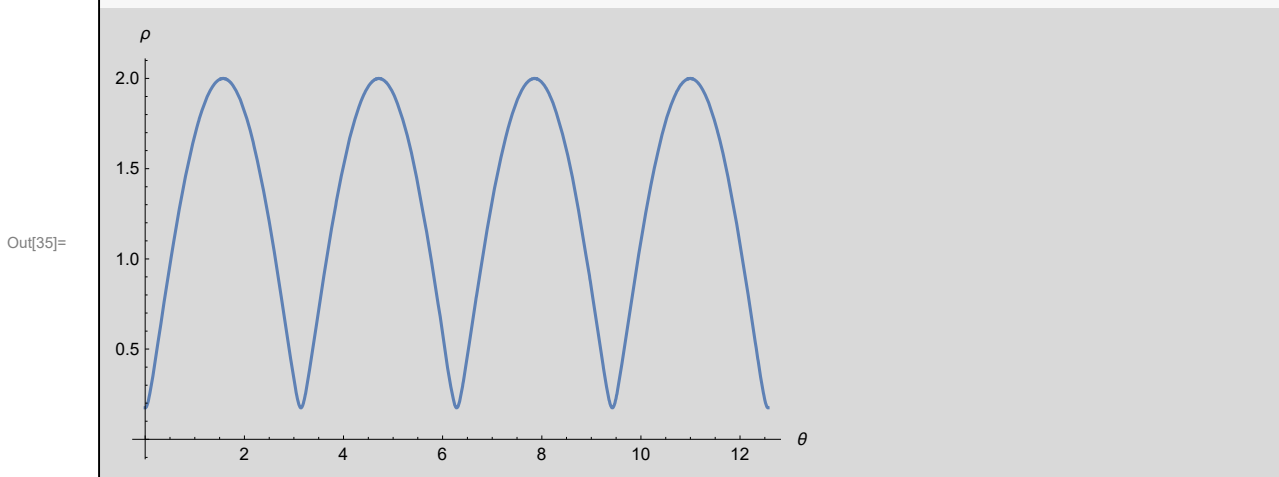
- La siguiente función calcula  $\rho(R, i, \theta, q)$  siendo:  $x = R \sin[\theta]$ ;  
 $y = R \cos[i] \cos[\theta]$ ;  
 $\{x1, y1\} = \left\{ \frac{-x}{1+(1/q)}, \frac{-y}{1+(1/q)} \right\}$ ;  
 $\{x2, y2\} = \left\{ \frac{x}{1+q}, \frac{y}{1+q} \right\}$ ;

In[34]:= `rho[2, 2 Pi 85 / 360,  $\theta$ , 0.1 / 0.6]`

Out[34]:=  $\sqrt{0.0303845 \cos[\theta]^2 + 4. \sin[\theta]^2}$

- Con los datos del ejemplo (esto es  $R=2$ ,  $i = 2 \text{ Pi } 85 / 360$ ;  $m_1 = 0.6$ ;  $m_2 = 0.1$ ) la distancia aparente  $\rho$  varía de acuerdo con la siguiente figura. Con el criterio que hemos tomado el menor tamaño aparente corresponde al de máxima interposición que se produce para  $\theta = 0, \text{Pi}, 2 \text{ Pi}, \dots, n \text{ Pi}$ .

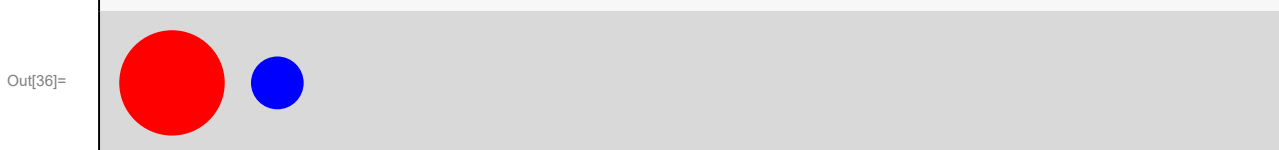
In[35]:= `Plot[rho[2, 2 Pi 85 / 360,  $\theta$ , 0.1 / 0.6], { $\theta$ , 0, 4 Pi}, AxesLabel -> { $\theta$ ,  $\rho$ }`



Para calcular  $A_1$  y  $A_2$  es necesario tener en cuenta la etapa del ciclo en la que nos encontramos.

- En las figuras que siguen la estrella de radio mayor ( $r_1$ ) la representamos en color rojo, y la de radio menor ( $r_2$ ) en color azul.

In[36]:= `Graphics[{Red, Disk[{0, 0}, 2], Blue, Disk[{4, 0}, 1]}]`



### a) Sin eclipse:

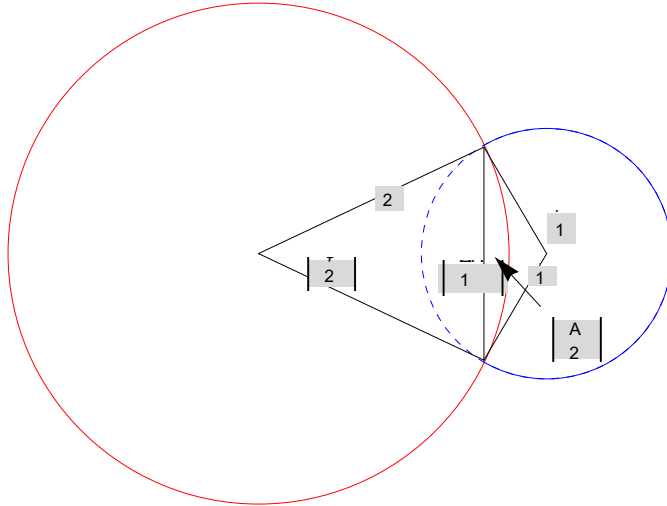
Corresponde al período en el que llega al observador la totalidad de la luz que emiten ambas estrellas en esa dirección. Por tanto, es cuando la luminosidad será máxima. En esta etapa se verifica  $\rho > r_1 + r_2$  con:

$$A_1 = \pi r_1^2 \text{ y } A_2 = \pi r_2^2$$

### b) Eclipse parcial

Ocurre cuando una estrella eclipsa parcialmente a la otra. En esta etapa se verifica que  $r_1 + r_2 > \rho > r_1 - r_2$ .

- La función de abajo la hemos dibujado utilizando:  
`Graphics[{{Red, Circle[{0, 0}, 1]}, {Blue, Circle[{1.15, 0}, 0.5, {-2 Pi/3, 2 Pi/3}}], {Dashed, Blue, Circle[{1.15, 0}, 0.5]}, Line[{{0, 0}, {0.9, 0.425}, {0.9, -0.425}, {0, 0}], Line[{{0.9, 0.425}, {1.15, 0}, {0.9, -0.425}]}]`  
 A la salida generada con la función anterior le hemos añadido leyendas con la herramienta de gráficos 2D: [Ctrl]+[D]



Para calcular la luz que llega de la estrella eclipsada hay que restar del área total el área eclipsada. Para ello hay que calcular  $\Delta A_1$  y  $\Delta A_2$  que corresponde a los segmentos correspondiente a la estrella 1 y 2, que esta dada por:

$$\Delta A_1 = \frac{1}{2} R_1^2 (\phi_1 - \text{Sin}[\phi_1]); \Delta A_2 = \frac{1}{2} R_2^2 (\phi_2 - \text{Sin}[\phi_2]);$$

Las siguiente expresiones nos permiten calcular  $\phi_1$  y  $\phi_2$

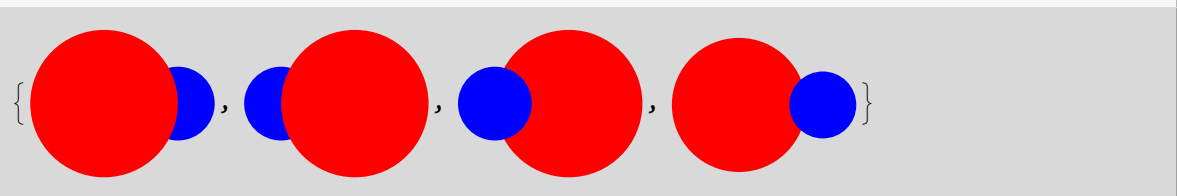
$$R_2^2 = R_1^2 + \rho^2 - 2 R_1 \rho \text{Cos}\left[\frac{\phi_1}{2}\right]; R_1^2 = R_2^2 + \rho^2 - 2 R_2 \rho \text{Cos}\left[\frac{\phi_2}{2}\right]$$

- Debajo se representan distintas etapas de un eclipse parcial

In[37]=

```
{Graphics[{Blue, Disk[{2, 0}, 1], Red, Disk[{0, 0}, 2]}],
Graphics[{Blue, Disk[{-2, 0}, 1], Red, Disk[{0, 0}, 2]}],
Graphics[{Red, Disk[{0, 0}, 2], Blue, Disk[{-2, 0}, 1]}],
Graphics[{Red, Disk[{0, 0}, 2], Blue, Disk[{2.5, 0}, 1]}]}
```

Out[37]=



Las dos figuras de la izquierda corresponden al caso en que la estrella 1 (roja) es la más próxima, esto es  $z_1 > z_2$ , entonces la luz que llega al observador será:

$$A_1 = \pi r_1^2 \text{ y } A_2 = \pi r_2^2 - \Delta A_1 - \Delta A_2$$

El dibujo de la derecha corresponde al caso en que la estrella 1 (roja) es la más alejada, esto es  $z_1 < z_2$  entonces :

$$A_1 = \pi r_1^2 - \Delta A_1 - \Delta A_2 \text{ y } A_2 = \pi r_2^2$$

Las condiciones anteriores se resumen en la tabla siguiente:

Etapas	Condición	$z1 > z2$		$z1 < z2$	
		A1	A2	A1	A2
No eclipse	$\rho \geq r_1 + r_2$	$\pi r_1^2$	$\pi r_2^2$	$\pi r_1^2$	$\pi r_2^2$
Eclipse parcial	$r_1 + r_2 > \rho > r_1 - r_2$	$\pi r_1^2$	$\pi r_2^2 - \Delta A1 - \Delta A2$	$\pi r_1^2 - \Delta A1 - \Delta A2$	$\pi r_2^2$
Eclipse total o anular	$\rho \leq r_1 - r_2$	$\pi r_1^2$	0	$\pi r_1^2 - \pi r_2^2$	$\pi r_2^2$

Ahora vamos a incorporar los criterios descritos en la función `area[R, i, m2/m1, r1, r2, l1, l2,  $\theta$ ]`, donde debe tomarse:  $m_2 > m_1$  y  $r_1 > r_2$ . La función mostrará el área que el observador medirá.

Las funciones siguientes están incluidas en el paquete, aquí se muestran pero no se ejecutan.

**Sin eclipse.**- Ocurre cuando se verifica  $\rho \geq r_1 + r_2$

---

```
area[R_, i_, q_, r1_, r2_, l1_, l2_,  $\theta$ _] := Module[{A1, A2}, {A1, A2} = {Pi r1^2, Pi r2^2};
  l1 A1/r1^2 + l2 A2/r2^2] /; rho[R, i,  $\theta$ , q] >= r1 + r2
```

---

**Eclipse parcial.** Procedemos paso a paso como sigue:

Se calculan  $\Delta A1$  y  $\Delta A2$  :

---

```
 $\Delta A1$ [R_, i_, q_, r1_, r2_,  $\theta$ _] := Module[{ $\phi$ 1,  $\rho$ , phi, phi1},
  phi1 = Last[Solve[r2^2 == r1^2 +  $\rho$ ^2 - 2 r1  $\rho$  Cos[ $\frac{\phi$ 1]{2}], phi] /.  $\rho$  -> rho[R, i,  $\theta$ , q]] [[1, 2]];
   $\frac{1}{2}$  r1^2 ( $\phi$ 1 - Sin[ $\phi$ 1]) /.  $\phi$ 1 -> phi1]; // Quiet
```

---

```
 $\Delta A2$ [R_, i_, q_, r1_, r2_,  $\theta$ _] := Module[{ $\phi$ 2,  $\rho$ , phi, phi1},
  phi1 = Last[Solve[r1^2 == r2^2 +  $\rho$ ^2 - 2 r2  $\rho$  Cos[ $\frac{\phi$ 1]{2}], phi] /.  $\rho$  -> rho[R, i,  $\theta$ , q]] [[1, 2]];
   $\frac{1}{2}$  r2^2 ( $\phi$ 2 - Sin[ $\phi$ 2]) /.  $\phi$ 2 -> phi1]; // Quiet
```

---

En un eclipse parcial se debe cumplir que  $r_1 + r_2 > \rho > r_1 - r_2$ , entonces para  $z1 > z2$ :

$A1 = \pi r_1^2$  y  $A2 = \pi r_2^2 - \Delta A1 - \Delta A2$  y mientras que para  $z1 < z2$ :  $A1 = \pi r_1^2 - \Delta A1 - \Delta A2$  y  $A2 = \pi r_2^2$ .

---

```
area[R_, i_, q_, r1_, r2_, l1_, l2_,  $\theta$ _] := Module[{z1, z2, a1, a2, A1, A2}, z1 =  $\frac{-R \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[i]}{1 + \frac{1}{q}}$ ;
  z2 =  $\frac{R \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[i]}{1 + q}$ ;
  a1 =  $\Delta A1$ [R, i, q, r1, r2,  $\theta$ ];
  a2 =  $\Delta A2$ [R, i, q, r1, r2,  $\theta$ ];
  {A1, A2} = If[z1 > z2, {Pi r1^2, Pi r2^2 - a1 - a2}, {Pi r1^2 - a1 - a2, Pi r2^2}];
  l1 A1/r1^2 + l2 A2/r2^2] /; r1 + r2 > rho[R, i,  $\theta$ , q] > r1 - r2
```

---

**En un eclipse total y/o anular**  $\rho \leq r_1 - r_2$

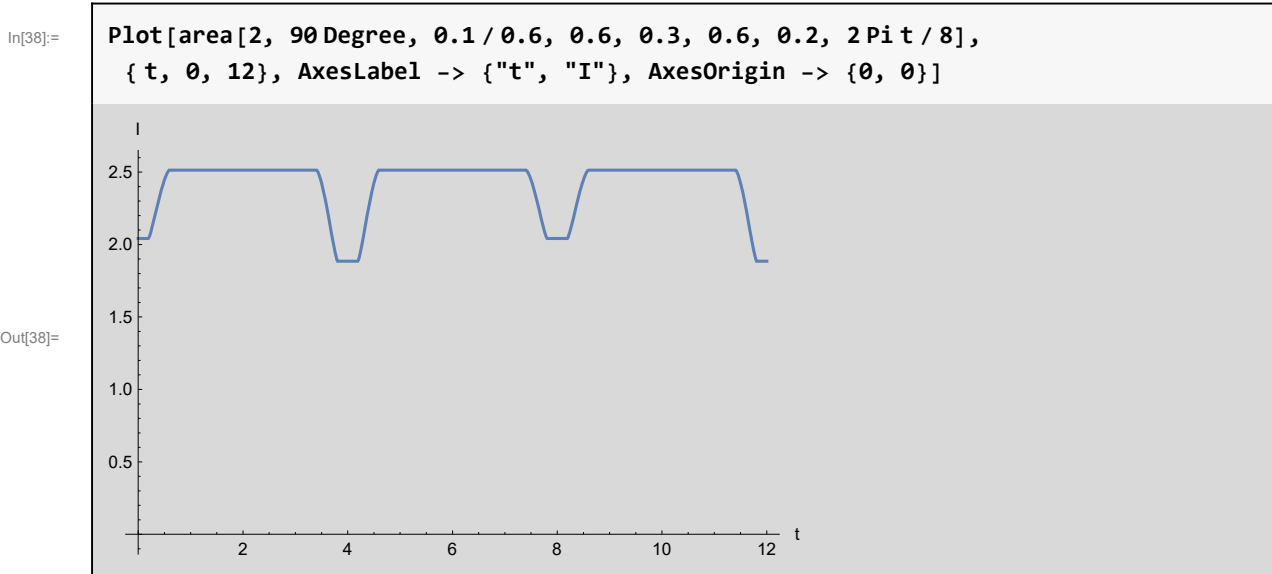
Cuando  $r_1 > r_2$  una de las estrellas está completamente interpuesta delante de la otra. Entonces se produce un eclipse total si  $z1 > z2$  con  $A1 = \pi r_1^2$  y  $A2 = 0$ , o anular si  $z1 < z2$  con  $A1' = A1 - A2$  y  $A2' = A2$ .

---

```
area[R_, i_, q_, r1_, r2_, l1_, l2_,  $\theta$ _] := Module[{z1, z2, A1, A2}, z1 =  $\frac{-R \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[i]}{1 + \frac{1}{q}}$ ;
  z2 =  $\frac{R \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[i]}{1 + q}$ ;
  {A1, A2} = If[z1 > z2, {Pi r1^2, 0}, {Pi r1^2 - Pi r2^2, Pi r2^2}];
  l1 A1/r1^2 + l2 A2/r2^2] /; rho[R, i,  $\theta$ , q]  $\leq$  r1 - r2
```

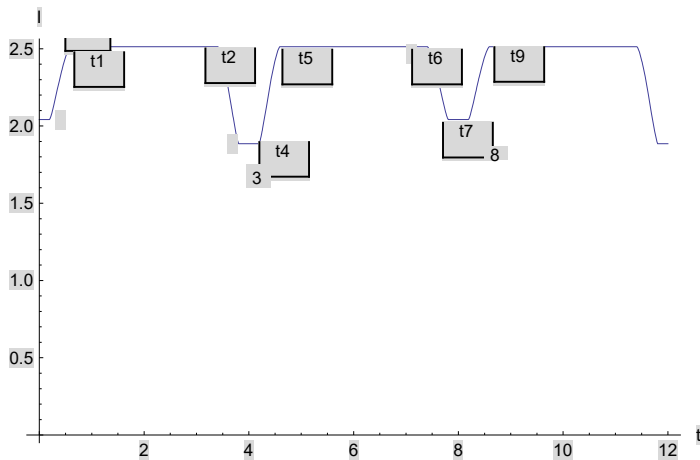
---





Representemos un caso ideal de eclipsante binaria: Se distinguen las fases del eclipse que se repiten, una corresponde al período sin eclipse ( $t_1$  a  $t_2$ ), en  $t_2$  se inicia el eclipse llegando a su totalidad entre  $t_3$  y  $t_4$ , de  $t_4$  a  $t_5$  estamos en fase de la fase de eclipse parcial, de  $t_6$  a  $t_9$  se está en la fase de tránsito, y en  $t_9 = t_1$  se inicia un nuevo ciclo.

- Empleamos la función `Plot[area[2, 90 Degree, 0.1/0.6, 0.6, 0.3, 0.6, 0.2, 2 Pi t/8], { t, 0, 12}, AxesLabel -> {"t", "I"}, AxesOrigin -> {0, 0}]` e incluido las leyendas con la herramienta de dibujo.



Ejemplo.- Para  $R = 2$ ,  $i = 85^\circ$ ;  $m_1 = 0.6$ ;  $m_2 = 0.1$ ;  $R_1 = 0.4$ ;  $R_2 = 0.3$ ,  $I_1 = 0.6$ ,  $I_2 = 0.2$  se quiere representar  $I/I_{max}$ .

- Calcular  $I_{max}$ .

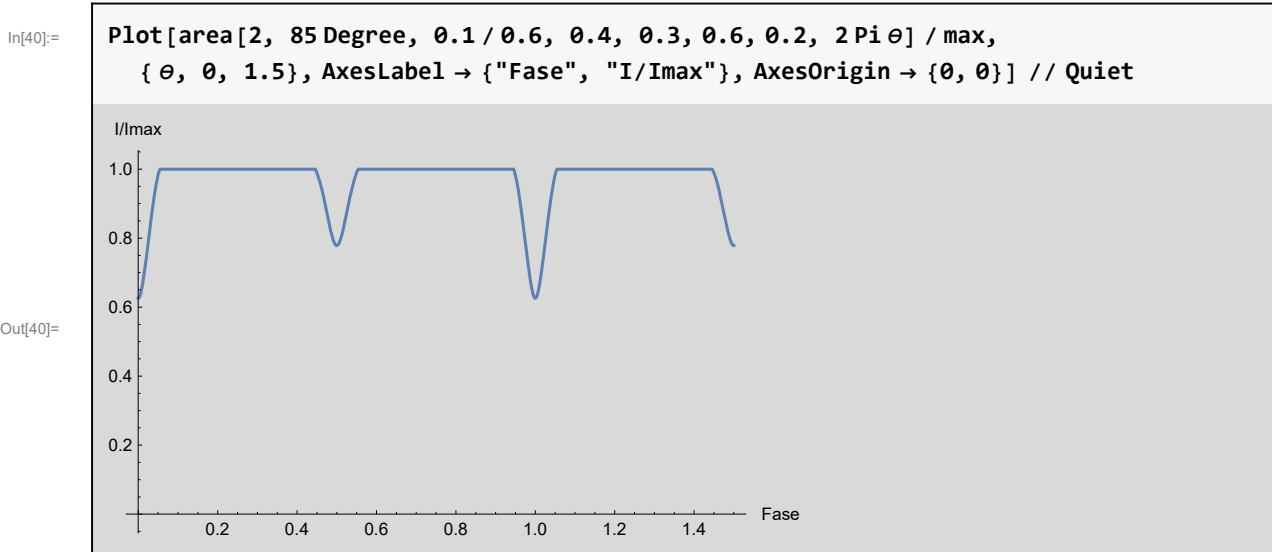
In[39]=

```
max =
NMaximize[area[2, 2 Pi 85 / 360, 0.1 / 0.6, 0.4, 0.3, 0.6, 0.2, 0], {0, 0, 2 Pi}][[
1]] // Quiet
```

Out[39]=

2.51327

- Ahora representamos  $I/I_{max}$ .



## 4. Determinación del periodo a partir de la curvas de luz

La variación de la luminosidad de una estrella además de a la presencia de variables eclipsantes o a la interposición de planetas puede deberse a distintas razones. Quizás la más conocida es el cambio de luminosidad que se produce en estrellas variables, como las del tipo cefeida a las que antes nos hemos referido. También puede estudiarse los cambios de luz en otro tipo de astro, por ejemplo: algunos asteroides muy irregulares, como Eros, al girar presentan distinta luminosidad asociada a la luz que reflejan. Sea la causa que sea la construcción experimental de una curva de luz consiste en tomar medidas de la luminosidad en distintos momentos  $t$  y a partir de ellas deducir el periodo con el que se repite el ciclo.

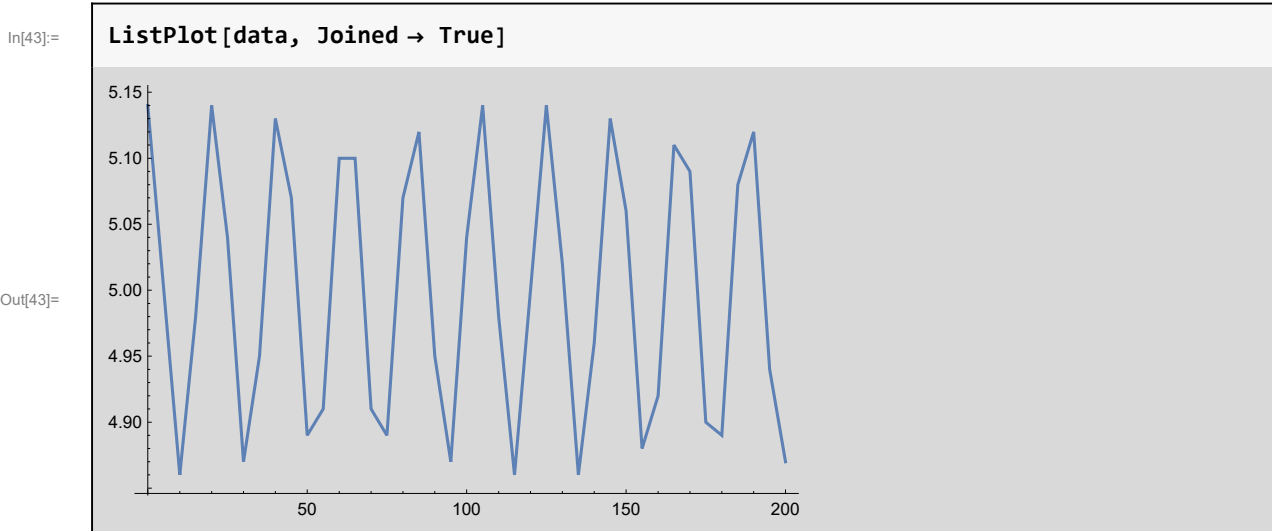
- La siguiente expresión simula las medidas de la magnitud en función del tiempo (en la práctica no se conoce esta función y frecuentemente de lo que se trata es de deducirla a partir de datos experimentales. La función elegida es muy simple y la utilizamos sólo con propósitos didácticos)

In[41]:= `mag[t_] = 5 + 0.14 Cos[0.3 t + 0.1];`

- Suponemos que hemos tomado las medidas en distintos momentos  $t_i$

In[42]:= `data = Table[{t, Round[mag[t], 0.01]}, {t, 0, 200, 5}];`

- Representemos gráficamente los datos anteriores. Si solo dispusiésemos de los datos sería difícil darse cuenta cual es la función subyacente (pruebe a eliminar `Joined → True`), unimos los puntos pues de esa forma es fácil observar su carácter cíclico. Lo normal es que falten muchos puntos intermedios aquí representados, lo que dificulta más su análisis.



El método de análisis al que normalmente se recurre es a representar el fenómeno anterior en un diagrama de fases

Para calcular la fase tenemos que aplicar la ecuación siguiente:

$$\phi = \text{Parte decimal de} \left[ \frac{t - t_0}{P} \right]$$

donde:

$\phi$  representa la fase en ciclos

$t_0$  (normalmente llamado *época*) representa el origen de la variable tiempo expresado en fecha juliana (DJ)

$t$  es el momento donde se toma la medida (normalmente se va a medir la magnitud aparente,  $m$ )

$P$  es el periodo, es decir el tiempo que tarda en repetirse un ciclo.

Una expresión equivalente a la anterior, que es la que usaremos, es

$$\phi = \text{Mod} \left[ \frac{t - t_0}{P} \right]$$

La siguiente expresión *Mathematica* obtiene la fase a partir de los datos iniciales y del período.

Se muestra la función pero no se evalúa, esta función está incorporada en el paquete

```
phi[list_, p_] := Module[{data}, data = list; Transpose[{Mod[data[[All, 1]]/p, 1], data[[All, 2]]}];
```

En este caso hemos supuesto que el período es conocido, pero en la práctica es lo que se busca. Podemos comprobar que si utilizamos un valor aproximado del período la representación es más difusa.

En las observaciones reales el período hay que determinarlo y ello no siempre es sencillo. La siguiente función nos ayudará a calcularlo. Se tiene en cuenta que en las curvas magnitud-fase se invierte el orden en la representación del eje OY. Esto es, las magnitudes se ordenan de mayor a menor siguen el orden inverso al habitual, es decir  $-3 > -2 > 0 > 1 > 2$ .

- Se muestra la función pero no se evalúa, esta función está incorporada en el paquete

```
curveL[data_, per_, kmax_] := Module[{mag, a, b, k, i}, mag = Round[Transpose[data][[2]], 0.1]; Manipulate[ListPlot[Join[phi[data, per + k] /. {a_, b_} -> {a, -b}, phi[data, per + k] /. {a_, b_} -> {-(1 - a), -b}], AxesLabel -> {"Período", "Magnitud"}, AxesOrigin -> {-1, -Max[mag] - 0.1}, Ticks -> {Automatic, Table[{i, -i}, {i, -Max[mag] - 0.1, -Min[mag] + 0.1, (Max[mag] - Min[mag])/10}]}], {{k, 0, "Desviación respecto el período (días)"}, 0, kmax}]]
```

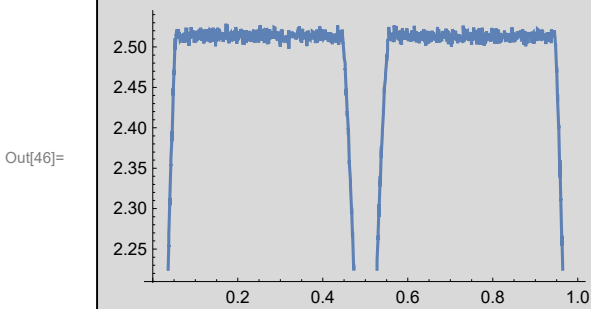
- Supongamos un ciclo completo ( $2\pi$ ). Utilizamos la función anterior para simular las medidas experimentales e incluimos una componente aleatoria. Supondremos que el período es de 20 días (duración de una órbita completa).

```
In[44]:= simulation =
  Table[{ $\theta$ , area[2, 2 Pi 85 / 360, 0.1 / 0.6, 0.4, 0.3, 0.6, 0.2, 2 Pi  $\theta$  / 20] +
    RandomReal[NormalDistribution[0, 0.005]]}, { $\theta$ , 0, 60, 0.05}]; // Quiet
```

- Lo representamos en un diagrama de fases:

```
In[45]:= simulation1 = Sort[phi[simulation, 20]];
```

```
In[46]:= ListPlot[simulation1, Joined → True]
```



Los datos anteriores de luminosidad deben ir multiplicados por un parámetro  $k$  que lo conviertan en una medida de magnitud. Recuérdese que una mayor luminosidad numéricamente implican una menor magnitud. Por ello para representar los datos en un diagrama de fase/luminosidad suponemos  $k = -1$ .

Ejecute la siguiente función: `curveL[Map[Times[{1, -1}, #] &, simulation], 15, 20]` y desplace el botón deslizante hasta que el período sea 5 días. Comprobará que la curva es muy similar a la de la figura anterior.

### Ejemplo: Curva de luz de la binaria eclipsante NSV 03199

Vamos a aplicar la función desarrollada a los datos de luminosidad de la NSV 03199 obtenidos por Garcia-Melendo, E., Henden, A., A., 1998, IBVS, No. 4546. Los datos se pueden descargar de <http://www.astrogea.org/VARIABLE/variables.htm>. Cree un subdirectorío, con nombre Data en el subdirectorío en el que tenga cargado su notebook, puede comprobarlo con la siguiente sentencia:

```
In[47]:= NotebookDirectory[]
```

```
Out[47]:= C:\Users\Guillermo\OneDrive\Mathematica\Astronomia\
```

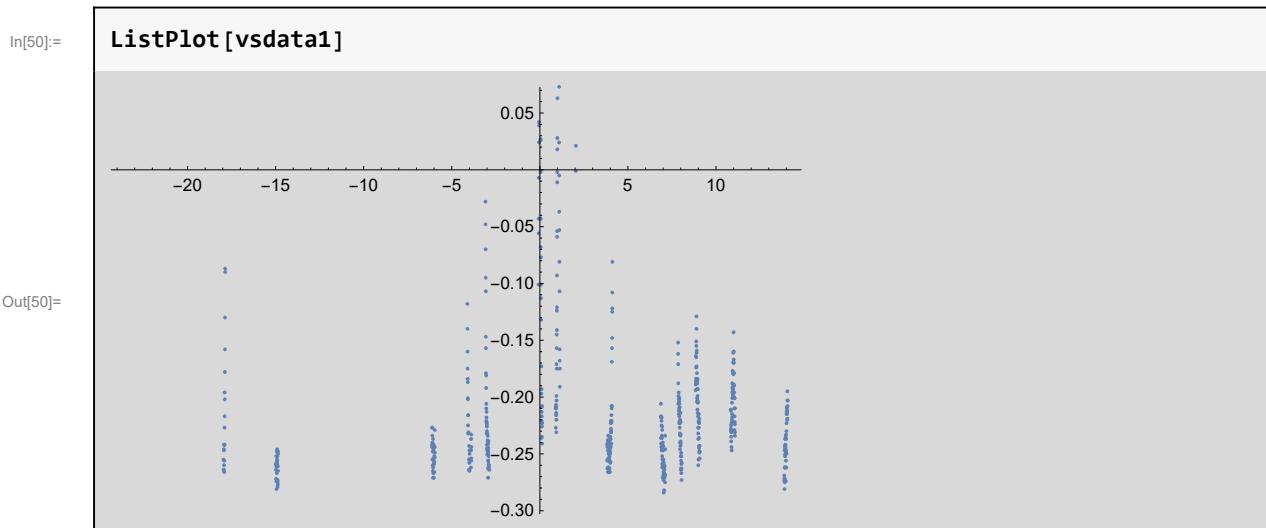
- Importamos las medidas de luminosidad.

```
In[48]:= vsdata = Drop[Import[FileNameJoin[{NotebookDirectory[], "Data", "NSV03199.xls"}],
  {"XLS", "Data", 1}], 1];
```

- Los datos están en fecha juliana, tomamos como referencia JHD=2450510.46542

```
In[49]:= vsdata1 = vsdata /. {a_, b_} -> {a - 2450510.46542, b};
```

- No se va clara la forma que sigue el ciclo

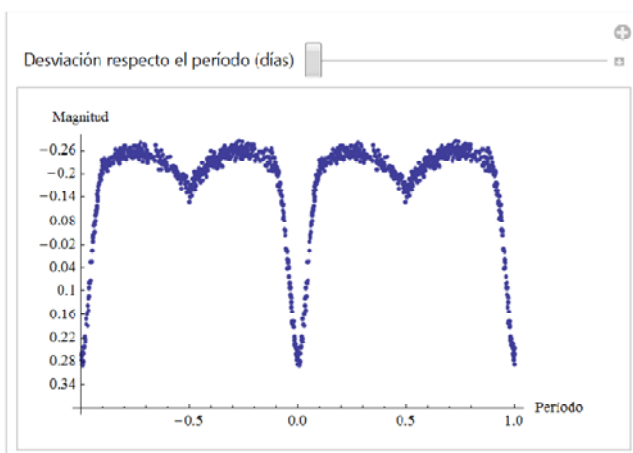


Al pasarlo a una curva luminosidad magnitud se observa claramente el comportamiento periodico correspondiente a una binaria eclipsante.

- Comprobamos que el período óptimo corresponde a 1.046400 días

**curveL [vsdata1, 1.046400, 0.5]**

*Para facilitar la edición impresa en el notebook original la celda de arriba está definida como no evaluable y la figura de abajo es una imagen.*



## 5. Kepler: un satélite a la búsqueda de planetas extrasolares

Desde 1995 en que se encontró el primer planeta extrasolar se han detectado más de 400.

Para la localización de planetas extrasolares se utilizan dos procedimientos:

a) Detección del movimiento del centro de masas de la estrella.- Un planeta que orbita entorno a una estrella provoca un desplazamiento periodico del centro de masas del sistema. Visto desde la Tierra se observa una desplazamiento minuscuro de la estrella provocado por su traslación de la Tierra en torno al centro de masas. Estos movimiento sólo son detectables para planetas gigantes próximos a estrellas,

b) Tránsito del planeta delante de la estrella.- Cuando el planeta se interpone entre la estrella y el observador en la Tierra provoca una reducción de la luz que llega al observador (es el mismo método que el utilizado en el estudio de variables binarias eclipsantes a las que antes nos hemos

referido). Este último método se está mostrando como el más eficaz y es el empleado por el satélite Kepler.

El satélite Kepler (<http://www.nasa.gov/kepler>) lanzado el 6 de marzo de 2009 diseñado específicamente para la localización de planetas extrasolares. Kepler analiza la curvas de luz de mas de 100000 estrellas situdas en la constelación de Piscis. En la actualidad (febrero 2012) el Kepler ha detectado mas de 1000 estrellas que potencialmente pueden contener sistemas planetarios, previsiblemente cuando lea esto la cifra anterior se habrá incrementado sustancialmente y se habrá identificado cuales de estas estrellas candidatas contienen realmente planetas.

Como se ha indicado el trabajo fundamental del Kepler es obtener curvas de luz de estrellas. En algunos casos la variaciones de luminosidad corresponderan a sistemas planetarios pero en la mayoría de los ocasiones se deberá a la observación de sistemas de estrellas binarias eclipsantes.

## 6. Recursos adicionales

Las curvas de luz, y los datos correspondientes, de las eclipsantes binarias obtenidas por Kepler pueden descargarse de [http://archive.stsci.edu/kepler/eclipsing\\_binaries.html](http://archive.stsci.edu/kepler/eclipsing_binaries.html) y en <http://keplerebs.villanova.edu>. La descripción de los parámetros utilizados puede encontrarse en R.W. Slawson et al., 2011, AJ, 142, 160 (<http://arxiv.org/pdf/1103.1659v1.pdf>).

En Demonstrations: <http://demonstrations.wolfram.com/topic.html?topic=Astronomy>

En Eric Weisstein Word of Astronomy: <http://scienceworld.wolfram.com/astronomy>

Ejercicios básicos de astronomía: Astroex (<http://www.astroex.org>)

Los siguientes libros son unas introducciones excelentes y actualizadas de Astronomía y Astrofísica editadas por Pearson/Addison Wesley:

Astronomy Today por *Chaisson y McMillan*

An Introduction to Modern Astrophysics por *C. Ostlie*

Para el seguimiento de objetos de luminosidad variable (estrellas variables, seguimientos de supernovas y mucho más) el mejor sitio es: AAVSO | American Association of Variable Star Observers (<http://www.aavso.org>)

## 7. Carga del paquete: becl (BinariasEclipsantesCurvasLuz).

Se carga automáticamente al inicio, si no es así ejecute esta sección antes que ninguna otra