Planes de Muestreo

Guillermo Sánchez
Actualizado: 2007-09-20 (ejectuado de nuevo con Mathematica 8.0 en Mayo 2012, sin modificar)

Plan de muestreo simple

Fundamentos

Nuestro objetivo es establecer un muestreo por atributos (aceptación o rechazo) para un lote de tamaño N del que se toma una muestra n, aceptandose el lote si la cantidad piezas no conformes en la muestra es menor o igual que un valor r establecido como criterio de aceptación.

Llamamos p a la proporción verdadera de uds. disconformes en el lote, que nos es desconocida (salvo que se inspeccione el 100%). En un plan de muestreo se establece como criterio de aceptación $p \leq p_A$ siendo p_A la fracción maxima de unidades defectuosas en el lote que con una probabilidad P_a estamos dispuestos a aceptar. A estos valores de (p_A, P_a) se les denomina usualmente Nivel de Calidad Aceptable (o AQL)-: Por tanto, el AQL corresponde a la fracción defectuosa, p_A, en un lote tal que, para un plan de muestreo determinado, éste será rechazado con una probabilidad $\alpha = 1 - P_A$. α es conocido como riesgo del fabricante. En la curva OC es de interés tambien el nivel de calidad rechazable (o RQL) que corresponde a la fracción de defectuosas de un lote tal que, para un plan de muestreo determinado, éste será aceptado con una probabilidad β, conocida como riesgo del consumidor o comprador.

En terminos de test de hipótesis lo anterior podemos expresarlo como sigue:
La fracción p real es desconocida. Al tomar una muestra se trata de estimar si $p \leq p_A$ (aceptamos el lote) o $p > p_A$ (aceptamos el lote). Esto es equivalente a realizar un contraste de hipótesis en el que la hipótesis nula es H_0: $p \leq p_A$ y la alternativa H_1: $p > p_A$. Al realizar el contraste podemos cometer dos errores:

a) Rechazar H_0 cuando es cierta (error tipo I). Es decir: de la inspección de la muestra concluimos que $p > p_A$ cuando realmente $p \leq p_A$, por tanto rechazamos un lote que deberiamos aceptar. La probabilidad de que esto ocurra es α. A este error se llama riesgo del fabricante pues normalmente es él quien asume sus consecuencias: tirar o reinspeccionar producto bueno. Evidentemente el fabricante estára interesado que este valor sea lo mas pequeño posible, usualmente $\alpha = 0.05$ o 0.01, que quiere decir que en el 5% o 1% de las ocasiones se recharán lotes buenos.

α = {Probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es cierta} = {probabilidad de rechazar un lote con $p = p_A$}

b) Aceptar H_0 cuando es falsa (error tipo II). Es lo opuesto al caso anterior, obtenemos que $p \leq p_A$ cuando realmente $p > p_A$, por tanto aceptamos un lote que deberiamos rechazar. La probabilidad de que esto ocurra se le llama β. A este error se llama riesgo del consumidor o comprador pues es normalmente quien asume sus consecuencias: tomar por aceptable un producto que no lo es. Natualmente el comprador estára interesado que este valor sea lo más pequeño posible, usualmente $\beta = 0.05$ o 0.1, que quiere decir que en el 5% o 10% de las ocasiones se aceptarán lotes con una fraccion defectiva p_R.

β = {Probabilidad de aceptar H_0 cuando H_1es cierta} = {probabilidad de aceptar un lote con $p = p_R$}.

Para establecer un plan de muestreo riguroso matematicamente se requiere definir previamente α, p_A, β y p_R. Fijado los parametros anteriores la única forma de disminuir α y β simultanemamente es aumentar el tamaño de la muestra. En el límite: tamaño muestral = tamaño de la población $\alpha = \beta = 0$, pero en la práctica esto no suele ser economóco y a veces inviable (Ej.: análisis destructivos).

■ Calculo de α y β

Para establecer un plan de muestreo necesitamos relacionar matematicamente α, p_A, β y p_R. Inicialmente utilizamos la distribucion binomial. Esta función es valida para muestreo con reemplazamiento y da muy buena aproximación cuando el tamaño del lote, N, es muy grande con el tamaño de la muestra, n, situación muy frecuente en la práctica. Mas adelante lo extenderemos a la función hipergeométrica que es la que en rigor hay que emplear cuando el muestreo es sin reemplazamiento, aunque la diferencias en valores numéricos van a ser insignificantes con la binomial para muestras $n \ll N$ (tipicamente $n \leq 0.1\ N$). Además, el método para establecer es similar tanto si se emplea la distribución binomial como la hipegemétrica.

La probabilidad de que al tomar una muestra de tamaño n, de una población con una proporción p_A defectuosas, haya r defectuosas dada por la función de probabilidad PDF binomial es:

$$\text{PDF}[\boldsymbol{B}(n, r, p_A)] = \binom{n}{r} p_A{}^r (1 - p_A)^{n-r} \tag{1}$$

donde

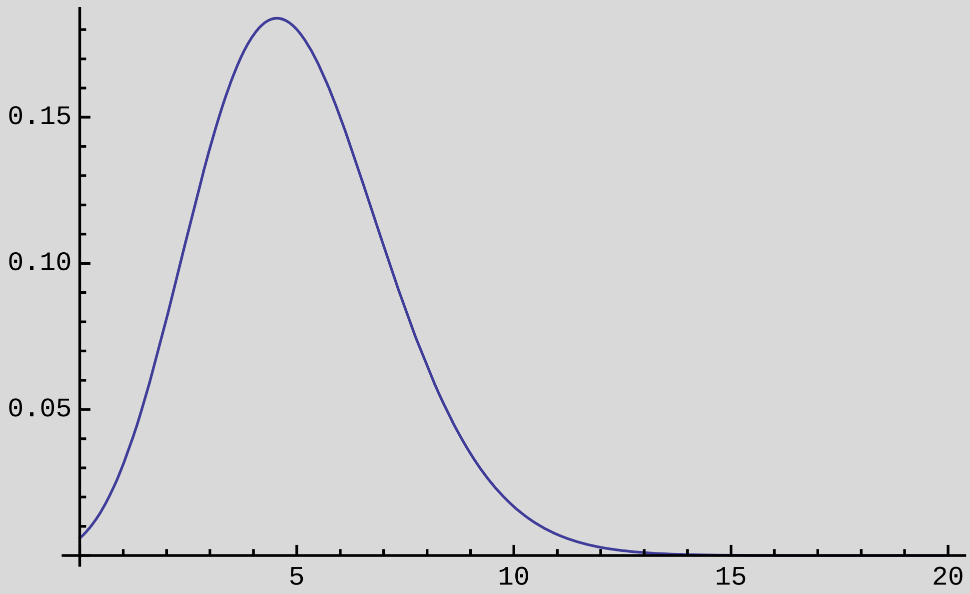
p_A	proporción de muestra defectuosas en el lote (cuando es desconocida como es el caso, se supone $p = p_A$)
n	tamaño de la muestra
r	número de rechazos en la muestra

En lenguaje del *Mathematica* la función anterior podemos expresar por

```
PB[n_, r_, pA_] := Binomial[n, r] pA^r (1 - pA)^(n-r)
```

- **Por ej.: En una muestra de 100 (*n*) uds en una población con el 5% de uds. defectuosa (p_A) las probabilidades de que haya *r* defectuosas se muestran en el gráfico (la probabilidad de que haya más de 20 defectuosas es practicamente nula).**

```
Plot[PB[100, r, 0.05], {r, 0, 20}]
```



Asumiendo las mismas condiciones, la probabilidad P_a de que haya r o menos piezas defectuosas está dada por la distribución acumulada de probabilidad (CDF) definida como:

$$P_a = \mathrm{CDF}[\boldsymbol{B}(n, r, p_A)] = \sum_{x=0}^{r} \binom{n}{r} {p_A}^r (1 - p_A)^{n-r} \quad (2)$$

donde

x indice de variación de r

La expresión anterior la convertimos al lenguaje del *Mathematica*

$$\texttt{CB[n\_, r\_, pA\_] :=} \sum_{x=0}^{r} \texttt{Binomial[n, x] pA}^{x} \, (1 - \texttt{pA})^{n-x}$$

- **Ej.: La probabilidad P_a de aceptar un lote para una población con un porcentaje de defectuosas p = 0.05 de la que tomamos una muestra de 30 (*n*) uds y ponemos el criterio de aceptar el lote si en la muestra hay 2 o menos uds. defectuosas es.**

```
CB[30, 2, 0.05]

0.812179
```

- **Determinación de α**

  El valor de α (Probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es cierta) será el complementario de P_a, esto es

$$\alpha = 1 - P_a = 1 - \mathrm{CDF}[\boldsymbol{B}(n, r, p_A)] \qquad (3)$$

```
alfaB[n_, r_, pA_] := 1 - Sum[Binomial[n, x] pA^x (1 - pA)^(n-x), {x, 0, r}]
```

$$\texttt{alfaB[n\_, r\_, pA\_]} := 1 - \sum_{x=0}^{r} \mathrm{Binomial}[n, x]\, pA^{x} (1 - pA)^{n-x}$$

En el ejemplo anterior, el riesgo de rechazar un lote bueno es:

```
alfaB[30, 2, 0.05]

0.187821
```

- **Determinación de β**

  El valor de β (probabilidad de aceptar un lote con $p = p_R$) está dado por

$$\beta = \sum_{x=0}^{r} \binom{n}{r} {p_R}^r (1 - p_R)^{n-r} \qquad (4)$$

$$\texttt{betaB[n\_, r\_, pR\_]} := \sum_{x=0}^{r} \mathrm{Binomial}[n, x]\, pR^{x} (1 - pR)^{n-x}$$

Ej.: Para el mismo ejemplo anterior tomamos $p_R = 0.1$

```
betaB[30, 2, 0.1]

0.411351
```

Observese que manteniendo la misma relación de proporción de uds defectuosas en la muestra (2/30) ambos errores disminuyen aumentando el tamaño muestral .

```
alfaB[120, 8, 0.05]

0.147407
```

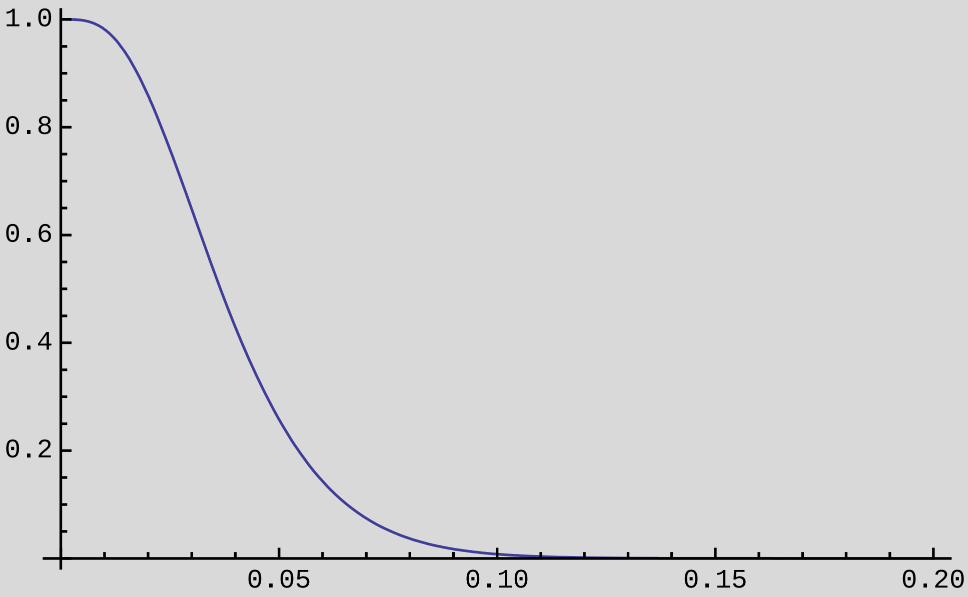
```
betaB[120, 8, 0.1]

0.141433
```

Curva caracteristica y curva de potencia

El valor de α y β podemos relacionarlo a través de la curva de operación caracteristica (OC). Fijado el tamaño de la muestra n y el el número de rechazos r admisibles en la muestra la curva caracteristica (OC) representa la probabilidad de aceptación P_a del lote en función de la fraccion, o porcentaje, de uds defectuosas de la población p. Es decir: se trata de representar $P_a = f(n, r, p)$ con n y r ctes para ello podemos utilizar la función antes definida `CB[n,r,p]` variando el valor de `p.` La abscisa de la curva OC representa la fracción defectuosa y las ordenada la probabilidad de aceptación. Ej.: Para una muestra de 100 uds y un criterio de aceptacion $r = 3$ la curva es

```
Plot[CB[100, 3, p], {p, 0, 0.2}]
```



Por tanto, la probabilidad de rechazar un lote que habría que aceptar para el caso anterior con $p = 0.05$ está dado por $\alpha = 1 - P_a$. Es decir

```
alfaB[100, 2, 0.05]

0.881737
```

La probabilidad de aceptar un lote que habría que rechazar, tomando $p_R = 0.06$, es muy baja

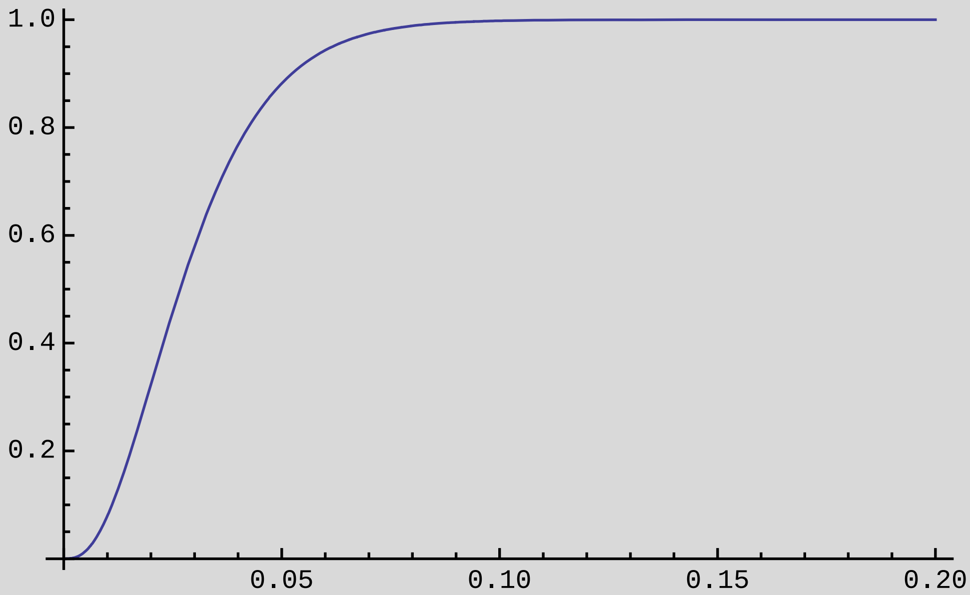
```
betaB[100, 2, 0.06]

0.0566128
```

El plan de muestreo anterior es claramente favorable al comprador. Observese que con bastante aproximación los datos anteriores de deducen observando la curva precedente.

A veces se prefiere utilizar la curva de potencia que representa α, esto es para el mismo ejemplo

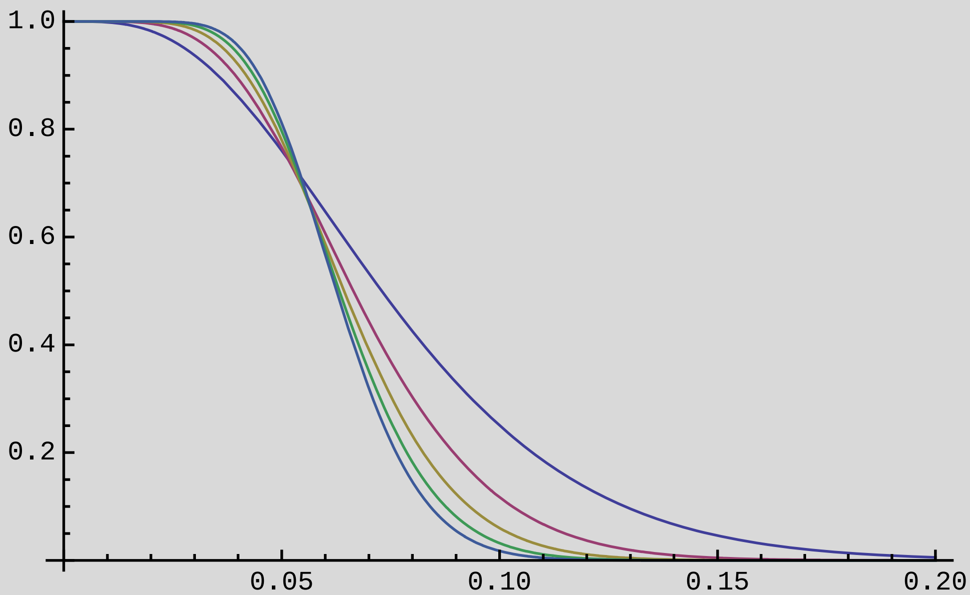
```
Plot[alfaB[100, 2, p], {p, 0, 0.2}]
```



Para un tamaño muestral fijo los valores α y β presenta una relacion inversa, en la medida que aumente uno disminuimos el otro, la única forma de disminuir ambos es aumentar el tamaño muestral. El β será muy util aplicar en el caso de que estemos interesados en protegernos de lotes con baja calidad podemos establecer un LTPD (lot tolerance percent defective), -otros nombres sinónimos son RQL o LQL- esto es: el nivel mas porbre de calidad que estamos dispuesto a aceptar para un lote individual.

Lo dicho puede observarse facilmente representando las OCs para distintos valores de {r/n = cte.}: {3/50, , 15/250}, que muestra que en la medida que aumentamos n va disminuyendo α y β.

```
Plot[Evaluate[Table[CB[50 n, 3 n , p], {n, 1, 5}] ], {p, 0, 0.2}]
```



Plan de muestreo en lotes grandes

El problema mas frecuente en muestreo es determinar el tamaño de la muestra y el número de uds. no conformes en la muestra. Vamos a describir como realizarlo en el caso de muestreos simples.

Sea una población de tamaño N, del que desconocemos el número de uds defectuosas. La probabilidad P_a de que haya r o menos defectuosas nos viene dada por la distribución hipergeométrica.

$$P_a = \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{5}$$

donde

D Número de piezas defectuosas en el lote (desconocidas).
f Fraccion de uds defectuosas: $f = D/N$, f es desconocida, se toma como valor la fracción máxima, p_A, de la población que admitiriamos que este formada por uds fuera de los límites de tolerancia.
α = nivel de significación (Probabilidad de cometer un error de tipo I que estamos dispuesto a asumir).
n = tamaño muestral

Consideremos inicialmente que el tamaño del lote es grande y $N >> n$, en este caso en vez de (5) podemos emplear con muy buena aproximacion (2), observese que para estas condiciones el resultado es independiente del tamaño del lote.

Usualmente α, p_A son fijos. Para cada valor de n obtendremos el número máximo de rechazos admisibles despejando r en (3). Esto puede hacerse como sigue:

```
muestra[n_, alfa_, pA_] :=
 Floor[r /. FindRoot[alfaB[n, r, pA] == alfa, {r, 1, 2}]]
```

Por ejemplo, para $\alpha = 0.05$, $p_A = 0.05$, y $n = 100$, r es

```
muestra[100, 0.05, 0.05]

8
```

Lo usual que que deseemos tener en cuenta el error de tipo II, es decir β, para ello hemos de fijar β y p_R lo que podemos hacer en función de la experiencia o por que nos sean valores dados. En definitiva tenemos cuatro valores fijos: α, p_A, β y p_R, para definir r cumpliendo con los cuatro valores anteriores sobre el único parametro que vamos a poder actuar es sobre el tamaño de la muestra. Se trata de resolver el sistema dado por las ecuaciones (3) y (4). Esto puede hacerse directamente, que no es facil, o usando métodos aproximados como el que se describe. Este mismo método puede emplearse para obtener una primera aproximación que puede ser utilizada para posteriormente para resolver el sistema formado por las ecs (3) y (4).

Método aproximado.- Consite en aplicar las ecs (6) (requiere que z siga aproximadamente una distribucion N(0,1) y que $N >> n$ para poder asumir que x -número de defectuoso- pueda aproximarse por una distribución de Poisson de media $\lambda = n\, p$).

$$\begin{aligned} r &= n\,p_A + z_\alpha \sqrt{n\,p_A}\,, \quad P(z > z_\alpha) = \alpha \\ r &= n\,p_R + z_\beta \sqrt{n\,p_R}\,, \quad P(z > z_\beta) = \beta \end{aligned} \tag{6}$$

por tanto

$$n = \frac{z_\alpha \sqrt{p_A} - z_\beta \sqrt{p_R}}{p_A - p_R} \tag{7}$$

Ejemplo : Sea $p_A = 0.02$ y $p_R = 0.04$, con $\alpha = \beta = 0.05$, es decir $z_\alpha = -z_\beta = 1.64$, por tanto :

```
Clear[n]
```

$$n = \left(\frac{z_\alpha \sqrt{p_A} - z_\beta \sqrt{p_R}}{p_A - p_R}\right)^2;$$

```
n = n /. {pA → 0.02, pR → 0.04, zα → 1.64, zβ → -1.64}
```

```
783.807
```

```
(n pA + zα √(n pA)) /. { zα → 1.64} /. pA → 0.02
```

```
22.1694
```

- **Ejemplo**

Determinar un plan de muestreo para α= p_A= 0.05 en el que el cliente admite un β =0.05, P_R = 0.1. (Ojo: Como n y r son enteros los valores de α y β no seran justo los especificados, sino que serán los más proximos).

El resultado exacto es:

```
betaB[313, 22, 0.1]
```

```
0.043623
```

```
alfaB[313, 22, 0.05]
```

```
0.0437683
```

El problema que tiene el caso anterior es que la muestra a tomar es muy grande, una alternativa es tomar una muestra mas pequeña manteniendo asegurado el riesgo del consumidor. En el ejemplo este valor sería

```
betaB[60, 2, 0.10]
```

```
0.0530451
```

En este caso el fabricante correría un riesgo mayor pero ahorraría gastos de inspección que debe valorar si económicamente le compensa.

```
alfaB[60, 3, 0.05]

0.352719
```

Plan de muestreo en lotes pequeños sin reemplazamiento

Cuando el tamaño de la muestra no es mucho menor que el del lote la aproximación a la binomial puede no ser suficiente, en este caso es necesario operar directamente con la distribución hipergeométrica dada porla ec(5) que podemos escribirla como:

```
ProbA[D_, N_, n_, r_] :=
  Sum[(Binomial[D, x] Binomial[N - D, n - x]) / Binomial[N, n], {x, 0, r}]
```

Vamos a utilizarla para calcular la probabilidad de aceptar el lote fijados D, N, n, y r.

Ejemplo.: Sea un lote de 100 (N) uds en donde exista 5 (D) defectuosas, tomamos una muestra de 44 (n) uds y ponemos el criterio de aceptar el lote si en la muestra hay una o ninguna defectusas (x = {0, 1}).

```
ProbA[5, 100, 44, 1] // N

0.26539
```

Por lo demas el procedimiento para calcular α y β es el mismo que el descrito en el apartado anterior para la binomial. Como valor de p_A, se toma f.

■ Muestreo LTPD

Sea una población de tamaño N, del que desconocemos el número de uds defectuosas. Pretendemos garantizar que rechazamos con una probabilidad P aquellos lotes procedentes de una población que contenga una fracción F de la misma está dentro de unos límites de tolerancia establecidos. Para ello necesitamos establecer un plan de muestreo en el definiremos el tamaño muestral y el número de uds defectuosas que estamos dispuesto a admitir en la muestra para aceptar el lote. Este criterio está basado en el propuesto por Dodge-Romig (LTPD, lot tolerance percent defective) y se utiliza cuando se pretende ser muy estricto en prevenir la aceptación de lotes no conformes.
El criterio que se seguirá para establecer el plan de muestreo es: Tomaremos $F = 1 - f$ y estos lotes los rechazaremos con una probabilidad α = 1-P_a. Observese que P_a es fijado por el consumidor y corresponde a la fracción defectiva máxima que está dispuesto a aceptar (LTPD), por ello estamos limitando el riesgo del consumidor. De (5) se obtiene:

$$\alpha = 1 - P_a = \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{8}$$

Se trata de despejar r en la ec. anterior , previamente reescribimos el lado derecha de (3) haciendo $D = f\,N$ y expresamos el resultado en terminos de la función gamma, con la que se puede operar mas facilmente.

```
eq1[N_Integer, n_, f_, r_] :=
 FunctionExpand[ProbA[D, N, n, r] /. D -> f N]
```

Ahora se trata de fijar el numero de defectos *r* que estamos dispuestos a admitir, y obtener el valor de *n* en la ec. anterior, esto es: resolver eq1[N, n, f,r] = 1-Pa = alfa, siendo *n* el valor a calcular.

```
eq2[N_Integer, alfa_, f_, r_] :=
 Ceiling[n /. FindRoot[eq1[N, n, f, r] == alfa, {n, 20}]]
```

Ejemplo: Si tenemos un lote de tamaño N=300, y tomamos como criterio de aceptación alfa = 1-0.95 = 0.05 , f = 1 - 0.95 = 0.05, y r ≤se obtiene que el tamaño la muestra es n = 83

```
eq2[300, 0.05, 0.05, 1]

83
```

En resumen tomariamos una muestra de tamaño 83 y aceptariamos el lote si en la muestra hay ninguna o 1 ud. disconforme.

Plan de muestreo con reemplazamiento o para muestras grandes

En el caso de que la inspección sea con reemplazamiento, o que el tamaño de la muestra sea pequeña comparado con el del lote la función de probabilidad (PDF) de que en un lote de tamaño N , con D piezas defectuosas, tomada una muestra de tamaño n aparezcan r defectuosas esta dada por la distribución hipergeométrica: un lote con una fracción f de piezas defectuosas está dada por la distribución hipergeométrica (HG):

$$\mathrm{PDF}[\mathrm{HG}(D, N, n, r)] = \frac{\binom{D}{r}\binom{N-D}{n-r}}{\binom{N}{n}} \tag{9}$$

donde
N tamaño del lote
D número de piezas defectuosas en el lote
n Tamaño de la muestra
r número de rechazos en la muestra

En lenguaje del *Mathematica* la función anterior podemos expresar por

```
Pa[D_, N_, n_, r_] :=
 Binomial[D, r] Binomial[N - D, n - r] / Binomial[N, n]
```

Por ej.: Un lote de 100 (N) uds en donde exista 5 (D) defectuosas, si tomamos una muestra de 44 (n) uds la probabilidad de que no haya ninguna ud defectuosa en la muestra es (r = 0):

```
Pa[5, 100, 44, 0] // N

0.0507364
```

Asumiendo las mismas condiciones, la probabilidad de que haya r o menos piezas defectuosas está dada por la distribución acumulada de probabilidad (CDF) definida como:

$$\mathrm{CDF}[\mathrm{HG}(D, N, n, r)] = \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{10}$$

donde
x indice de variación de r
ProbA Probabilidad de que tomada *n* uds haya *r* o menos defectuosas

La expresión anterior la convertimos al lenguaje del *Mathematica*

```
ProbA[D_, N_, n_, r_] :=
  Sum[(Binomial[D, x] Binomial[N - D, n - x]) / Binomial[N, n], {x, 0, r}]
```

Vamos a utilizarla para calcular la probabilidad de aceptar el lote fijados D, N, n, y r.

Ejemplo.: Sea un lote de 100 (N) uds en donde exista 5 (D) defectuosas, tomamos una muestra de 44 (n) uds y ponemos el criterio de aceptar el lote si en la muestra hay una o ninguna defectusas (x = {0, 1}).

```
ProbA[5, 100, 44, 1] // N

0.26539
```

Planes de muestreo (por atributos)

```
Quit[]
```

En este apartado vamos a establecer un plan de muestreo por atributos (aceptación o rechazo) secuencial consistente en hacer una primera inspección para un lote de tamaño N del que se toma una muestra n , si en esta se produce cero rechazos se acepta el lote, en el caso de que se produzca 1 o 2 rechazos se toma una muestra adicional del mismo lote, si se dan mas de 2 se rechaza el lote. Si en esta muestra ampliada contiene cero rechazos el lote se acepta, y si contiene dos se rechaza. En el caso de que contenga un rechazo puede ocurrir:
a) Que en el primer muestreo se tuviera solo un rechazo en cuyo caso se vuelve a tomar otra muestra adicional. Si en ella aparecen cero rechazos se acepta el lote, en caso contrario se rechaza definitivamente.
b) Que en el primer muestreo se dieron dos rechazos en este caso se rechaza el lote.
El procedimiento podría extenderse para contemplar un número indefinido de inspecciones seceuenciales, pero por razones practicas se ha optado por limitarlo a tres.

El plan de muestreo se establecerá definiendo como requisito de aceptacion que cumpla el criterio P/F que definimos como aquel que para un lote cualquiera procedente de una población que contenga una fracción F

dentro de los límites de aceptación (o su equivalente: una fracción f de uds. defectuosas, $f = 1 - F$) lo rechazaremos con una probabilidad P. El método que describimos permite definir este plan de muestreo para cualquier valor de P y F, no obstante numericamente se resuelve el caso partícular de que P/F sea 95/95.

Para los cálculos que siguen vamos a utilizar el programa de cálculo simbólico y numérico *Mathematica.*

■ Fundamentos

En el caso de que la inspección sea sin reemplazamiento, la función de probabilidad (PDF) de que en un lote de tamaño N , con D piezas defectuosas, tomada una muestra de tamaño n aparezcan r defectuosas esta dada por la distribución hipergeométrica: un lote con una fracción f de piezas defectuosas está dada por la distribución hipergeométrica (HG):

$$\text{PDF}[\text{HG}(D, N, n, r)] = \frac{\binom{D}{r}\binom{N-D}{n-r}}{\binom{N}{n}} \tag{11}$$

donde

N	tamaño del lote
D	número de piezas defectuosas en el lote
n	Tamaño de la muestra
r	número de rechazos en la muestra

En lenguaje del *Mathematica* la función anterior podemos expresar por

```
Pa[D_, N_, n_, r_] :=
 Binomial[D, r] Binomial[N - D, n - r] / Binomial[N, n]
```

Por ej.: Un lote de 100 (N) uds en donde exista 5 (D) defectuosas, si tomamos una muestra de 44 (n) uds la probabilidad de que no haya ninguna ud defectuosa en la muestra es ($r = 0$):

```
Pa[5, 100, 44, 0] // N

0.0507364
```

Asumiendo las mismas condiciones, la probabilidad de que haya r o menos piezas defectuosas está dada por la distribución acumulada de probabilidad (CDF) definida como:

$$\text{CDF}[\text{HG}(D, N, n, r)] = \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{12}$$

donde

x	indice de variación de r
ProbA	Probabilidad de que tomada *n* uds haya *r* o menos defectuosas

La expresión anterior la convertimos al lenguaje del *Mathematica*

```
ProbA[D_, N_, n_, r_] :=
   r
  ∑ (Binomial[D, x] Binomial[N - D, n - x]) / Binomial[N, n]
 x=0
```

Vamos a utilizarla para calcular la probabilidad de aceptar el lote fijados D, N, n, y r.

Ejemplo.: Sea un lote de 100 (N) uds en donde exista 5 (D) defectuosas, tomamos una muestra de 44 (n) uds y ponemos el criterio de aceptar el lote si en la muestra hay una o ninguna defectusas (x = {0, 1}).

```
ProbA[5, 100, 44, 1] // N

0.26539
```

■ Inspeccion con reemplazamiento o para muestras grandes

```
Quit[]
```

En el caso de que la inspección sea con reemplazamiento, o que el tamaño de la muestra sea pequeña comparado con el del lote la función de probabilidad (PDF) de que en un lote de tamaño N , con D piezas defectuosas, tomada una muestra de tamaño n aparezcan r defectuosas esta dada por la distribución hipergeométrica: un lote con una fracción f de piezas defectuosas está dada por la distribución hipergeométrica (HG):

$$\text{PDF}[\text{HG}(D, N, n, r)] = \frac{\binom{D}{r}\binom{N-D}{n-r}}{\binom{N}{n}} \tag{13}$$

donde
N tamaño del lote
D número de piezas defectuosas en el lote
n Tamaño de la muestra
r número de rechazos en la muestra

En lenguaje del *Mathematica* la función anterior podemos expresar por

```
Pa[D_, N_, n_, r_] :=
 Binomial[D, r] Binomial[N - D, n - r] / Binomial[N, n]
```

Por ej.: Un lote de 100 (N) uds en donde exista 5 (D) defectuosas, si tomamos una muestra de 44 (n) uds la probabilidad de que no haya ninguna ud defectuosa en la muestra es ($r = 0$):

```
Pa[5, 100, 44, 0] // N

0.0507364
```

Asumiendo las mismas condiciones, la probabilidad de que haya r o menos piezas defectuosas está dada por la distribución acumulada de probabilidad (CDF) definida como:

$$\text{CDF}[\text{HG}(D, N, n, r)] = \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{14}$$

donde
x indice de variación de r
ProbA Probabilidad de que tomada *n* uds haya *r* o menos defectuosas

La expresión anterior la convertimos al lenguaje del *Mathematica*

```
ProbA[D_, N_, n_, r_] :=
  Sum[(Binomial[D, x] Binomial[N - D, n - x]) / Binomial[N, n], {x, 0, r}]
```

$$\text{ProbA}[D\_, N\_, n\_, r\_] := \sum_{x=0}^{r} (\text{Binomial}[D, x]\ \text{Binomial}[N - D, n - x]) / \text{Binomial}[N, n]$$

Vamos a utilizarla para calcular la probabilidad de aceptar el lote fijados *D*, *N*, *n*, y *r*.

Ejemplo.: Sea un lote de 100 (*N*) uds en donde exista 5 (*D*) defectuosas, tomamos una muestra de 44 (*n*) uds y ponemos el criterio de aceptar el lote si en la muestra hay una o ninguna defectusas (x = {0, 1}).

```
ProbA[5, 100, 44, 1] // N
```

```
0.26539
```