SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Guillermo Sánchez (http://diarium.usal.es/guillermo)

Departamento de Economia e Hª Económica. Universidad de Salamanca.

Actualizado : 2012-10-28

Sobre el estilo utilizado

Mathematica las salidas (*Output*) por defecto las muestra utilizando el estilo: `StandardForm`. En su lugar preferiamos utilizar el estilo `TraditionalForm` que da una apariencia a las salidas (*Output*) coincidente con el habitualmente utilizado en la notación clásica utilizada en las matemáticas.

En cuanto a las entradas (*input*) hemos optado por escribirlas utilizando StandardForm y después la convertimos a TraditionalForm (esto se hace marcando la celda y en el la barra de menu:> Cell:>Convert To:>TraditionalForm)

En el caso de las matrices lo más comodo es escribirlas como una lista (también puede escribirse directamente como matriz utilizandondo una de las paletas incluidas en la barra de menu, pero es mas engorroso):

Si en una celda el *input* está en notación TraditionalForm y quiere ver la forma de estándar de *Mathematica* convierta la celda a Standard-Form marcando la celda y en la barra de menu:> Cell:>Convert To:>TraditionalForm)

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de ecuaciones lineales en notación matricial

Sea el sistema de ecuaciones donde :

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 &= b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 &= b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

donde x_i son variables que se desean determinar.

Observese que el sitema anterior podemos expresarlo en notación matricial como sigue

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix};$$

```
A.X == B
```

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

También podemos referirnos al sistema anterior como sistema S(A,**b**).

Si junto a la matriz **A** le añadimos el vector **b** tenemos lo que se denomina matriz ampliada de A, que denotamos por Am (a veces se donota por $\overline{A}$ o A*)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Si es posible encontrar los valores de x_i: {con i = 1, 2, 3}, que son solución del sistema decimos que el sistema es compatible, en otro caso es incompatible.

Si tomamos todos los $b_i = 0$ tenemos un sistema homogeneo.

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

```
A.X == B
```

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al menos tendremos como solución $x_i = 0$ {con $i = 1, 2, 3$} (frecuentemente llamada solución trivial)

Para resolver el sistema de ecuaciones hay distintos métodos. Por ejemplo.:

El método de Gauss que consiste en transformar la matriz en otra cuya matriz de coeficientes sea escalonada.

El método de la matriz inversa. Consiste en calcular la ecuación A.X ==B es: A^{-1}.A.X = X =A^{-1}.B

Expresa el siguiente sistema de ecuaciones en forma de matrices

$$\begin{aligned} y1 &= z1 + z2; \\ y2 &= 2\,z1 - z2; \\ y3 &= z1 + 3\,z2; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y1} \\ \mathbf{y2} \\ \mathbf{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{z1} \\ \mathbf{z2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z1 + 2\,z2 \\ 2\,z1 - z2 \\ z1 + 3\,z2 \end{pmatrix}$$

Resuelva el siguiente sistema: x-3y+5 z==1,2x-7y+2z==3,5x-11y+9z==7 con *Mathematica*.

Las funciones de *Mathematica:* `Solve` *y* `Reduce` permiten resolver directamente el sistema cuando se define explicitamente. La función `LinearSolve` lo resuelve cuando este se expresa en notación matricial, esto es en la forma: A X = B.

```
Solve[{x - 3 y + 5 z == 1, 2 x - 7 y + 2 z == 3, 5 x - 11 y + 9 z == 7}, {x, y, z}]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{13}{8},\ y \to 0,\ z \to -\frac{1}{8}\right\}\right\}$$

```
Reduce[{x - 3 y + 5 z == 1, 2 x - 7 y + 2 z == 3, 5 x - 11 y + 9 z == 7}, {x, y, z}]
```

$$x = \frac{13}{8} \bigwedge y = 0 \bigwedge z = -\frac{1}{8}$$

```
A = {{1, -3, 5}, {2, -7, 2}, {5, -11, 9}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \end{pmatrix}$$

```
B = {1, 3, 7}
```

{1, 3, 7}

```
LinearSolve[A, B]
```

$$\left\{\frac{13}{8},\ 0,\ -\frac{1}{8}\right\}$$

Calcular por el método de Gauss y por el de la matriz inversa el siguiente sistema:

x + y - z = 1 ; x - y + z = 1 ; -x + y + z = 1;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix};\ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix};$$

- Comprobamos que las matrices anteriores respresentan el sistema.

```
A.X == B
```

$$\begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \\ -x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mediante operaciones elementales el sistema anterior se trasforma en:

$$\begin{pmatrix} x+y-z \\ -y+z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es *x=1, y=1, z=1*;

Al mismo resultado llegamos aplicando el método de la matriz inversa.X $=A^{-1}$.B

$$\mathbf{AI} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto : {x, y, z}

```
AI.B
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A la misma solución habriamos llegado dierectamente con *Mathematica* :

```
Solve[{x + y - z == 1, x - y + z == 1, -x + y + z == 1}, {x, y, z} ]
```

$\{\{x \to 1,\ y \to 1,\ z \to 1\}\}$

```
Reduce[{x + y - z == 1, x - y + z == 1, -x + y + z == 1}, {x, y, z} ]
```

$x = 1 \wedge y = 1 \wedge z = 1$

Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema

$$3x - y + z + t - 2u = 1;$$
$$-2x + y - z + 6t - 7u = 2;$$
$$x + 7t - 9u = 3;$$

a) Lo expresamos en forma de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 6 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

```
A.X == B
```

$$\begin{pmatrix} t - 2u + 3x - y + z \\ 6t - 7u - 2x + y - z \\ 7t - 9u + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Contruimos la matriz ampliada Am

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 6 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos el rango de Am

Vemos que que una de las filas de la $\overline{A}$ puede hacerse 0 por operaciones elementales con las otras, por tanto el rango es 2

```
RowReduce[{{3, -1, 1, 1, -2, 1}, {-2, 1, -1, 6, -7, 2}, {1, 0, 0, 7, -9, 3}}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 20 & -25 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Tambien podemos obtenerlo directamente utilizando la función `MatrixRank`.

$$\mathbf{MatrixRank}\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 6 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & -9 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

2

Que es el mismo rango que A

MatrixRank[*A*]

2

Cuando rango[A] = Rango[$\overline{A}$] el sistema es compatible (Teorema de Rouché-Fröbenius). Como Rango[$\overline{A}$] = 2, indica que tenemos dos ecuaciones independiente. Por tanto tenemos 5 variables con 2 ecuaciones linealmente independientes. Es decir: el sitema tiene 2 variables (las que eligamos) que podemos expresarla en función de las otras 3, que denominamos parámetros (a veces se dice quue el sistema tiene 3 grados de libertad). El sistema es indeterminado pues al existir mas incógnitas que ecuaciones lineamente independientes, y como consecuacias tiene muchas soluciones (de hecho infinitas).

El resultado del sistema podemos expresarlo como sigue (utilizamos la matriz escalonada que obtuvimos para calcular el rango):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 20 & -25 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0\,y & 0\,z & 7\,t & -9\,u & 3 \\ 0\,x & 1\,y & -1\,z & 20\,t & -25\,u & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos el resultado del sistema (dejamos las variables a la derecha y el resto de los términos pasan a la izquierda cambiados de signo):

$$x = 9\,u - 7\,t + 3;$$
$$y = 25\,u - 20\,t + z + 8;$$

Cuando el numero de variables coincide con el de ecuaciones linealmente independientes entonces el sistema tiene una única solución, se dice que el sistema es determinado.

Dado el sistema, ¿Tiene solución?¿Cual es?

$$\boldsymbol{x + y + 2\,z + 3\,t + = -1;}$$
$$\boldsymbol{-x - 2\,y - 3\,z - 4\,t = 0;}$$
$$\boldsymbol{2\,x + 3\,y + 5\,z + 7\,t = 1;}$$
$$\boldsymbol{2\,x + 2\,y + 4\,z + 6\,t = 0;}$$

Contruimos las matrices A y la matriz ampliada Am y calculamos los rangos respectivos.

```
A = {{1, 1, 2, 3}, {-1, -2, -3, -4}, {2, 3, 5, 7}, {2, 2, 4, 6}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Por operaciones elementales llegamos a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango es :

2

```
Am = {{1, 1, 2, 3, -1}, {-1, -2, -3, -4, 0}, {2, 3, 5, 7, 1}, {2, 2, 4, 6, 2}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Por operaciones elementales llegamos a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango es :

3

Como el rango de la matriz A y Am son distintos el sistema es incompatible y no tiene solución.

Discutir el sistema para distintos valores de a.

$x + a\,y + 3\,z = 2;$
$x + \ y - z = 1;$
$2\,x + 3\,y + a\,z = 3;$

Solución

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son las siguientes:

```
Clear[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

Por medio de varias operaciones elementales (i) F1<->F2;(ii)F2->F2-F1, F3->F3-2F1;(iii) F2<->F3; (iv) F3->F3+(1-a)F2 se llega a la siguiente matriz ampliada escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 6 & 2 - a \end{pmatrix}$$

Para estudiar la compatibilidad del sistema necesitamos determinar el rango de A1 (la matriz formada por las 3 primeras columnas de A1m) y el de A1m.

El rango de A1 depende de si valor de $-a^2 - a + 6 = 0$ o toma otro valor. Por ello lo primero es obtener las soluciones de $-a^2 - a + 6 = 0$.

```
Reduce[-a^2 - a + 6 == 0, x]
```

$a = -3 \vee a = 2$

Si a $\neq 2$ o a $\neq -3$ entonces Rango[A] = Rango[Am] =3, entonces el sistema es compatible y determinado. Es decir, tiene solución.

Con `Solve` obtenemos la solución (es valida para a $\neq -3$) :

```
Solve[{x + a y + 3 z == 2, x + y - z == 1,
2 x + 3 y + a z == 3}, {x, y, z}]
```

$$\left\{\left\{x \to 1,\ y \to -\frac{1}{-a-3},\ z \to \frac{1}{a+3}\right\}\right\}$$

Si a = 2 Rango[A] = Rango[Am] =2 el sistema es compatible indeterminado. Es decir: el sistema tiene infinitas soluciones, pues tiene dos ecuaciones linealmente independientes y tres variables. Tomanos las dos primeras ecuaciones y la resolvemos dejando la variable x como parametro.

```
Solve[{x + a y + 3 z == 2, x + y - z == 1}, { y, z}]
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{5-4\,x}{a+3},\ z \to -\frac{a\,(-x) + a + x - 2}{a+3}\right\}\right\}$$

Si a = 3 Rango[A] = 2 y Rango[Am] =3 el sistema es incompatible. Es decir: el sistema no tiene solución.

La solución completa podemos obtenerla directamente con `Reduce` en función de los valores que tome a

```
Reduce[{x + a y + 3 z == 2, x + y - z == 1,
2 x + 3 y + a z == 3}, {x, y, z}]
```

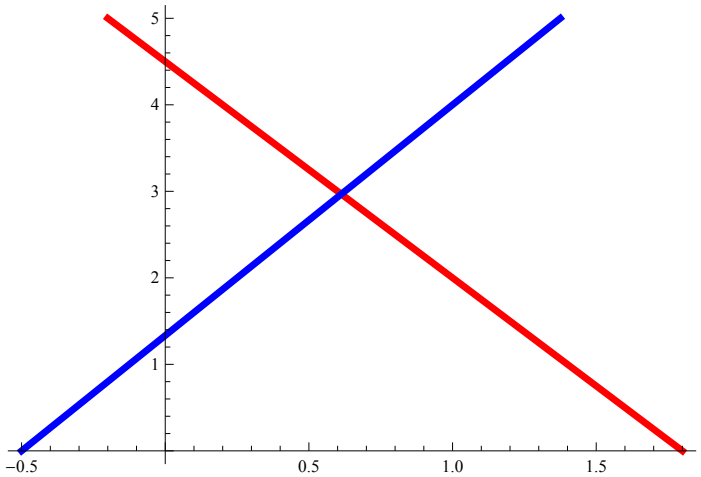
$$\left(a=2 \bigwedge y=\frac{1}{5}(5-4x) \bigwedge z=\frac{x}{5}\right) \bigvee \left(a-2\neq 0 \bigwedge x=1 \bigwedge a+3\neq 0 \bigwedge y=\frac{1}{a+3} \bigwedge z=y\right)$$

Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales

El siguiente ejemplo resuelve un sistema de ecuaciones. Al tener dos variable cada sistema representa una recta. Si el sistema tiene solución esta corresponde al punto de corte de la rectas

```
Solve[{5 x + 2 y == 9, 8 x - 3 y == -4}, {x, y}]
```

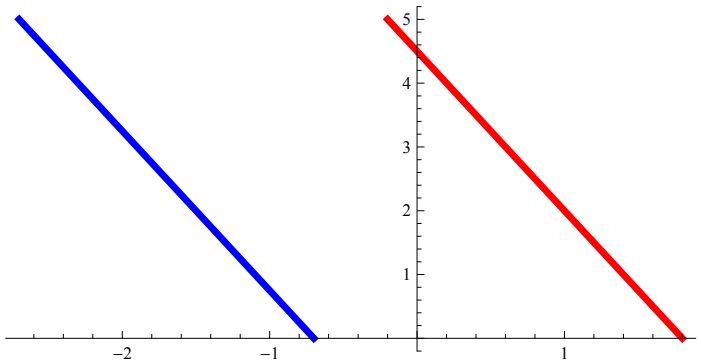
$$\left\{\left\{x\to\frac{19}{31},\ y\to\frac{92}{31}\right\}\right\}$$



El siguiente ejemplo el sistema no tiene solución. Corresponde al caso en el que la restas son paralelas

```
Solve[{5 x + 2 y == 9, 10 x + 4 y == -7}, {x, y}]
```

{ }

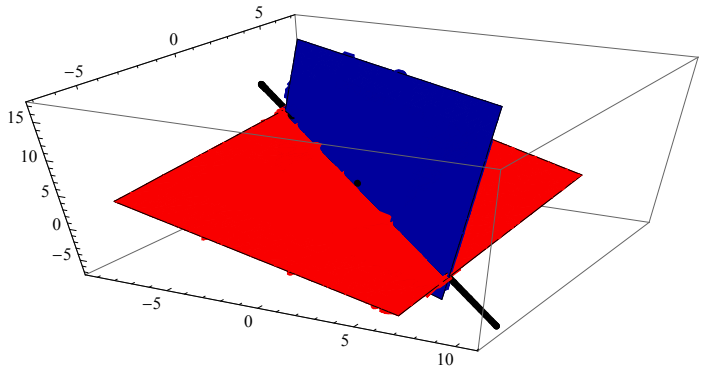


Las siguientes ecuaciones tienen tres variables. Cada ecuación geometricamente puede ser representada por un plano. Si resolvemos el sistema la solución sera una recta, que sera la que se obtiene donde se cortan los dos planos.

```
f = 5 x - 2 y + 7 z == 15;
g = 3 x + 8 y - z == -4;
```

```
Solve[{f, g}, {x, y}][[1]]
```

$$\left\{x \to \frac{1}{23}(56 - 27 z),\ y \to \frac{13 z}{23} - \frac{65}{46}\right\}$$

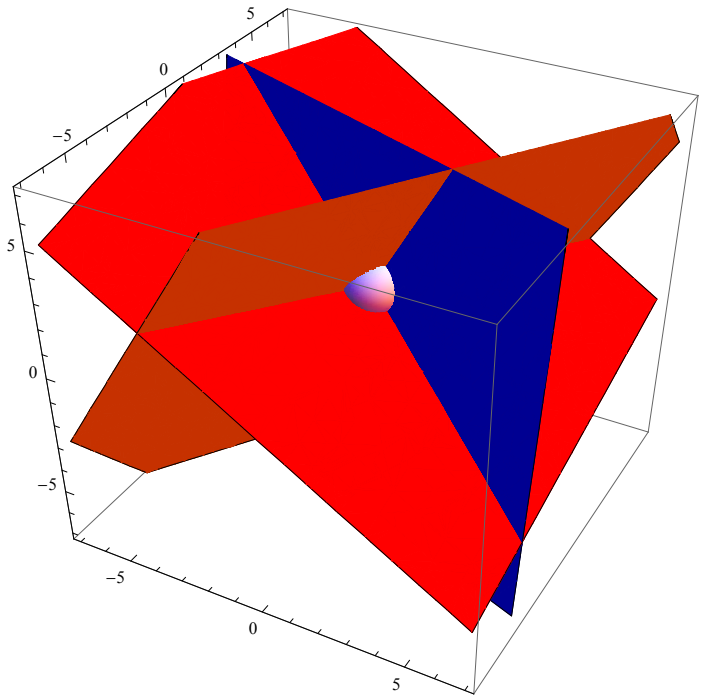


Al sistema anterior le añadimos una nueva ecuación. Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones. La solución corresponde al punto de intersección de los tres planos,

```
h = -9 x + 6 y + 5 z == 7;
```

```
soln = Solve[{f, g, h}, {x, y, z}][[1]]
```

$$\left\{x \to \frac{13}{109},\ y \to -\frac{65}{218},\ z \to \frac{215}{109}\right\}$$



Ejercicios propuestos

Determinar el valor de a∈ℝ para que el sistema
$2x - 5y + 3z == 0,\ x - y - z == 0,\ 3x + ay + z == 0$ tenga solución no trivial.

```
Clear[a]
```

El sistema anterior en notación matricial es A.X = 0. Donde la matriz A es

```
A = {{2, -5, 3}, {1, -1, -1}, {3, a, 1}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema anterior es homogeo (recuerdese que se dice que un sistema es homogeneo para A.X = B con B=0, es decir A X = 0) y como tal es compatible pues el rango de A será el mismo que el de la ampliada. Por tanto de lo que se trata es ver para que que valores de a casos de A

Podemos aplicar el método de Gauss directamente sobre el sistema de ecuaciones o, lo que es equivalente, sobre A :

Intercambiamos F1<->F2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}$$

{F1, -2 F1 +F2, -3F1+F3}

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & a+3 & 4 \end{pmatrix}$$

{F1, F2, F2 + F3}

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & a & 9 \end{pmatrix}$$

{F1, F2, (a/3) F2 + F3}

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{5a}{3}+9 \end{pmatrix}$$

El sistema será indeterminado cuando A tenga rango 2, y eso ocurrirá cuando $\frac{5a}{3} + 9 = 0$. En otro caso su rango será 3 y por tanto el sistema será determinado (esto es: número de incognitas igual al de ecuaciones linealmente independientes).

$$\mathbf{Reduce}\left[\frac{5a}{3} + 9 == 0,\ a\right]$$

$$a = -\frac{27}{5}$$

En conclusión : Si a = $-\frac{27}{5}$ tendremos un sistema de dos ecuaciones: {x + y +z = 0, -3 y+5z = 0} cuya solución será (dejando x como variable independiente):

```
Solve[{x + y + z == 0, -3 y + 5 z == 0}, {y, z}]
```

$$\left\{\left\{y \to -\frac{5x}{8},\ z \to -\frac{3x}{8}\right\}\right\}$$

Obviamente el sistema inicial tiene siempre como solución la llamada solución trivial (es aquella en que todas las variables son 0, estos x = y = z = 0)

- Observe que con Mathematica podriamos haber llegado directamente a la misma conclusión

```
Reduce[{2 x - 5 y + 3 z == 0, x - y - z == 0,
3 x + a y + z == 0}, {x, y, z}]
```

$$\left(a = -\frac{27}{5} \bigwedge y = \frac{5x}{8} \bigwedge z = \frac{3x}{8}\right) \bigvee (5a + 27 \neq 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0)$$

Discutir el sistema de ecuaciones lineales: {x+y+z ==a, x+y+ a z =1, x + a y +z = 1, a x+ y + z = 1} para distintos valores del parámetro a

```
{x + y + z == a,
 x + y + a z = 1,
 x + a y + z = 1,
 a x + y + z = 1}
```

Construimos la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
{F2 -> F2-F1, F3-> F3-F1, F4-> F4 - a F1}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

F2 ⇔ F3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

F4 ⇒ F2+F4,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

F4 ⇒ F4+F3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-2a+3 \end{pmatrix}$$

Como $-a^2 - 2a + 3 =$

$$-(a-1)(a+3)$$

se concluye

Si **a = 1 ⟹ rang A = rang Am =1**, el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si **a = - 3 ⟹ rang A = rang Am =3**, el sistema es compatible determinado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si **a ≠ 1 y a ≠ -3 ⟹ rang A = 3 y rang Am = 4**, el sistema es incompatible

Se puede obtener directamente la solucion:

```
Reduce[{x + y + z == a, x + y + a z == 1, x + a y + z == 1, a x + y + z == 1}, {x, y, z}]
```

$$(a = 1 \wedge z = -x - y + 1) \vee (a = -3 \wedge x = -1 \wedge y = -1 \wedge z = -1)$$

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales {3 x - y + 2 z == 1, x + 4y + z == a, 2x -5 y + b z== -2} para distintos valores de los parámetros `a, b ∈ ℝ.`

```
Clear[F1, F2, F3]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & a \\ 2 & -5 & b & -2 \end{pmatrix}$$

F2 <-> F1

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & a \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & b & -2 \end{pmatrix}$$

{F2 -> F2 - 3 F1, F3 -> F3 - 2 F1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & a \\ 0 & -13 & -1 & 1-3a \\ 0 & -13 & b-2 & -2a-2 \end{pmatrix}$$

Hacemos F3 -> F3 -> F2 y ya nos queda la matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & a \\ 0 & -13 & -1 & 1-3a \\ 0 & 0 & b-1 & a-3 \end{pmatrix}$$

Nos encontramos las siguientes posibilidades:

a) Si $b = 1$ y $a = 3$ en la matriz escalonada nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rang A = rang A' = 2 y el sistema es compatible e indeterminado

b) Si $b = 1$ y $a \neq 3$ en la matriz escalonada nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & a \\ 0 & -13 & -1 & 1-3a \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rang A = 2 y rang A' = 3 y el sistema es incompatible.

c) Si $b \neq 3$ rang A = 3 y rang A' = 3 el sistema es compatible determinado.

A la misma conclusion se llega directamente directamente utilizando **`Reduce`**.

```
Reduce[{3 x - y + 2 z == 1,
  x + 4 y + z == a,
  2 x - 5 y + b z == -2}, {x, y, z}]
```

$$\left(b = 1 \bigwedge a = 3 \bigwedge y = \frac{x+5}{9} \bigwedge z = \frac{1}{9}(7-13x)\right) \bigvee$$
$$\left(b-1 \neq 0 \bigwedge x = \frac{a\,b - 10\,a + 4\,b + 23}{13\,(b-1)} \bigwedge y = \frac{1}{9}(2\,a + x - 1) \bigwedge z = \frac{1}{9}(a - 13\,x + 4)\right)$$

Funciones que se ejecutan automaticamente al inicio