Grupos de Virasoro
y
Esquemas de Hurwitz

Francisco J. Plaza Martín

fplaza@usal.es

Departamento de Matemáticas

Universidad de Salamanca

trabajo conjunto con J. M. Muñoz Porras

Introducción

Nuestro trabajo ha de enmarcarse en el estudio de los espacios de Hurwitz (móduli de revestimientos de curvas con ramificación prefijada)
Tiene conexiones con varios temas:

- Espacio de móduli de curvas.
- Revestimientos de Galois con ramificación prefijada (trabajo en curso).
- Teoría de Gromov-Witten (teoría enumerativa de estos revestimientos).
- Aplicaciones: deformaciones isomonodrómicas ("monodromy preserving differential equations", e.g. ecuación de Schlesinger). Haremos unos comentarios al final.

Plan de la exposición

Está estruturado como sigue:

- Espacios de móduli de revestimientos.
- Objeto de nuestro trabajo: functor de Hurwitz.
- Grassmannianas infinitas.
- Esquemas de Hurwtiz.
- Propiedades infinit. de los Hurwitz.
- Fibrados sobre los Hurwitz.
- Deformaciones isomonodrómicas.
- Fibrados y def. isomonodrómicas.

Móduli de revestimientos

La aplicación:

$$\{\text{ revestimientos } Y \to X\} \to \{\text{ curvas }\}$$
$$Y \to X \mapsto X$$

es interesante por los siguientes hechos:

- útil para estudiar el móduli de curvas (p. ej. irreducibilidad [Fulton]).

Móduli de revestimientos

La aplicación:

$$\{\text{ revestimientos } Y \to X\} \to \{\text{ curvas }\}$$
$$Y \to X \mapsto X$$

es interesante por los siguientes hechos:

- útil para estudiar el móduli de curvas (p. ej. irreducibilidad [Fulton]).
- si se fijan los puntos de ramificación en X y los índices de ramificación, las fibras son finitas.

Móduli de revestimientos

La aplicación:

$$\{\text{ revestimientos } Y \to X\} \to \{\text{ curvas }\}$$
$$Y \to X \mapsto X$$

es interesante por los siguientes hechos:

- útil para estudiar el móduli de curvas (p. ej. irreducibilidad [Fulton]).
- si se fijan los puntos de ramificación en X y los índices de ramificación, las fibras son finitas.
- el número de puntos en la fibra está relacionado con la teoría de Gromov-Witten.

Móduli de revestimientos

- ¿Qué datos se le asocian a un revestimiento?

$$\pi : Y \longrightarrow X$$

Móduli de revestimientos

- ¿Qué datos se le asocian a un revestimiento?

$$\pi : Y \longrightarrow X$$

  - el divisor de los puntos de ramificación $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$

Móduli de revestimientos

- ¿Qué datos se le asocian a un revestimiento?

$$\pi : Y \longrightarrow X$$

  - el divisor de los puntos de ramificación $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$
  - el divisor de los puntos rama $\bar{y} = \{y_1^{(1)}, \ldots\}$

Móduli de revestimientos

- ¿Qué datos se le asocian a un revestimiento?

$$\pi : Y \longrightarrow X$$

  - el divisor de los puntos de ramificación $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$
  - el divisor de los puntos rama $\bar{y} = \{y_1^{(1)}, \dots\}$
  - los índices de ramificación, es decir, $e_j^{(i)}$ (la multiplicidad de $y_j^{(i)}$ en la fibra de x_i).

Si los puntos son lisos, entonces las completaciones $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$, $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y_j^{(i)}}$ son anillos de series formales sobre $\mathbb{C}$.

Nuestro trabajo:

- ¿Qué objetos se van a estudiar?

Los revestimientos $(X, Y, \pi, \bar{x}, \bar{y}, \{e_j^{(i)}\})$

- $\pi : Y \longrightarrow X$ revestimiento de curvas lisas de géneros $\bar{g}, g$.
- $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_r\}$
- $\bar{y} = \{y_1^{(1)}, \ldots\}$
- $\pi^{-1}(x_i) = \sum_j e_j^{(i)} y_j^{(i)}$

Nuestro trabajo:

- ¿Qué objetos se van a estudiar?

Los revestimientos $(X, Y, \pi, \bar{x}, \bar{y}, \{e_j^{(i)}\})$

- $\pi : Y \longrightarrow X$ revestimiento de curvas lisas de géneros $\bar{g}, g$.
- $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$
- $\bar{y} = \{y_1^{(1)}, \dots\}$
- $\pi^{-1}(x_i) = \sum_j e_j^{(i)} y_j^{(i)}$

- ¿Con qué técnicas? Con las Grassmannianas infinitas. Para ello es necesario añadir un parámetro formal en cada punto, es decir, isomorfismos:

$$t_{\bar{x}} : \widehat{\mathcal{O}}_{X,\bar{x}} \simeq \mathbb{C}[[z_1]] \times \overset{r}{\dots} \times \mathbb{C}[[z_r]]$$

$$t_{\bar{y}} : \widehat{\mathcal{O}}_{Y,\bar{y}} \simeq \mathbb{C}[[z_1^{(1)}]] \times \dots$$

Nuestro trabajo:

Los revestimientos $(X, Y, \pi, \bar{x}, \bar{y}, \{e_j^{(i)}\})$

- $\pi : Y \longrightarrow X$ revestimiento de curvas lisas de géneros $\bar{g}, g$.
- $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$
- $\bar{y} = \{y_1^{(1)}, \dots\}$
- $\pi^{-1}(x_i) = \sum_j e_j^{(i)} y_j^{(i)}$
- $t_{\bar{x}} : \widehat{\mathcal{O}}_{X,\bar{x}} \simeq \mathbb{C}[[z_1]] \times \overset{r}{\dots} \times \mathbb{C}[[z_r]]$
- $t_{\bar{y}} : \widehat{\mathcal{O}}_{Y,\bar{y}} \simeq \mathbb{C}[[z_1^{(1)}]] \times \dots$

Este es el functor de Hurwitz que estudiaremos.

Grassmannianas Infinitas

Fijamos $n > 0$ y r particiones de n, $E = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r\}$, donde $\bar{e}_i = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{k_i}^{(i)}\}$.

Consideraremos las álgebras:

$$
\begin{aligned}
V &:= \mathbb{C}((z_1)) \times \cdots \times \mathbb{C}((z_r)) \\
W &:= \prod_{j=1}^{r} \mathbb{C}((z_j^{1/e_1^{(j)}})) \times \cdots \times \mathbb{C}((z_j^{1/e_{k_j}^{(j)}})) \\
W^+ &:= \prod_{j=1}^{r} \mathbb{C}[[z_j^{1/e_1^{(j)}}]] \times \cdots \times \mathbb{C}[[z_j^{1/e_{k_j}^{(j)}}]]
\end{aligned}
$$

Grassmannianas Infinitas

$$V := \mathbb{C}((z_1)) \times \cdots \times \mathbb{C}((z_r))$$

$$W := \prod_{j=1}^{r} \mathbb{C}((z_j^{1/e_1^{(j)}})) \times \cdots \times \mathbb{C}((z_j^{1/e_{k_j}^{(j)}}))$$

La Grassmanniana infinita de W es un esquema cuyos puntos racionales son:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios } U \subset W \text{ tales que } U \to W/W^+ \\ \text{tiene núcleo y conúcleo de dim finita} \end{array} \right\}$$

Grassmannianas Infinitas

$$V := \mathbb{C}((z_1)) \times \cdots \times \mathbb{C}((z_r))$$

$$W := \prod_{j=1}^{r} \mathbb{C}((z_j^{1/e_1^{(j)}})) \times \cdots \times \mathbb{C}((z_j^{1/e_{k_j}^{(j)}}))$$

La Grassmanniana infinita de W es un esquema cuyos puntos racionales son:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios } U \subset W \text{ tales que } U \to W/W^{+} \\ \text{tiene núcleo y conúcleo de dim finita} \end{array} \right\}$$

Cada punto U tiene asociada una función canónica, $\psi_U(z,t)$, la función de Baker-Akhiezer, tal que es una función "generatriz" del punto.

Esquemas de Hurwitz

Consideramos el functor de Hurwitz de la introducción. Entonces, el morfismo de Krichever es:

$$\mathcal{H}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g] \longrightarrow \mathrm{Gr}(W)$$

$$(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}) \mapsto \ t_{\bar{y}}\Big(H^0(Y - \bar{y}, \mathcal{O}_Y)\Big) \subset W$$

Esquemas de Hurwitz

Consideramos el functor de Hurwitz de la introducción. Entonces, el morfismo de Krichever es:

$$\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g] \longrightarrow \mathrm{Gr}(W)$$

$$(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}) \mapsto t_{\bar{y}}\big(H^0(Y - \bar{y}, \mathcal{O}_Y)\big) \subset W$$

Dados $n, m > 0$, se tiene la sucesión:

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-n\pi^{-1}(\bar{x})) \to \mathcal{O}_Y(m\pi^{-1}(\bar{x})) \overset{t_{\bar{y}}}{\to} z^{-m}W^+/z^nW^+ \to 0$$

Esquemas de Hurwitz

Consideramos el functor de Hurwitz de la introducción. Entonces, el morfismo de Krichever es:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g] &\longrightarrow \mathrm{Gr}(W) \\ (Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}) &\mapsto \boxed{t_{\bar{y}}\big(H^0(Y - \bar{y}, \mathcal{O}_Y)\big) \subset W} \end{aligned}$$

Dados $n, m > 0$, se tiene la sucesión:

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-n\pi^{-1}(\bar{x})) \to \mathcal{O}_Y(m\pi^{-1}(\bar{x})) \xrightarrow{t_{\bar{y}}} z^{-m}W^+/z^nW^+ \to 0$$

tomando cohomología, $\varprojlim\limits_{m}$ y $\varinjlim\limits_{n}$ resulta la inclusión.

Esquemas de Hurwitz

Consideramos el functor de Hurwitz de la introducción. Entonces, el morfismo de Krichever es:

$$\mathcal{H}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g] \longrightarrow \mathrm{Gr}(W)$$

$$(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}) \mapsto \boxed{t_{\bar{y}}\big(H^0(Y - \bar{y}, \mathcal{O}_Y)\big) \subset W}$$

Dados $n, m > 0$, se tiene la sucesión:

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-n\pi^{-1}(\bar{x})) \to \mathcal{O}_Y(m\pi^{-1}(\bar{x})) \xrightarrow{t_{\bar{y}}} z^{-m}W^+/z^nW^+ \to 0$$

tomando cohomología, $\varprojlim_m$ y $\varinjlim_n$ resulta la inclusión.

Y valora en la Grassmanniana pues para $n = 0$ y $\varinjlim_m$ resulta:

$$0 \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^0(Y - \bar{y}, \mathcal{O}_Y) \to W/W^+ \to H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \to 0$$

Esquemas de Hurwitz

Se demuestra que sus puntos están caracterizados por ser aquellos subespacios $U \in \mathrm{Gr}(W)$ tales que:

- $U \cdot U = U$, ya que $\mathrm{Spec}(U) = Y - \bar{y}$ (curva de arriba);

Esquemas de Hurwitz

Se demuestra que sus puntos están caracterizados por ser aquellos subespacios $U \in \mathrm{Gr}(W)$ tales que:

- $U \cdot U = U$, ya que $\mathrm{Spec}(U) = Y - \bar{y}$ (curva de arriba);
- $\mathrm{Tr}(U) \subseteq U$, ya que entonces $\mathrm{Tr}(U) = U \cap V$ es el anillo de la curva afín $X - \bar{x}$ (curva de abajo).

Donde $\mathrm{Tr} : W \longrightarrow V$ es la aplicación traza de W como V-álgebra finita.

Esquemas de Hurwitz

Gracias a la caracterización anterior, demostramos:

Esquemas de Hurwitz

Gracias a la caracterización anterior, demostramos:

- $\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ es representable por un subesquema de $\mathrm{Gr}(W)$.

Esquemas de Hurwitz

Gracias a la caracterización anterior, demostramos:

• $\mathcal{H}_E^{\infty}[\bar{g}, g]$ es representable por un subesquema de $\mathrm{Gr}(W)$.

• Sus puntos están caracterizados por ser aquellos U cuya función de Baker-Ahkiezer satisface que la expresión:

$$\Big(\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_l}\sum_{i=1}^{e_j^{(l)}} \frac{\psi^{(l,j)}_{a,b,B}(\xi^i_{e_j^{(l)}} z_l^{1/e_j^{(l)}}, t)}{(\xi^i_{e_j^{(l)}} z_l^{1/e_j^{(l)}})^{\delta_{al}\delta_{bj}-u_{l,j}}}\Big)\cdot\Big(\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_l}\sum_{i=1}^{e_j^{(l)}} \frac{\psi^{(l,j)}_{c,d,B}(\xi^i_{e_j^{(l)}} z_l^{1/e_j^{(l)}}, t)}{(\xi^i_{e_j^{(l)}} z_l^{1/e_j^{(l)}})^{u_{l,j}-1+\delta_{cl}\delta_{dj}}}\Big)\frac{dz}{z}$$

tiene residuo igual a 0 en $z = 0$ (junto con otra expresión similar que equivale a $U \cdot U = U$).

Propiedades infinit. de los Hurwitz

Hemos probado los siguientes resultados:

- el espacio tangente $T_U\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ es canónicamente isomorfo a las derivaciones $U \longrightarrow W/U$ que conmutan con la traza.

Propiedades infinit. de los Hurwitz

Hemos probado los siguientes resultados:

- el espacio tangente $T_U\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ es canónicamente isomorfo a las derivaciones $U \longrightarrow W/U$ que conmutan con la traza.
- el espacio tangente $T_U\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ se inyecta en el espacio tangente en $\mathrm{Tr}(U)$ al espacio de móduli de curvas punteadas; es decir, las deformaciones del revestimiento quedan determinadas por las deformaciones de la curva de abajo.

Propiedades infinit. de los Hurwitz

Hemos probado los siguientes resultados:

- el espacio tangente $T_U\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ es canónicamente isomorfo a las derivaciones $U \longrightarrow W/U$ que conmutan con la traza.
- el espacio tangente $T_U\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ se inyecta en el espacio tangente en $\mathrm{Tr}(U)$ al espacio de móduli de curvas punteadas; es decir, las deformaciones del revestimiento quedan determinadas por las deformaciones de la curva de abajo.
- el grupo G_V^W (automorfismos de W que restringen a automorfismos de V) actúa en $\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$.

Propiedades infinit. de los Hurwitz

Hemos probado los siguientes resultados:

- el espacio tangente $T_U\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ es canónicamente isomorfo a las derivaciones $U \longrightarrow W/U$ que conmutan con la traza.
- el espacio tangente $T_U\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$ se inyecta en el espacio tangente en $\mathrm{Tr}(U)$ al espacio de móduli de curvas punteadas; es decir, las deformaciones del revestimiento quedan determinadas por las deformaciones de la curva de abajo.
- el grupo G_V^W (automorfismos de W que restringen a automorfismos de V) actúa en $\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$.
- fijado un punto U, el grupo G_V^W actúa (infinitesimalmente) de modo transitivo en la órbita de U;, es decir, G_V^W uniformiza localmente el esquema $\mathcal{H}_E^\infty[\bar{g}, g]$.

Fibrados sobre los Hurwitz

Para el problema de las deformación isomonodrómicas, es necesario añadir un haz de línea y una trivialización a los datos anteriores:

$$\mathrm{Pic}_E^{\infty}[\bar{g}, g] := \{(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}, L, \phi_{\bar{y}})\}$$

Fibrados sobre los Hurwitz

Para el problema de las deformación isomonodrómicas, es necesario añadir un haz de línea y una trivialización a los datos anteriores:

$$\mathrm{Pic}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g] \;:=\; \{(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}, L, \phi_{\bar{y}})\}$$

Hemos probado:

- $\mathrm{Pic}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g]$ es representable por un subesquema de $\mathrm{Gr}(W)$.

Fibrados sobre los Hurwitz

Para el problema de las deformación isomonodrómicas, es necesario añadir un haz de línea y una trivialización a los datos anteriores:

$$\mathrm{Pic}_E^\infty[\bar{g}, g] \;:=\; \{(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}, L, \phi_{\bar{y}})\}$$

Hemos probado:

- $\mathrm{Pic}_E^\infty[\bar{g}, g]$ es representable por un subesquema de $\mathrm{Gr}(W)$.
- si Γ_W denota el esquema en grupos de los invertibles de W^*, entonces $G_V^W \ltimes \Gamma_W$ actúa en $\mathrm{Pic}_E^\infty[\bar{g}, g]$.

Fibrados sobre los Hurwitz

Para el problema de las deformación isomonodrómicas, es necesario añadir un haz de línea y una trivialización a los datos anteriores:

$$\mathrm{Pic}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g] \; := \; \{(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}, L, \phi_{\bar{y}})\}$$

Hemos probado:

- $\mathrm{Pic}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g]$ es representable por un subesquema de $\mathrm{Gr}(W)$.
- si Γ_W denota el esquema en grupos de los invertibles de W^*, entonces $G_V^W \ltimes \Gamma_W$ actúa en $\mathrm{Pic}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g]$.
- fijado un punto U, el grupo $G_V^W \ltimes \Gamma_W$ actúa de modo transitivo (infinitesimalmente) en la órbita de U; es decir, $G_V^W \ltimes \Gamma_W$ uniformiza localmente el esquema $\mathrm{Pic}^{\infty}_{E}[\bar{g}, g]$.

Deformaciones isomonodrómicas

En la situación habitual se considera un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x, s) = P(x, s)\overrightarrow{y}(x, s)$$

donde $s \in \mathbb{C}^n$ es un parámetro, $x \in \mathbb{P}^1$ y P es una matriz cuyas entradas son funciones meromorfas.

Deformaciones isomonodrómicas

En la situación habitual se considera un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x,s) = P(x,s)\overrightarrow{y}(x,s)$$

La solución fundamental de este sistema, varía alrededor de las singularidades de P, dando lugar a una representación:

$$\rho_s \colon \pi_1(X^0; x_0) \longrightarrow \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \qquad \text{para cada } s \in S$$

siendo X^0 el abierto donde P es no singular y $x_0 \in X^0$ un punto fijo.

Deformaciones isomonodrómicas

En la situación habitual se considera un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x,s) = P(x,s)\overrightarrow{y}(x,s)$$

La solución fundamental de este sistema, varía alrededor de las singularidades de P, dando lugar a una representación:

$$\rho_s : \pi_1(X^0; x_0) \longrightarrow \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \qquad \text{para cada } s \in S$$

El sistema es una "deformación isomonodrómica" si esta representación no depende de s.

Deformaciones isomonodrómicas

Sea $\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x,s) = P(x,s)\overrightarrow{y}(x,s)$ isomonodrómica.

Deformaciones isomonodrómicas

Sea $\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x,s) = P(x,s)\overrightarrow{y}(x,s)$ isomonodrómica.
Por Deligne, la representación de $\pi_1(X^0; x_0)$ es equivalente a tener un fibrado vectorial de rango n con una conexión (sobre X^0):

$$(X^0, M, \nabla)$$

Deformaciones isomonodrómicas

Sea $\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x,s) = P(x,s)\overrightarrow{y}(x,s)$ isomonodrómica.
Por Deligne, la representación de $\pi_1(X^0; x_0)$ es equivalente a tener un fibrado vectorial de rango n con una conexión (sobre X^0):

$$(X^0, M, \nabla)$$

Por Beauville-Narasimhan-Ramanan, es equivalente a un fibrado de línea sobre un revestimento de X:

$$(X, Y, L)$$

no ramificado en X^0. Además, la ramificación está determinada por la representación monodrómica.

$\mathrm{Pic}_E^\infty[\bar{g}, g]$ y def. isomonodrómicas

¿Cómo se interpreta la uniformización de $\mathrm{Pic}_E^\infty[\bar{g}, g]$?

$\mathrm{Pic}_E^\infty[\bar g, g]$ y def. isomonodrómicas

¿Cómo se interpreta la uniformización de $\mathrm{Pic}_E^\infty[\bar g, g]$?

Hemos dicho que un sistema:

$$\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x,s) = P(x,s)\overrightarrow{y}(x,s)$$

da lugar a unos datos:

$$(Y, X, \pi, \bar x, L)$$

$\mathrm{Pic}_E^{\infty}[\bar{g}, g]$ y def. isomonodrómicas

¿Cómo se interpreta la uniformización de $\mathrm{Pic}_E^{\infty}[\bar{g}, g]$?

Hemos dicho que un sistema:

$$\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}(x,s) = P(x,s)\overrightarrow{y}(x,s)$$

da lugar a unos datos:

$$(Y, X, \pi, \bar{x}, L)$$

Entonces, el $\boxed{\text{sistema}}$ preserva la monodromía si y sólo si los $\boxed{\text{datos}}$ se obtienen a partir de un punto:

$$\{(Y, X, \pi, \bar{x}, \bar{y}, t_{\bar{x}}, t_{\bar{y}}, L, \phi_{\bar{y}})\} \in \mathrm{Pic}_E^{\infty}[\bar{g}, g]$$

De otro modo, la "órbita" de un punto de $\mathrm{Pic}_E^{\infty}[\bar{g}, g]$ se corresponde con un sistema (como el de arriba) que preserva la monodromía.