# MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS ASOCIADOS A OPERADORES MULTÍVOCOS

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Salamanca

Luis Ferragut Canals

23-junio-2004

# Índice general

# Capítulo 1

# Teoría general de operadores maximales monótonos

## 1.1. Introducción. Conceptos generales.

Sea $E$ un conjunto dotado de una relación de orden $(\leq)$. Sea $F$ un subconjunto de $E$.

**Definición 1** Decimos que el subconjunto $F \subset E$ está **totalmente ordenado** si $\forall a, b \in F$ se cumple, al menos, una de las dos relaciones siguientes:

$$a \leq b \quad \text{ó} \quad b \leq a.$$

**Definición 2** Se dice que el elemento $c \in E$ es un **mayorante** de $F$ si $\forall a \in F, a \leq c$ (cota superior).

**Definición 3** Se dice que el elemento $m \in E$ es un **maximal** de $E$ si $\forall x \in E$ t.q. $m \leq x$, se tiene *necesariamente* $m = x$ (supremo).

**Definición 4** Se dice que el conjunto $E$ es **inductivo** si todo subconjunto totalmente ordenado de $E$ admite un mayorante.

**Lema 1 (de Zorn)** Todo conjunto ordenado, inductivo y no vacío admite un elemento maximal.

Sea $E$ un espacio vectorial. Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial de $E$.

**Corolario 1** Sea $g : G \to \Re$ una aplicación lineal y continua de norma:

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} g(x).$$

Entonces, $\exists f \in E'$ que prolonga $g$ y t.q.: $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

**Definición 5** Un e.v.n. $E$ es **estrictamente convexo** si $\forall x, y \in E$ t.q. $x \neq y$, $\quad \|x\| = \|y\| = 1$,

$$\|tx + (1-t)y\| < 1 \qquad \forall t \in (0, 1)\,.$$

Sea $E$ un e.v. dotado de una topología. Sea $f$ una seminorma continua sobre $E$. Sea $B_f$ la semibola unitaria abierta:

$$B_f = \{x \in E \quad / \quad f(x) < 1\}\,.$$

**Definición 6** $E$ es un espacio vectorial topológico **localmente convexo** si la topología cumple la siguiente propiedad:

$$\forall V(x_0) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad t.q. \quad x_0 + \varepsilon B_f \subset V(x_0). \tag{1.1}$$

**Teorema 1 (de Riesz)** Si $E$ es un e.v.n. tal que $B_E$ es compacta, entonces $E$ es de dimensión finita.

Sea $H$ un espacio de Hilbert. Sea $\|\cdot\|_*$ la norma dual de $H$.

**Teorema 2 (de Riesz)** Sea $f \in H'$. Existe un elemento único $u_f \in H$ t.q.

$$\begin{cases} \langle f, v\rangle = (v, u_f)_H & \forall v \in H \\ \|f\|_* = \|u_f\|_H. \end{cases}$$

Recíprocamente, todo elemento $u \in H$ define un elemento $f_u \in H'$ t. q.

$$\begin{cases} \langle f_u, v\rangle = (v, u)_H & \forall v \in H \\ \|f_u\|_* = \|u\|_H. \end{cases}$$

**Definición 7** Sea una aplicación $f : H \to (-\infty, +\infty]$. Decimos que $f$ es:

- **coerciva**, si $\lim\limits_{\|v\|\to\infty} f(v) = \infty$
- **propia**, si $\exists x \in H$ t.q. $f(x) \neq +\infty$
- **convexa**, si $\forall x, y \in H, \quad \forall t \in (0, 1)$

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

- **semicontinua inferiormente** (s.c.i.), si

$$\liminf_{x\to u} f(x) \geq f(u).$$

Sea $K$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío.

**Definición 8** Se llama **función indicatriz** $I_K$ a:

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in K \\ +\infty & \text{si} \quad x \notin K \end{cases}$$

**Propiedad 1** $I_K$ es convexa, propia y s.c.i.

## 1.2. Operadores monótonos.

Sea $H$ un espacio de Hilbert.

**Definición 9** Un **operador multívoco** $A$ es una aplicación de $H$ en el conjunto *partes de* $H$:

$$A : H \to \wp(H)$$

**Definición 10** Llamamos:

- **dominio** del operador: $D(A) = \{x \in H \quad / \quad Ax \neq \phi\}$
- **imagen** del operador: $R(A) = \bigcup\limits_{x\in H} Ax.$

**Definición 11** Si para todo elemento $x \in H$, $Ax$ contiene un solo elemento de $H$, el operador se llamará **unívoco**.

**Propiedad 2** Si $A$ y $B$ son dos operadores, $\lambda, \mu \in \Re$, entonces:

$$(\lambda A + \mu B)x = \{\lambda u + \mu v \quad / \quad u \in Ax, v \in Bx\}$$

con: $D(\lambda A + \mu B) = D(A) \cap D(B)$.

**Nota 1** Normalmente, identificamos $A$ con su grafo:

$$G(A) = \{[x, y] \in H \times H \quad / \quad y \in Ax\}$$

**Propiedad 3** $A^{-1}$ es el operador cuyo grafo es el simétrico del de $A$:

$$y \in A^{-1}x \Longleftrightarrow x \in Ay.$$

Además: $D(A^{-1}) = R(A)$.

En el conjunto de operadores multívocos, ordenaremos los operadores por inclusión de grafos:

$$A \subset B \Longleftrightarrow Ax \subset Bx, \quad \forall x \in H.$$

**Definición 12** Un operador $A$ de $H$ es **monótono** si:

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

o, más correctamente, si:

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A), \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2.$$

**Ejemplo 1** ■

**Propiedad 4** Si A es un operador monótono, se verifica:

1. $A^{-1}$ es monótono
2. $\lambda A$ es monótono si $\lambda \geq 0$
3. $\overline{A}$ es monótono ($\overline{A}$ = adherencia de $A$ en $H \times H_w$)
4. $\widetilde{A}x = \overline{conv(Ax)}$ (adherencia de la envolvente convexa de $Ax$)
5. si $J$ es contracción en $D \subset H$ en $H$, $I - J$ es monótono
6. si $C \subset H$ es un convexo cerrado, el operador proyección $P_c$ es monótono
7. si $A$ y $B$ son monótonos, $A + B$ es monótono.

Demostración:

1. Sean $x_1, x_2 \in D(A^{-1}) = R(A)$. Sean

   $$y_1 \in A^{-1}x_1 \Longleftrightarrow x_1 \in Ay_1, \qquad y_2 \in A^{-1}x_2 \Longleftrightarrow x_2 \in Ay_2.$$

   Por ser $A$ operador monótono, $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$, luego:

   $$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0.$$

2. Sean $y_1 \in \lambda Ax_1, \quad y_2 \in \lambda Ax_2$. Por ser $A$ operador monótono,

   $$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0$$

3. Sea $[x_k, y_k] \in \overline{A}$, $\quad (k = 1, 2)$.
   Por ser un elemento adherente, existen las sucesiones $\{x_i^n\}, \{y_i^n\}$ de elementos de $A$ t.q.

$$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} y_i^n = y_i.$$

   Por ser $A$ operador monótono, $(y_1^n - y_2^n, x_1^n - x_2^n) \geq 0$,
   luego $(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0$

4. Sean:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda u_1 + (1-\lambda)v_1, & u_1, v_1 \in Ax_1, \quad \lambda \in (0,1) \\ y_2 = \lambda u_2 + (1-\lambda)v_2, & u_2, v_2 \in Ax_2, \quad \mu \in (0,1)\,. \end{cases}$$

   Por otra parte, $w = \lambda w + (1-\lambda)w$, luego

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2, x_1 - x_2) &= (\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1 - \lambda y_2 - (1-\lambda)y_2, x_1 - x_2) = \\ &= \lambda\,(u_1 - y_2, x_1 - x_2) + (1-\lambda)\,(v_1 - y_2, x_1 - x_2) = \\ &= \lambda\,(\mu u_1 + (1-\mu)u_1 - \mu u_2 - (1-\mu)v_2, x_1 - x_2) + \\ &\qquad + (1-\lambda)\,(\mu v_1 + (1-\mu)v_1 - \mu u_2 - (1-\mu)v_2, x_1 - x_2) = \\ &= \lambda\mu\,(u_1 - u_2, x_1 - x_2) + \lambda(1-\mu)\,(u_1 - v_2, x_1 - x_2) + \\ &\qquad + (1-\lambda)\mu\,(v_1 - u_2, x_1 - x_2) + (1-\lambda)(1-\mu)\,(v_1 - v_2, x_1 - x_2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

5. Por ser $J$ una contracción, $\|Jx_1 - Jx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ y, por consiguiente,

$$(Jx_1 - Jx_2, x_1 - x_2) < (x_1 - x_2, x_1 - x_2) \leq \|x_1 - x_2\|^2\,.$$

   Tendremos, por lo tanto,

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2) - (Jx_1 - Jx_2, x_1 - x_2) > 0.$$

6. El operador proyección verifica:

$$(y - P_C x, x - P_C x) \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

   Sean $x_1, x_2 \in H$. Entonces, $\forall y \in C$,

$$\begin{cases} (y - P_C x_1, x_1 - P_C x_1) \leq 0 \\ (y - P_C x_2, x_2 - P_C x_2) \leq 0. \end{cases}$$

   En particular, la primera ecuación se verifica para $y = P_C x_2$, y la segunda para $y = P_C x_1$:

$$\begin{cases} (P_C x_2 - P_C x_1, x_1 - P_C x_1) \leq 0 \\ (P_C x_1 - P_C x_2, x_2 - P_C x_2) \leq 0. \end{cases}$$

   Es decir,

$$\begin{cases} (P_C x_2 - P_C x_1, x_1) \leq (P_C x_2 - P_C x_1, P_C x_1) \\ (P_C x_1 - P_C x_2, x_2) \leq (P_C x_1 - P_C x_2, P_C x_2) \end{cases}$$

   o bien, cambiando convenientemente los signos de los términos,

$$\begin{cases} (P_C x_1 - P_C x_2, x_1) \geq (P_C x_1 - P_C x_2, P_C x_1) \\ (P_C x_1 - P_C x_2, -x_2) \geq (P_C x_1 - P_C x_2, -P_C x_2) \end{cases}$$

   y sumando,

$$\begin{aligned} (P_C x_1 - P_C x_2, x_1 - x_2) &\geq (P_C x_1 - P_C x_2, P_C x_1 - P_C x_2) = \\ &= \|P_C x_1 - P_C x_2\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

   luego $P_C$ es un operador monótono.

7. Sean $y_k \in (A+B)x_k, \quad u_k \in Ax_k, \quad v_k \in Bx_k \quad (k=1,2)$.

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2, x_1 - x_2) &= ((u_1+v_1)-(v_2+v_2), x_1-x_2) = \\ &= (u_1-u_2, x_1-x_2) + (v_1-v_2, x_1-x_2) \geq 0\end{aligned}$$

por ser $A$ y $B$ monótonos.

■

## 1.3. Subdiferenciabilidad.

Sea $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ una aplicación convexa y propia. Sabemos que su dominio $D(\varphi) = \{x \in H \quad / \quad \varphi(x) < \infty\}$ es convexo.

**Definición 13** Llamamos **subdiferencial** de $\varphi$ en el punto $x$ al conjunto:

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} \{y \in H \quad / \quad \varphi(\xi) - \varphi(x) \geq (y, \xi - x), \quad \forall \xi \in H\} & \text{si } x \in D(\varphi) \\ \phi & \text{si } x \notin D(\varphi) \end{cases}$$

**Propiedad 5** Evidentemente, $D(\partial\varphi) \subset D(\varphi)$. ■

**Propiedad 6** Si $u \in H$ es tal que $\varphi(u) = \inf_{v \in H} \varphi(v)$, entonces $0 \in \partial\varphi(u)$, y recíprocamente.
DEMOSTRACIÓN: Si $\varphi(u) = \inf_{v\in H} \varphi(v)$, entonces $\varphi(u) \leq \varphi(\xi), \quad \forall \xi \in H$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) - \varphi(u) &\geq 0, \quad \forall \xi \in H \\ \varphi(\xi) - \varphi(u) &\geq (0, \xi - u) = 0, \quad \forall \xi \in H\end{aligned}$$

luego $0 \in \partial\varphi(u)$. ■

**Propiedad 7** El operador $\partial\varphi$ es monótono.
DEMOSTRACIÓN: Sean $y_1 \in \partial\varphi(x_1), y_2 \in \partial\varphi(x_2)$. Por definición, tendremos:

$$\begin{cases} \varphi(\xi) - \varphi(x_1) \geq (y_1, \xi - x_1), \quad \forall \xi \in H \\ \varphi(\xi) - \varphi(x_2) \geq (y_2, \xi - x_2), \quad \forall \xi \in H. \end{cases}$$

En particular, la primera ecuación se debe verificar para $\xi = x_2$, y la segunda para $\xi = x_1$:

$$\begin{cases} \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq (y_1, x_2 - x_1) \\ \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geq (y_2, x_1 - x_2). \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones,

$$0 \geq (y_1, x_2 - x_1) + (y_2, x_1 - x_2) = -(y_1, x_1 - x_2) + (y_2, x_1 - x_2) = (y_2 - y_1, x_1 - x_2).$$

Es decir, cambiando de signo,

$$0 \leq (y_1 - y_2, x_1 - x_2).$$

■

## 1.4. Generalizaciones.

Sea $X$ un espacio vectorial topológico (e.v.t.). Sea $X'$ su dual. Sea un operador $A : X \to \wp(X')$.

**Definición 14** El operador $A$ es monótono si, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$:

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \quad \geq 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2. \tag{1.2}$$

Sea $V$ un espacio de Banach, con norma $\|\cdot\|$. Sea $A : V \to \wp(V)$.

**Definición 15** El operador $A$ es **acretivo** si:

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| \leq & \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|, \\ & \forall x_1, x_2 \in V, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2.\end{aligned}$$

**Teorema 3** En un espacio de Hilbert, las nociones de monotonía y acretividad coinciden.
DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $A$ un operador monótono. Tendremos, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$

   $$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2.$$

   Por otra parte,

   $$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2.$$

Puesto que:

- $\lambda > 0$
- $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$
- $\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0$

tendremos,

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2.$$

Luego $A$ es acretivo.

2. Si $A$ es acretivo, $\forall \lambda > 0$,

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2$$

Por otra parte,

$$\begin{gathered}\|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2 \\ 2(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \lambda\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0 \\ (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq -\frac{\lambda}{2}\|y_1 - y_2\|^2\end{gathered}$$

Para $\lambda \longrightarrow 0, \quad (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$, luego $A$ es monótono.

■

Sea $V$ un espacio localmente convexo. Sea $V'$ su dual. Sea ${}_{V'}\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ el producto de dualidad. Sea $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ convexa y propia.

**Definición 16** Llamamos subdiferencial de $\varphi$ en el punto $x$ al conjunto:

$$\partial\varphi(x) = \{y \in V' \quad / \quad \varphi(\xi) - \varphi(x) \geq {}_{V'}\langle y, \xi - x \rangle_V\}.$$

Si $V$ es un espacio de Hilbert, podemos identificar $V$ y $V'$ a través del teorema de Riesz. ${}_{V'}\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ es entonces el producto escalar, y el subdiferencial coincide con la definición dada.

## 1.5. Operadores maximales monótonos.

**Propiedad 8** Si $A$ es acretivo, el operador $(I + \lambda A)^{-1}$ es una contracción.
DEMOSTRACIÓN: Sea $A$ un operador acretivo, y sean:

$$\begin{cases} y_1 \in (I + \lambda A)x_1 \Longleftrightarrow x_1 \in (I + \lambda A)^{-1}y_1 \Longleftrightarrow \frac{y_1 - x_1}{\lambda} \in Ax_1 \\ y_2 \in (I + \lambda A)x_2 \Longleftrightarrow x_2 \in (I + \lambda A)^{-1}y_2 \Longleftrightarrow \frac{y_2 - x_2}{\lambda} \in Ax_2. \end{cases}$$

Por ser $A$ acretivo,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda\left(\frac{y_1 - x_1}{\lambda} - \frac{y_2 - x_2}{\lambda}\right)\| = \|y_1 - y_2\|$$

luego $(I + \lambda A)^{-1}$ es una contracción. ■

En consecuencia, el problema:

$$\text{Dado } y \in H, \quad \text{hallar } x \in D(A) \text{ tal que } x + \lambda Ax \ni y. \tag{1.3}$$

tiene a lo sumo una solución si $A$ es acretivo.

**Propiedad 9** El conjunto de los operadores monótonos es inductivo y no vacío, por relación de inclusión de grafos.
DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $Q = \{A_i\}_{i\in I}$ un subconjunto totalmente ordenado de operadores monótonos. Hay que comprobar que $A = \underset{i\in I}{\cup} A_i$ es un operador monótono. Sean

$$\begin{cases} y_1 \in Ax_1 \Longrightarrow y_1 \in A_i x_1 \text{ para algún } i \in I \\ y_2 \in Ax_2 \Longrightarrow y_2 \in A_j x_2 \text{ para algún } j \in I. \end{cases}$$

Puesto que $Q$ es totalmente ordenado, $A_i \subset A_j$, p. ej., luego:

$$y_1 \in A_j x_1 \quad y_2 \in A_j x_2.$$

En consecuencia, $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$ por ser $A_j$ monótono. Evidentemente, $A$ es un mayorante de $Q$.

2. $Q$ es un conjunto no vacío, pues el operador identidad es monótono. En efecto,

$$\begin{cases} y_1 \in Ix_1 \Longrightarrow y_1 = x_1 \\ y_2 \in Ix_2 \Longrightarrow y_2 = x_2. \end{cases}$$

Y, por tanto, $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \|x_1 - x_2\|^2 \geq 0.$

∎

**Definición 17** Un operador $A$ en $H$ es **maximal monótono** (m.m.) si es maximal en el conjunto de los operadores monótonos (se entiende el conjunto de grafos monótonos).

**Teorema 4** $A$ es maximal monótono si y sólo si $A$ es monótono y

$$\forall\, [x, y] \in H \times H \quad \text{t.q.} \quad (y - A\xi, x - \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in D(A)$$

se verifica $y \in Ax$. O, más correctamente,

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall\, [\xi, \eta] \in A \quad \Longrightarrow \quad y \in Ax.$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea A maximal monótono. Sea $[x, y] \in H \times H$ t.q.,

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0 \quad \forall [\xi, \eta] \in A. \tag{1.4}$$

Supongamos $y \notin Ax$. Definamos $\tilde{A}$ t. q.

$$\tilde{A}x = Ax \cup \{y\}, \quad \forall x \in D(A). \tag{1.5}$$

$\tilde{A}$ es monótono, p.q. dados $y_1 \in \tilde{A}x_1, y_2 \in \tilde{A}x_2$,

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \begin{cases} \geq 0, & \text{si } [x_k, y_k] \in A \\ = 0, & \text{si } [x_k, y_k] = [x, y] \\ \geq 0, & \text{si } [x_1, y_1] \in A, [x_2, y_2] \notin A, \text{ por (1.4).} \end{cases}$$

Además, $A \subset \tilde{A}$ (cf. (1.5)), luego A no es maximal.

2. Recíprocamente, supongamos:

$$(y-\eta, x-\xi) \geq 0, \quad \forall\, [\xi,\eta] \in A \Longrightarrow y \in Ax.$$

Supongamos que $A$ no es maximal. Entonces, $\exists \tilde{A}, \tilde{A} \supset A$, siendo $\tilde{A}$ maximal. Sea $y \in \tilde{A}x$. Tendremos entonces,

$$\begin{aligned}(y-\eta, x-\xi) \geq 0, \quad &\forall\, [\xi,\eta] \in A \subset \tilde{A}\\ \Longrightarrow y \in Ax \text{ es decir } &\tilde{A} \subset A.\end{aligned}$$

Luego $A = \tilde{A}$, y $A$ es maximal.

■

**Lema 2** Sea $C$ un conjunto convexo cerrado de $H$ y $A$ un operador monótono de $H$ con $C \supset \overline{D(A)}$. Entonces, $\forall y \in H$, existe $x \in C$ tal que:

$$(\eta + x, \xi - x) \geq (y, \xi - x) \quad \forall\, [\xi,\eta] \in A.$$

DEMOSTRACIÓN: ■

**Teorema 5 (caracterización de los operadores monótonos)** . Sea $A$ un operador en $H$. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $A$ es maximal monótono
2. $A$ es monótono y $R(I+A) = H$
3. $\forall \lambda > 0, (I+\lambda A)^{-1}$ es una contracción sobre todo $H$, o sea, $R(I+\lambda A) = H$.

DEMOSTRACIÓN:

- Supuesta la hipótesis (c), $\forall \lambda > 0, (I+\lambda A)^{-1}$ es contracción en $H$.

  Sea $z_k \in Ax_k (k=1,2)$. Sea:

  $$y_k = x_k + \lambda z_k = x_k + \lambda A x_k = (I+\lambda A)x_k$$

  luego $x_k = (I+\lambda A)^{-1} y_k$.

  Por ser una contracción,

  $$\|x_1 - x_2\| \leq \|y_1 - y_2\| = \|x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\|.$$

  Es decir, el operador $A$ es acretivo y, por lo tanto, monótono.

  Por otra parte, para $\lambda = 1$, $(I+A)^{-1}$ está definido en todo $A$, es decir, $R(I+A) = H$.

- Suponemos que $A$ es monótono y $R(I+A) = H$ (hipótesis (b)). Supongamos $A \subset B$, siendo $B$ monótono. Si $y \in Bx, \exists x' \in D(A)$ t. q.,

  $$x + y \in x' + Ax' = (I+A)x'$$

  pues $R(I+A) = H$. Tenemos pues,

  $$\begin{cases} x + y \in x' + Ax' \subset x' + Bx' \Longrightarrow x - x' + y \in Bx' \\ y \in Bx. \end{cases}$$

  Por ser $B$ monótono (acretivo),

  $$\|x - x'\| \leq \|x - x' + \lambda(y - x + x' - y\| = \|x - x' + \lambda(x' - x)\|.$$

  Para $\lambda = 1, \|x - x'\| \leq 0 \Longrightarrow x = x'$, de donde

  $$x + y \in x' + Ax' = x + Ax \Longrightarrow y \in Ax$$

  luego $A$ es maximal (hipótesis (a)).

- El operador $A$ es m.m. (hipótesis (a)). Utilizaremos el lema anterior, donde el conjunto $C$ es el espacio $H$. Supongamos un elemento cualquiera $y \in H$. Entonces, $\exists x \in H$ t. q.,

$$(\eta + x - y, \xi - x) = (\eta - (y - x), \xi - x) \geq 0, \quad \forall\, [\xi, \eta] \in A.$$

Como $A$ es maximal y el operador $I$ es monótono,

$$\begin{array}{ll} y \in Ax & \\ y - x \in (A - I)x \subset Ax & \qquad \text{(por ser } A \text{ maximal)} \end{array}$$

luego $y - x \in Ax$, es decir, $y \in (I + A)x$.

Como $y$ es un elemento *cualquiera* de $H$, deducimos que si $A$ es m.m.,

$$\begin{array}{rcl} (y - \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall\, [\xi, \eta] \in A & \Longrightarrow & y \in Ax \\ \Longleftrightarrow (\lambda y - \lambda \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall\, [\xi, \eta] \in A & \Longrightarrow & y \in Ax \\ \Longleftrightarrow (y' - \eta', x - \xi) \geq 0, \quad \forall\, [\xi, \eta'] \in \lambda A & \Longrightarrow & y' \in \lambda Ax \\ & \Longleftrightarrow & \lambda A \text{ es m. m.} \end{array}$$

Por lo tanto, $R(I + A) = H$. Además, por ser $A$ monótono, $(I + \lambda A)^{-1}$ es contracción (cf. Teorema 5). En consecuencia, se trata de una contracción sobre todo $H$ (hipótesis (c)).

■

**Corolario 2** Si $A$ es monótono, existe una prolongación $\widetilde{A}$ maximal monótono de $A$, cuyo dominio está contenido en $\overline{conv D(A)}$.
Demostración: ■

**Propiedad 10** Si $A$ es m.m., entonces:

1. $A^{-1}$ es m.m.
2. $\lambda A$ es m.m. (si $\lambda > 0$).

**Teorema 6** Sea $J : H \to (-\infty, +\infty]$ una aplicación coerciva, convexa, propia y s.c.i. Entonces, si $K$ es un conjunto convexo y cerrado de $H$, existe un elemento $u \in K$ t.q. $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$. Además, si $J$ es estrictamente convexa, $u$ es único.
Demostración:

1. Sea $\{u_n\} \subset K$ una sucesión que verifica:

$$\lim_{n \to \infty} J(u_n) = \inf_{v \in K} J(v) = \alpha.$$

En principio, $\alpha$ puede tomar el valor $-\infty$.

Si $\|u_n\| \to +\infty, J(u_n) \to +\infty$ por ser $J$ coerciva, y entonces no será propia. Por lo tanto, $\{u_n\}$ está acotada: $\|u_n\| \leq c$. Podemos extraer una subsucesión $\{u_\nu\}$ de modo que:

$$u_\nu \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} u \text{ débilmente en } H.$$

Como $J$ es convexa y s.c.i., será s.c.i. en la topología débil de $H$ y, en consecuencia,

$$\alpha = \liminf_{\nu \to \infty} J(u_\nu) \geq J(u).$$

Por otra parte, $u \in K$ pues $K$ es débilmente cerrado. Es decir, $\alpha \neq -\infty$ y $\exists u \in K$ t. q.,

$$\alpha = J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K.$$

2. Además, si $J$ es estrictamente convexa,

$$J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) = \alpha$$

luego $u_1 = u_2$.

■

**Teorema 7** Sea $\varphi$ una función convexa y propia sobre $H$. Sea $\alpha \geq 0$. La función convexa:

$$J : \xi \to J(\xi) = \varphi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2$$

alcanza su máximo en $x_0$ si y sólo si: $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$.
DEMOSTRACIÓN:

1. Supongamos $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$. Entonces, por definición de subdiferencial,

$$\begin{cases} \varphi(x_0) < +\infty \\ \varphi(\xi) - \varphi(x_0) \geq \alpha\left(y - x_0, \xi - x_0\right), \quad \forall \xi \in H. \end{cases}$$

Observemos que

$$(y - x_0, \xi - x_0) = (y - x_0, \xi - y + y - x_0) = -\left(x_0 - y, \xi - y\right) + \|y - x_0\|^2$$

y como se verifica

$$(x_0 - y, \xi - y) \leq \|x_0 - y\|\|\xi - y\| \leq \frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi - y\|^2$$

tendremos

$$\begin{aligned}(y - x_0, \xi - x_0) &\geq -\frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi - y\|^2 + \|y - x_0\|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi - y\|^2\end{aligned}$$

de donde,

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}\left[\|x_0 - y\|^2 - \|\xi - y\|^2\right]$$

es decir,

$$\varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2 \leq \varphi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2 \quad \forall \xi \in H.$$

2. Recíprocamente, supongamos que se verifica:

$$\varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2 \leq \varphi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2 \quad \forall \xi \in H.$$

Sea $\xi = (1 - t)x_0 + t\eta, \quad \eta \in H, \quad t \in (0, 1)$. Puesto que

$$\varphi(\xi) \leq (1 - t)\varphi(x_0) + t\varphi(\eta)$$

tendremos

$$\begin{aligned}t\left(\varphi(\eta) - \varphi(x_0)\right) \geq \varphi(\xi) - \varphi(x_0) &\geq \\ \geq \frac{\alpha}{2}\left[\|x_0 - y\|^2 - \|\xi - y\|^2\right] &= \\ = \frac{\alpha}{2}\left[\|x_0 - y\|^2 - \|(1 - t)x_0 + t\eta - y\|^2\right]&\end{aligned}$$

luego

$$\varphi(\eta) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2} \frac{\|x_0 - y\|^2 - \|(x_0 - y) - t(\eta - x_0)\|^2}{t}.$$

Pasando al límite en el segundo miembro, tenemos la *derivada de Gateaux* de la función $z \to |z|^2$ en el punto $z = y - x_0$ y en la dirección $\eta - x_0$, es decir:

$$\varphi(\eta) - \varphi(x_0) \geq \alpha \left( y - x_0, \eta - x_0 \right), \quad \forall \eta \in H$$

es decir,

$$\alpha \left( y - x_0 \right) \in \partial\varphi(x_0).$$

■

**Propiedad 11** Sea $\varphi : H \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, propia y s.c.i.; entonces el operador $\partial\varphi$ es maximal monótono.
Demostración: Consideremos la función:

$$J(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2.$$

$J$ es convexa y s.c.i. (por ser suma de funciones convexas y s.c.i.). Además, por ser $\varphi$ convexa y s.c.i., está minorada por una función afín, luego:

$$J(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \geq \alpha + (z, x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2.$$

Escribiendo:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x + z - y - z\|^2 = \\ &= \|x + z - y\|^2 + \|z\|^2 - 2(x + z - y, z) = \\ &= \|x + z - y\|^2 - \|z\|^2 - 2(x, z) + 2(y, z) \end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned} J(x) &\geq \alpha + (z, x) + \frac{1}{2}\|x + z - y\|^2 - \frac{1}{2}\|z\|^2 - (x, z) + (y, z) = \\ &= \alpha + (y, z) + \frac{1}{2}\|x + z - y\|^2 - \frac{1}{2}\|z\|^2 \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} = \infty$$

luego $J$ es coerciva. Por lo tanto (cf. Teorema 6),

$$\exists x_0 \in H \quad / \quad \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 \leq \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Por el Teorema 7, tendremos que existe el punto $x_0$ t. q.

$$y - x_0 \in \partial\varphi(x_0)$$

y entonces $\partial\varphi$ es maximal monótono. ■

**Ejemplo 2** Sea $f : \Re \to \Re$ una función creciente; el operador

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \Re &\to \wp(\Re) \\ x &\to \widetilde{f}(x) = [f(x^-), f(x^+)] \end{aligned}$$

es maximal monótono. ■

Un operador unívoco monótono maximal en el conjunto de los operadores unívocos no tiene por qué ser maximal en el conjunto de todos los operadores monótonos.

Sea $A$ un operador lineal, unívoco, no necesariamente acotado y monótono.

**Teorema 8** $A$ es maximal monótono si y sólo si $D(A)$ es denso en $H$ y $A$ es maximal en el conjunto de los operadores unívocos lineales monótonos.
DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $A$ m. m. Evidentemente, $A$ es maximal en el conjunto de los operadores unívocos lineales monótonos. Hay que demostrar que $D(A)$ es denso en $H$ o, lo que es lo mismo, si $x \perp D(A) \Longrightarrow x = 0$.

   Sea $x \perp D(a)$. Entonces, $\forall \xi \in D(A)$,

$$\begin{aligned}(A\xi - x, \xi) &= (A\xi, \xi) - (x, \xi) = \\ &= (A\xi, \xi) = (A\xi - A0, \xi - 0) \geq 0\end{aligned}$$

   puesto que $A$ es lineal ($A0 = 0$) y $A$ es m. m. En consecuencia,

$$x \in A0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

2. Supongamos $\overline{D(A)} = H$, siendo $A$ m. m. en el conjunto de los operadores unívocos, lineales, monótonos. Sea $[x, y] \in H \times H$ t. q.,

$$(A\xi - y, \xi - x) \geq 0 \quad \forall \xi \in D(A). \tag{1.6}$$

   Queremos demostrar que $y \in Ax$.

   En primer lugar, observemos que $x \in D(A)$. Si no fuera así, el operador:

$$\tilde{A} : \xi + \lambda x \quad \longrightarrow \quad A\xi + \lambda y$$

   definido sobre el espacio engendrado por $D(A)$ y $x$ sería una prolongación lineal monótona estricta de $A$.

   Puesto que (1.6) es válida $\forall \xi \in D(A)$, también se verificará para $x + t\xi$, con $t > 0$:

$$\begin{aligned}(A(x + t\xi) - y, x + t\xi - x) &\geq 0 \\ (Ax - y, t\xi) &\geq -(At\xi, t\xi) \\ (Ax - y, \xi) &\geq -t(A\xi, \xi).\end{aligned}$$

   Haciendo $t \longrightarrow 0$, tendremos:

$$(Ax - y, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in D(A)$$

   de donde, $Ax = y$.

■

**Definición 18** Un operador $A : H \longrightarrow H$ con $D(A) = H$ es **hemicontinuo** si, $\forall x \in H, \forall \xi \in H$:

$$\lim_{t \to 0} (A((1 - t)x + t\xi), w) = (Ax, w), \quad \forall w \in H.$$

**Teorema 9** Sea $A : H \longrightarrow H$ con $D(A) = H$ un operador monótono y unívoco. Entonces, si $A$ es hemicontinuo, es maximal monótono.
DEMOSTRACIÓN: Sea $[x, y] \in H \times H$ t. q.

$$(Ax' - y, x' - x) \geq 0, \quad \forall x' \in H.$$

Puesto que la desigualdad anterior es válida para todo $x'$, también lo será para $(1-t)x + t\xi, \quad \forall \xi \in H, t \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}(A((1-t)x+t\xi)-y,((1-t)x+t\xi)-x) &\geq 0\\ t\,(A((1-t)x+t\xi)-y,\xi-x) &\geq 0\\ (A((1-t)x+t\xi)-y,\xi-x) &\geq 0.\end{aligned}$$

Haciendo $t \longrightarrow 0$,

$$(Ax-y,\xi-x)\geq 0$$

y, por consiguiente, $y = Ax$.

■

**Definición 19** Sea $A$ maximal monótono. Al operador unívoco

$$J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1} \qquad \lambda > 0$$

definido en todo $H$ se le denomina **resolvente** de $A$.

Recordemos que $J_\lambda$ es una contracción de $H$ en $H$.

**Propiedad 12** El resolvente del operador $A$ verifica:

$$J_\lambda x = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})J_\lambda x\right), \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda, \mu > 0.$$

Demostración: Sea $y = J_\lambda x$. Se puede deducir:

$$\begin{aligned}y = (I+\lambda A)^{-1}x &\Longleftrightarrow x \in y + \lambda Ay\\ &\Longleftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}(x-y) \in \mu Ay\\ &\Longleftrightarrow y + \frac{\mu}{\lambda}(x-y) \in y + \mu Ay\\ &\Longleftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})y \in y + \mu Ay\\ &\Longleftrightarrow y \in J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})y\right)\\ &\Longleftrightarrow J_\lambda x = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})y\right).\end{aligned}$$

■

**Propiedad 13** Si $A$ es maximal monótono, entonces el conjunto $C = \overline{D(A)}$ es convexo y

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = \mathrm{Proy}_C x, \quad \forall x \in H.$$

Demostración: ■

**Propiedad 14** Si $A$ es maximal monótono, $Ax$ es convexo y cerrado, $\forall x \in D(A)$.
Demostración: ■

**Definición 20** $A^0x = \mathrm{Proy}_{Ax}0$, es decir, $A^0x$ es el elemento de $Ax$ de norma mínima.

**Definición 21 (Aproximación Yosida)** Dado un operador maximal monótono $A$, definimos su aproximación Yosida como el operador $A_\lambda : H \longrightarrow H$, dado por:

$$A_\lambda = \frac{I-J_\lambda}{\lambda}.$$

**Propiedad 15** La aproximación Yosida $A_\lambda$ verifica:

1. es un operador unívoco
2. $AJ_\lambda$ es multívoco y $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$
3. si $A$ es lineal y unívoco, entonces,
$$\begin{cases} A_\lambda x = AJ_\lambda x, & \forall x \in H \\ J_\lambda Ax = A_\lambda x, & \forall x \in D(A) \end{cases}$$
4. si $A$ es lineal, unívoco, maximal monótono,
$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda x = Ax.$$

Demostración:

1. Evidente, pues $J_\lambda$ es unívoco
2. $A_\lambda x = \frac{I-J_\lambda}{\lambda}x = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda x)$.
Llamando $J_\lambda x = z \Longleftrightarrow (I + \lambda A) \ni z$
$$A_\lambda x \in \frac{1}{\lambda}((I+\lambda A)z - z) = Az = AJ_\lambda x.$$
3. Sea $x \in D(A)$. Teniendo en cuenta que $(I + \lambda A)J_\lambda = I$, tendremos:
$$\begin{aligned} Ax &= \frac{1}{\lambda}[(I+\lambda A)x - x] = \frac{1}{\lambda}[(I+\lambda A)(x - J_\lambda x)] \\ J_\lambda Ax &= \frac{1}{\lambda}[x - J_\lambda x] = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}x = A_\lambda x. \end{aligned}$$
4. Utilizando la notación $C = \overline{D(A)}$,
$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda Ax = \mathrm{Proy}_C Ax = Ax.$$
Esto no sucede si $A$ es multívoco.

■

**Teorema 10**

1. $A_\lambda$ es maximal monótono y lipschitciano de constante $\frac{1}{\lambda}$
2. $y = A_\lambda x \Longleftrightarrow y \in A(x - \lambda y)$, o también: $y \in Ax \Longleftrightarrow y = A_\lambda(x + \lambda y)$
3. $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu} \quad \forall \lambda, \mu > 0$
4. $\forall x \in D(A), \quad \|A_\lambda x\| \uparrow \|A^0 x\|$ y $A_\lambda x \to A^0 x$ cuando $\lambda \downarrow 0$, con:
$$\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 \geq \|A^0\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$$
5. $\forall x \notin D(A), \quad \|A_\lambda x\| \uparrow \infty$ cuando $\lambda \downarrow 0$.

Demostración:

1. Sabemos que:
$$A_\lambda x = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}x \Longleftrightarrow x = \lambda A_\lambda x + J_\lambda x.$$
Por otra parte, $A_\lambda x \in A(J_\lambda x)$. Como $A$ es monótono,
$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \geq 0.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \|x_1 - x_2\| \geq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) = \\ = (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) + \\ + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \geq \\ \geq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) = \\ = \lambda \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x_1 - x_2\|$$

luego $A_\lambda$ es lipschitciano y, en consecuencia, unívoco y hemicontinuo. Además, $D(A_\lambda) = H$, por su propia definición, luego $A_\lambda$ es maximal monótono (cf. Teorema 9).

2. Sea $y = A_\lambda x$. Entonces,

$$\begin{aligned} y = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} x &\iff \lambda y = x - J_\lambda x \\ &\iff J_\lambda x = x - \lambda y \\ &\iff x \in (I + \lambda A)(x - \lambda y) = x - \lambda y + \lambda A x - \lambda^2 A y \\ &\iff \lambda y \in \lambda A x - \lambda^2 A y \\ &\iff y \in A x - \lambda A y = A(x - \lambda y). \end{aligned}$$

Haciendo $x - \lambda y = z$, tenemos inmediatamente,

$$y \in Az \iff y = A_\lambda(z + \lambda y).$$

3. Utilizando la propiedad anterior,

$$\begin{aligned} y = (A_\lambda)_\mu x &\iff y = (A_\lambda)(x - \mu y) \\ &\iff y \in A(x - \mu y - \lambda y) = A(x - (\lambda + \mu) y) \\ &\iff y = A_{\lambda+\mu} x. \end{aligned}$$

4. Sean $x \in D(A), \lambda > 0$. Puesto que $A^0 x \in Ax$ y $A_\lambda \in A(J_\lambda x)$, tendremos:

$$\begin{aligned} (A^0 x - A_\lambda x, x - J_\lambda x) \geq 0 \\ \implies (A^0 x - A_\lambda x, A_\lambda x) \geq 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

de donde

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\|^2 = (A_\lambda x, A_\lambda x) \leq (A^0 x, A_\lambda x) \leq \|A^0 x\| \|A_\lambda x\| \\ \implies \|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\| \end{aligned}$$

es decir, $\forall x \in D(A)$, $\|A_\lambda x\|$ es una cantidad acotada. En particular,

$$\begin{aligned} \|A_{\lambda+\mu} x\|^2 = \|(A_\lambda)_\mu x\|^2 \leq (A_\lambda^0 x, A_{\lambda+\mu} x) = \\ = (A_\lambda x, A_{\lambda+\mu} x) \leq \|A_\lambda x\| A_{\lambda+\mu} x\| \\ \implies \|A_{\lambda+\mu} x\| \leq \|A_\lambda x\|, \quad \forall \lambda, \mu > 0 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \|A_{\lambda+\mu} x - A_\lambda x\|^2 = \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_{\lambda+\mu} x, A_\lambda x) + \|A_{\lambda+\mu} x\|^2 \leq \\ \leq \|A_\lambda x\|^2 - \|A_{\lambda+\mu} x\|^2 \end{aligned}$$

ya que $(A_{\lambda+\mu}x, A_\lambda x) \geq \|A_{\lambda+\mu}x\|^2 \geq 0$. Ahora bien, como $\|A_{\lambda+\mu}x\| \leq \|A_\lambda x\|$, resulta que la sucesión de números reales $\|A_\lambda x\|$ es creciente cuando $\lambda \downarrow 0$. Pero, si $x \in D(A)$, $\|A_\lambda x\|$ está acotada superiormente, luego convergerá, de modo que:

$$\|A_{\lambda+\mu}x - A_\lambda x\|^2 \leq \|A_\lambda x\|^2 - \|A_{\lambda+\mu}x\|^2 \underset{\lambda,\mu\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

es decir, $A_\lambda x$ es una sucesión de Cauchy y, en consecuencia,

$$\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda x = y.$$

Pero $x - J_\lambda x = \lambda A_\lambda x$; pasando al límite,

$$\lim_{\lambda\to 0} x - J_\lambda x = \lim_{\lambda\to 0} \lambda A_\lambda x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x.$$

Finalmente, como $A_\lambda x \in A(J_\lambda x)$, tendremos:

$$\forall[\xi,\eta] \in A, \quad (y-\eta, x-\xi) \geq 0$$

luego $y \in Ax$. Además, $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$. Pasando al límite, tenemos

$$\|y\| \leq \|A^0 x\|$$

luego $y = A^0 x$, ya que $A^0 x$ es el elemento de norma mínima del conjunto $Ax$.

5. Supongamos $x \notin D(A)$, con $\|A_\lambda x\| \leq c, \quad \forall\lambda > 0$. El razonamiento anterior nos había llevado a que $A_\lambda x$ era sucesión de Cauchy y, por tanto,

$$\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda x = y \Longleftrightarrow \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x.$$

Recordando que $(A_\lambda x - \eta, J_\lambda x - \xi) \geq 0, \quad \forall[\xi,\eta] \in A$ y pasando al límite,

$$(y-\eta, x-\xi) \geq 0, \quad \forall[\xi,\eta] \in A,$$

luego $x \in D(A)$ e $y \in Ax$, en contra de la hipótesis. En consecuencia, si $x \notin D(A)$, $\|A_\lambda x\| \uparrow \infty$.

■

**Nota 2** Gracias a la propiedad (a) del teorema anterior, la ecuación:

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0,$$

aproximación del problema:

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0$$

tiene solución única (teorema de Picard). ■

Nos preguntamos ahora cuándo el operador maximal monótono $A$ es tal que la siguiente ecuación tiene solución:

$$\text{Dado } y \in H, \text{ hallar } x \in D(A) \text{ t. q. } y \in Ax$$

o, lo que es lo mismo, $R(A) = H$ (sobreyectividad de $A$).

**Teorema 11** Sea $A$ maximal monótono. Si $\exists c > 0$ t. q.

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq c\|x_1 - x_2\|^2, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2$$

entonces $A$ es sobreyectivo.
DEMOSTRACIÓN:

1. Sean $z_k \in Ax_k, \quad y_k \in (A - cI)x_k \quad (k = 1, 2)$. Se cumple entonces,

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2, x_1 - x_2) &= (z_1 - z_2, x_1 - x_2) - c(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = \\ &= (z_1 - z_2, x_1 - x_2) - c\|x_1 - x_2\|^2 \geq 0, \quad \forall z_k \in Ax_k\end{aligned}$$

   gracias a la hipótesis del teorema. En consecuencia, $A - cI$ es monótono.

2. Sea $[x, y] \in H \times H$ t. q. $\forall[\xi, \eta] \in A - cI$ verifique:

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0.$$

   Hay que demostrar que $y \in (A - cI)x$.
   Sea $\eta \in A\xi - c\xi \Leftrightarrow \eta = \tilde{\eta} - c\xi, \quad \tilde{\eta} \in A\xi$.

$$\begin{aligned}(y + c\xi - \tilde{\eta}, x - \xi) &\geq 0 \\ (cx - c\xi, x - \xi) &\geq 0 \\ \forall[\xi, \tilde{\eta}] \in A, \quad (y + cx - \tilde{\eta}, x - \xi) &\geq 0\end{aligned}$$

   De donde $y + cx \in Ax \Longleftrightarrow y \in (A - cI)x$, y $A$ es maximal.

3. Como $A - cI$ es maximal monótono, $R(A - cI + \lambda I) = H, \quad \forall \lambda > 0$; tomando $\lambda = c, \quad R(A) = H$.

■

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\text{Encontrar } x \in H \text{ t.q. } 0 \in Ax$$

siendo $A$ estrictamente monótono en el sentido: $\forall x_1, x_2 \in D(A)$,

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq c\|x_1 - x_2\|^2, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2.$$

Nos basaremos en la siguiente propiedad:

**Propiedad 16** $J_\lambda$ es una contracción estricta.
DEMOSTRACIÓN: Sean $y_k = J_\lambda x_k = (I + \lambda A)^{-1} x_k$. En consecuencia,

$$y_k + \lambda A y_k \ni x_k$$
$$\frac{x_k - y_k}{\lambda} \in A y_k$$

Tendremos entonces,

$$\alpha\|y_1 - y_2\|^2 \leq \left(\frac{x_1 - y_1}{\lambda} - \frac{x_2 - y_2}{\lambda}, y_1 - y_2\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2), y_1 - y_2\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) - \frac{1}{\lambda}\|y_1 - y_2\|^2.$$
$$(1 + \lambda\alpha)\|y_1 - y_2\|^2 \leq (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \leq \|x_1 - x_2\|\|y_1 - y_2\|$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Finalmente, obtenemos:

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{1 + \lambda\alpha}\|x_1 - x_2\|.$$

■

Como consecuencia, $J_\lambda$ tiene un único punto fijo, que se puede aproximar como límite de la sucesión:

$$x^{n+1} = J_\lambda x^n.$$

Naturalmente, $x = J_\lambda x \Longleftrightarrow (I + \lambda A)x \ni x \Longleftrightarrow 0 \in Ax$.

**Nota 3** El método anterior es el método de Euler implícito:

$$0 \in Ax$$
$$0 \in \frac{dx}{dt} + Ax$$
$$0 \in \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} + Ax^n + 1$$
$$x^{n+1} = (I + \Delta t A)^{-1} x^n.$$

■

**Teorema 12** Sean $A$ y $B$ dos operadores maximales monótonos. Si $B$ es monótono lipschitciano y $D(B) = H$, entonces $A + B$ es maximal monótono.
DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $A + B$ es monótono.

1. Supongamos que $B$ es lipschitciano de razón $L < 1$. Hay que comprobar que la ecuación:

$$\text{Dado } y \in H, \quad y \in x + Ax + Bx \tag{1.8}$$

tiene solución en $D(A) \cap D(B) = D(A)$. (1.8) es equivalente a:

$$x = (I + \lambda A)^{-1}(y - Bx).$$

Pero la aplicación:

$$x \longrightarrow (I + \lambda A)^{-1}(y - Bx) = J_\lambda^A(y - Bx)$$

es contracción estricta:

$$\begin{aligned}\|J_\lambda^A(y - Bx_1) - J_\lambda^A(y - Bx_2)\| &\leq \|(y - Bx_1) - (y - Bx_2)\| = \\ &= \|Bx_1 - Bx_2\| \leq L\|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

luego (1.8) tiene un único punto fijo, que es la solución buscada.

2. Supongamos que $B$ es lipschitciana de razón $L > 1$. Para cualquier $t$ positivo, $tA$ y $tB$ son maximales monótonos; además, $tB$ es lipschitciano de razón $tL$. Tomando $t < \frac{1}{L}$, el operador $tB$ será contracción estricta, luego $t(A + B) = tA + tB$ será maximal monótono (por lo demostrado en el apartado (a)). En consecuencia, el operador:

$$\frac{1}{t}(tA + tB) = A + B$$

también será maximal monótono.

■

**Corolario 3** Si $A$ y $B$ son maximales monótonos, $A + B_\lambda$ y $A_\lambda + B$ son maximales monótonos.
DEMOSTRACIÓN: Inmediata, puesto que $A_\lambda$ es maximal monótono y lipschitciano (cf. Teorema 10). ■

**Teorema 13** Sea $\varphi$ una función convexa, s.c.i. y propia. Sean:

- el operador $A = \partial\varphi \Longrightarrow D(A) \subset D(\varphi) \subset \overline{D(\varphi)}$
- $\varphi_\lambda(x) = \inf\limits_{y \in H}\{\frac{1}{2\lambda}|y - x|^2 + \varphi(y)\}$, definida $\forall x \in H, \forall \lambda > 0$.

Entonces,

1. $\varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}\|A_\lambda x\|^2 + \varphi(J_\lambda x), \quad \forall x \in H$
2. $\varphi_\lambda$ es convexa, diferenciable Fréchet
3. $\partial\varphi_\lambda = A_\lambda$
4. $\varphi_\lambda(x) \uparrow \varphi(x)$ cuando $\lambda \downarrow 0, \quad \forall x \in H$
5. $\overline{D(\varphi)} = \overline{D(A)}$.

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que $\psi$ es diferenciable Fréchet si existe la aplicación lineal $\psi'_a : H \longrightarrow V$ tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\psi(a + h) - \psi(a) - \psi'_a(h)\|_V}{\|h\|_H} = 0.$$

Además, toda función diferenciable Fréchet es diferenciable Gâteaux. En consecuencia,

$$x_0 = \arg\inf_{x \in H} \varphi_\lambda(x) = \arg\inf_{x \in H} \varphi(x).$$

1. Sabemos que la función:
$$y \longrightarrow \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2 + \varphi(y)$$
alcanza su mínimo en $x_0$ si y sólo si:
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda}(x-x_0) \in (\partial\varphi)(x_0) \\ \Longrightarrow\ & x \in x_0 + \lambda(\partial\varphi)(x_0) = (I+\lambda(\partial\varphi))(x_0) \\ \Longrightarrow\ & x = J_\lambda x. \end{aligned}$$
Por lo tanto,
$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x) &= \frac{1}{2\lambda}\|J_\lambda x - x\|^2 + \varphi(J_\lambda x) = \frac{1}{2\lambda}\lambda^2\|\frac{x-J_\lambda x}{\lambda}\|^2 + \varphi(J_\lambda x) = \\ &= \frac{\lambda}{2}\|A_\lambda x\|^2 + \varphi(J_\lambda x). \end{aligned}$$
2.
3.
4.
5.

■

**Definición 22** Sea $V$ un espacio de Banach y $V'$ su dual. Sea la función:
$$\varphi : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$$
convexa, propia y s.c.i. Definimos la **función conjugada** (o **polar**) como:
$$\begin{aligned} \varphi^* : V' &\longrightarrow (-\infty,+\infty] \\ & \quad \varphi^*(x) = \sup_{y\in V}\{{}_{V'}\langle x,y\rangle_V - \varphi(y)\}. \end{aligned}$$

**Nota 4** Si $V = V'$ es un espacio de Hilbert, entonces:
$$\begin{aligned} \varphi^* : V &\longrightarrow (-\infty,+\infty] \\ & \quad \varphi^*(x) = \sup_{y\in V}\{(x,y) - \varphi(y)\}. \end{aligned}$$

■

**Propiedad 17** $\varphi^*$ es convexa, propia y s.c.i., pues es la envolvente superior de funciones afines continuas.

**Teorema 14** En un espacio de Hilbert $H$, $(\partial\varphi)^{-1}$ es el subdiferencial de $\varphi^*$, es decir:
$$y \in (\partial\varphi)(x) \Longleftrightarrow x \in \partial\varphi^*(y). \tag{1.9}$$

DEMOSTRACIÓN:

1. $(\partial\varphi)^{-1}$ es m.m.; por lo tanto,
$$x \in \partial\varphi^*(y) \Longrightarrow x \in (\partial\varphi)^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in (\partial\varphi)(x).$$

2. Recíprocamente, $\varphi^*$ es convexa, propia, s.c.i.; por lo tanto, $\partial\varphi^*$ es m.m. Basta demostrar que $(\partial\varphi)^{-1} \subset \partial\varphi^*$.

   Sea:

$$\begin{aligned} y \in \partial\varphi(x) &\Longleftrightarrow x \in (\partial\varphi)^{-1}(y) \\ \varphi(\xi) - \varphi(x) &\leq (y, \xi - x), \quad \forall \xi \in H \\ (y, \xi) - \varphi(\xi) &\leq (y, x) - \varphi(x), \quad \forall \xi \in H. \end{aligned}$$

   Luego,

$$\varphi^*(y) = \sup_{\xi \in H}\{(y, \xi) - \varphi(y)\} \leq (y, x) - \varphi(x). \tag{1.10}$$

   Por otra parte,

$$\begin{aligned} &\varphi^*(y) = \sup_{\xi \in H}\{(y, \xi) - \varphi(\xi)\} \\ \Longrightarrow\ &\varphi^*(y) \geq (y, \xi) - \varphi(\xi), \quad \forall \xi \in H. \end{aligned}$$

   En particular,

$$\varphi^*(y) \geq (y, x) - \varphi(x). \tag{1.11}$$

   De las ecuaciones (1.10) y (1.11) deducimos: $\varphi^*(y) = (y, x) - \varphi(x)$.

   Entonces, $\forall w \in H$,

$$\begin{aligned} \varphi^*(w) - \varphi^*(y) &\geq (w, x) - \varphi(x) - (y, x) + \varphi(x) \geq \\ &\geq (w, x) - (y, x) = (w - y, x). \end{aligned}$$

   Es decir, $x \in \partial\varphi^*(y)$.

■

**Teorema 15**

1. $\partial\varphi + \partial\psi \subset \partial(\varphi + \psi)$
2. Sean $V$ y $H$ espacios de Banach, y sean:
   - $\varphi : H \longrightarrow (-\infty, +\infty]$
   - $B : V \longrightarrow H$, lineal y continua.

   Entonces, $B^*(\partial\varphi(Bu)) \subset \partial(\varphi \circ B)(u)$.

Demostración:

1. Sea $y \in \partial\varphi(x) + \partial\psi(x)$, es decir,

$$y = y_1 + y_2 \qquad \text{con} \quad y_1 \in \partial\varphi(x), \quad y_2 \in \partial\psi(x).$$

   Entonces,

$$\begin{cases} \varphi(\xi) - \varphi(x) \geq (y_1, \xi - x) & \forall \xi \in H \\ \psi(\xi) - \psi(x) \geq (y_2, \xi - x) & \forall \xi \in H \end{cases}$$

   Sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned} (\varphi(\xi) + \psi(\xi)) - (\varphi(x) + \psi(x)) &\geq (y_1 + y_2, \xi - x), \quad \forall \xi \in H \\ (\varphi + \psi)(\xi) - (\varphi + \psi)(x) &\geq (y_1 + y_2, \xi - x), \quad \forall \xi \in H \\ &\Longrightarrow\ y_1 + y_2 \in \partial(\varphi + \psi)(x). \end{aligned}$$

   Naturalmente, si $\partial\varphi + \partial\psi$ es m.m.,

$$\partial\varphi + \partial\psi = \partial(\varphi + \psi).$$

2. Sea $y \in B^*(\partial\varphi(Bu))$. Entonces,

$$\begin{aligned} y = B^*z, \quad z \in \partial\varphi(Bu) \\ \varphi(\xi) - \varphi(Bu) \geq \langle z, \xi - Bu\rangle, \quad \forall \xi \in H. \end{aligned}$$

Tomando $\xi = Bv, \quad v \in V$,

$$\begin{aligned} \varphi(Bv) - \varphi(Bu) &\geq \langle z, Bv - Bu\rangle, \quad \forall v \in V \\ \varphi(Bv) - \varphi(Bu) &\geq \ {}_{V'}\langle B^*z, v - u\rangle_V, \quad \forall v \in V \\ (\varphi \circ B)(v) - (\varphi \circ B)(u) &\geq \ {}_{V'}\langle B^*z, v - u\rangle_V, \quad \forall v \in V \\ &\Longrightarrow y = B^*z \in \partial(\varphi \circ B)(u). \end{aligned}$$

Una condición para la igualdad es que exista $x \in H$ donde $\varphi$ sea finita y continua.

■

## 1.6. Ejemplos de subdiferenciales.

Sea $H$ un espacio de Hilbert. Sea $C \subset H$ un convexo cerrado no vacío . Recordemos que su función indicatriz viene dada por:

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in C \\ +\infty & \text{si} \quad x \notin C. \end{cases}$$

**Propiedad 18** La función indicatriz $I_C$ es convexa, propia y s.c.i.
DEMOSTRACIÓN: ■

**Propiedad 19** El subdiferencial de la función indicatriz $I_C$ viene dado por:

$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \{z \in H \quad / \quad (z, y - x) \leq 0, \quad \forall y \in C\} & \text{si} \ \ x \in C \\ \phi & \text{si} \ \ x \notin C. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición, tenemos:

$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \{z \in H \quad / \quad I_C(y) - I_C(x) \geq (z, y - x), \quad \forall y \in H\} & \text{si} \ \ x \in C \\ \phi & \text{si} \ \ x \notin C. \end{cases}$$

Ahora bien, $I_C(x) = 0$, pues $x \in C$. Además,

- si $y \notin C, I_C(y) = +\infty > (z, y - x)$ y la desigualdad se cumple siempre
- si $y \in C, I_C(y) = 0 \geq (z, y - x)$.

■

**Propiedad 20** La resolvente y aproximada Yosida del operador $\partial I_C$ vienen dados, respectivamente, por:

1. $J_\lambda^{\partial I_C} = \mathrm{Proy}_C$
2. $(\partial I_C)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - \mathrm{Proy}_C)$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $J_\lambda = (I + \lambda\partial I_C)^{-1}$.

$$\begin{aligned} y \in (I + \lambda\partial I_C)^{-1}(x) &\Longleftrightarrow y + \lambda\partial I_C(y) \ni x \\ &\Longleftrightarrow x - y \in \lambda\partial I_C(y) \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{x - y}{\lambda}, z - y\right) \leq 0, \quad \forall z \in C. \end{aligned}$$

Luego $y$ es la proyección del elemento $x$ sobre el convexo $C$.

2. Por definición,

$$(\partial I_C)_\lambda = \frac{I - J_\lambda^{\partial I_C}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\,(I - \mathrm{Proy}_C)$$

■

**Nota 5** $(\partial I_C)_\lambda$ es el subdiferencial de la función:

$$\begin{aligned}(I_C)_\lambda(x) &= \frac{1}{2\lambda}\left\{\|x - \mathrm{Proy}_C x\|^2 + I_C(\mathrm{Proy}_C x)\right\} = \\ &= \frac{1}{2\lambda}\|x - \mathrm{Proy}_C x\|^2.\end{aligned}$$

(Regularizada de la función indicatriz). ■

**Definición 23** Se llama **función soporte** de un convexo a la conjugada de la función indicatriz del convexo: $\varphi = (I_C)^*$.

De dicha definición se deduce inmediatamente:

$$\varphi(x) = (I_C)^*(x) = \sup_{y\in H}\{(y,x) - I_C(x)\} = \sup_{y\in C}(y,x).$$

**Propiedad 21** La aproximada Yosida del subdiferencial de la función soporte viene dada por:

$$(\partial\varphi)_\lambda(v) = \mathrm{Proy}_C(\frac{v}{\lambda}).$$

Demostración: Sea $p \in (\partial\varphi)_\lambda(v)$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}& p \in (\partial\varphi)(v - \lambda p) \\ \text{(gracias a (1.9))} \quad & \Longleftrightarrow v - \lambda p \in (\partial I_C)(p) \\ & \Longleftrightarrow v - \lambda p \in (\partial I_C)_{\frac{1}{\lambda}}(p + \frac{v}{\lambda} - p) = (\partial I_C)_{\frac{1}{\lambda}}(\frac{v}{\lambda}) \\ & \Longleftrightarrow v - \lambda p \in \lambda(I - \mathrm{Proy}_C)(\frac{v}{\lambda}) = v - \lambda \mathrm{Proy}_C(\frac{v}{\lambda}) \\ & \Longleftrightarrow p = \mathrm{Proy}_C(\frac{v}{\lambda}).\end{aligned}$$

■

**Ejemplo 3** Sean:

- $H = (L^2(\Omega))^d$
- $C = \{q \in H \quad / \quad |q(x)| \leq 1 \text{ c.p.t. en } \Omega\}$.

La función soporte de $C$ será:

$$\varphi(p) = \sup_{q\in C}\int_\Omega p(x)q(x) = \int_\Omega |p(x)|.$$

En efecto, sea $\lambda(x)$ tal que:

$$\lambda_i(x) = \frac{p_i(x)}{|p(x)|} \Longrightarrow |\lambda(x)| = \sqrt{\sum_{i=1,d}\lambda_i^2(x)} = 1.$$

Tenemos, pues,

$$\varphi(p) \geq \int_\Omega \sum_{i=1,d} p_i(x)\frac{p_i(x)}{|p(x)|} = \int_\Omega |p(x)|.$$

Por otra parte, $\forall q \in C$,

$$\int_\Omega p(x)q(x) = \int_\Omega \sum_{i=1,d} p_i(x)q_i(x) \leq \int_\Omega |p(x)||q(x)| \leq \int_\Omega |p(x)|$$

$$\varphi(p) = \sup_{q \in C} \int_\Omega p(x)q(x) = \int_\Omega |p(x)|.$$

$\blacksquare$

# Capítulo 2

# Formulación y planteamiento de ejemplos de la física y de la mecánica

## 2.1. Una clase general de problemas.

Sean:

- $V$, espacio de Hilbert, con norma $\|\cdot\|$ y producto escalar $((\cdot,\cdot))$
- $V'$, espacio dual de $V$
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$, producto de dualidad $(V',V)$
- $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \Re$, forma bilineal, continua y V-elíptica, es decir:

$$\exists\alpha > 0 \quad / \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \forall v \in V$$

- $L : V \longrightarrow \Re$, forma lineal y continua
- $\psi : V \longrightarrow \Re \cup \{+\infty\}$, funcional convexa, propia y s.c.i.

Consideremos el siguiente problema:
Hallar $u \in V$ t.q.

$$a(u, v-u) + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle L, v-u\rangle, \quad \forall v \in V. \tag{2.1}$$

Otras formas de plantear el problema:
(a) Sea $Au \in V'$ una forma lineal y continua sobre $V$:

$$\begin{array}{rccc} Au: & V & \longrightarrow & \Re \\ & v & \longrightarrow & a(u,v) \end{array}$$

O bien, $A : V \longrightarrow V'$, de modo que:

- $\langle Au, v\rangle = a(u,v), \quad \forall v \in V$
- $\langle Av, v\rangle \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V$
- $\|A\|_{L(V,V')} = \sup\limits_{\|v\|=1} \frac{\|Av\|_{V'}}{\|v\|}$.

El problema (2.1) puede escribirse: Encontrar $u \in V$ t. q.:

$$\langle Au, v-u\rangle + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle L, v-u\rangle, \quad \forall v \in V.$$

O bien, utilizando el lenguaje del cálculo subdiferencial,

$$L - Au \in \partial\psi(u).$$

Es decir, (2.1) equivale a resolver una ecuación multívoca.

(b) Sea $H$ un espacio de Hilbert, de norma $|\cdot|$ y producto escalar $(\cdot,\cdot)$. Sean:

- un operador lineal y continuo $B : V \longrightarrow H \approx H'$
- su operador adjunto $B^* : H' \longrightarrow V'$, es decir:

$$_{V'}\langle B^*q, v\rangle_V =_{H'} \langle q, Bv\rangle_H = (q, Bv).$$

Sea $\varphi : H \longrightarrow \Re \cup \{+\infty\}$ propia, convexa, s.c.i. Consideremos el problema (2.1), donde $\psi = \varphi \circ B$:

$$\langle Au, v-u\rangle + \varphi(Bv) - \varphi(Bu) \geq \langle L, v-u\rangle$$

o también,

$$L - Au \in \partial(\varphi \circ B)(u).$$

Si existe $p \in H$ t. q. $\varphi$ sea continua y finita en $p$, entonces el problema es equivalente a:

$$L - Au \in B^*\partial\varphi(Bu)$$

o bien,

Hallar $u \in V, p \in H$ tales que:

$$\begin{cases} Au + B^*p = L \\ p \in \partial\varphi(Bu) \end{cases}$$

(c) Si $\psi = I_K$ (función indicatriz de un conjunto convexo y cerrado $K \subset V$), entonces (2.1) es equivalente a:

Hallar $u \in K$ t. q.

$$a(u, v-u) \geq \langle L, v-u\rangle \quad \forall v \in K.$$

(d) Si $K = V$, entonces,

Hallar $u \in V$ t. q.

$$a(u,v) = \langle L, v\rangle \quad \forall v \in K.$$

(e) Si $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y escribimos:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + \psi(v) - \langle L, v\rangle$$

entonces (2.1) es equivalente a:

Hallar $u \in V$ t.q.

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$$

**Teorema 16** Con las hipótesis realizadas en la formulación del problema (2.1), este admite una solución única.
DEMOSTRACIÓN:

1. Unicidad. Supongamos dos soluciones $(u_1, u_2)$ al problema; tendremos así:

$$\begin{aligned} a(u_1, v - u_1) + \psi(v) - \psi(u_1) \geq \langle L, v - u_1 \rangle, \quad \forall v \in V \\ a(u_2, v - u_2) + \psi(v) - \psi(u_2) \geq \langle L, v - u_2 \rangle, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Tomando $v = u_2$ en la primera ecuación, y $v = u_1$ en la segunda,

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2 - u_1) + \psi(u_2) - \psi(u_1) \geq \langle L, u_2 - u_1 \rangle \\ a(u_2, u_1 - u_2) + \psi(u_1) - \psi(u_2) \geq \langle L, u_1 - u_2 \rangle \end{aligned}$$

y, sumando,

$$a(u_1 - u_2, u_2 - u_1) \geq 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0 \\ \Longrightarrow \|u_1 - u_2\|^2 = 0 \\ \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

2. Existencia. Si $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, entonces (2.1) es un problema de minimización de la funcional:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \psi(v) - \langle L, v \rangle,$$

que es una funcional convexa, propia, s.c.i. y coerciva, luego existe la solución al problema (2.1).

Supongamos que $a(\cdot, \cdot)$ no es necesariamente simétrica, y consideremos el siguiente problema auxiliar:

Dado $u \in V, \rho > 0$, hallar $w \in V$ tal que:

$$\begin{aligned} &((w, v - w)) + \rho\psi(v) - \rho\psi(w) \geq \\ &\qquad \geq ((u, v - ww)) + \rho\langle L, v - w \rangle - \rho a(u, v - w), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Este problema tiene solución única, pues es un problema del tipo (2.1) con forma bilineal asociada simétrica. El problema original a resolver es, entonces, encontrar un punto fijo de la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} F_\rho : V & \longrightarrow & V \\ u & \longrightarrow & w \end{array}$$

donde $w$ es la solución de (2.2). Basta demostrar, pues, que para valores adecuados de $\rho$, $F_\rho$ es una contracción estricta.

Sean $w_1 = F_\rho(u_1)$ y $w_2 = F_\rho(u_2)$. Tendremos:

$$\begin{aligned} &((w_1, v - w_1)) + \rho\psi(v) - \rho\psi(w_1) \geq \\ &\qquad \geq ((u_1, v - w_1)) + \rho\langle L, v - w_1 \rangle - \rho a(u_1, v - w_1) \\ &((w_2, v - w_2)) + \rho\psi(v) - \rho\psi(w_2) \geq \\ &\qquad \geq ((u_2, v - w_2)) + \rho\langle L, v - w_2 \rangle - \rho a(u_2, v - w_2) \end{aligned}$$

Haciendo $v = w_2$ y $v = w_1$, respectivamente, tendremos:

$$\begin{aligned} &((w_1, w_2 - w_1)) + \rho\psi(w_2) - \rho\psi(w_1) \geq \\ &\qquad \leq ((u_1, w_2 - w_1)) + \rho\langle L, w_2 - w_1 \rangle - \rho a(u_1, w_2 - w_1) \\ &((w_2, w_1 - w_2)) + \rho\psi(w_1) - \rho\psi(w_2) \geq \\ &\qquad \leq ((u_2, w_1 - w_2)) + \rho\langle L, w_1 - w_2 \rangle - \rho a(u_2, w_1 - w_2) \end{aligned}$$

de donde,

$$
\begin{aligned}
((w_1 - w_2, w_2 - w_1)) &\geq ((u_1 - u_2, w_2 - w_1)) - \rho a(u_1 - u_2, w_2 - w_1) \\
((w_1 - w_2, w_1 - w_2)) &\leq ((u_1 - u_2, w_1 - w_2)) - \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2)
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
\|F_\rho(u_1) - F_\rho(u_2)\|^2 = \|w_1 - w_2\|^2 \leq \\
\leq ((u_1 - u_2, w_1 - w_2)) - \rho\langle A(u_1 - u_2), w_1 - w_2\rangle.
\end{aligned}
$$

Por el teorema de Riesz, podemos considerar $A(u_1 - u_2)$ como un elemento de $V$ tal que:

$$
\begin{aligned}
\|w_1 - w_2\|^2 &\leq ((u_1 - u_2, w_1 - w_2)) - \rho((A(u_1 - u_2), w_1 - w_2)) = \\
&= (((I - \rho A)(u_1 - u_2), w_1 - w_2)) \leq \\
&\leq \|I - \rho A\| \|u_1 - u_2\| \|w_1 - w_2\|
\end{aligned}
$$

es decir, $\|w_1 - w_2\| \leq \|I - \rho A\| \|u_1 - u_2\|$. Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\|I - \rho A\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} \|(I - \rho A)v\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|v - \rho A v\| \\
\|v - \rho A v\|^2 &= ((v - \rho A v, v - \rho A v)) = \\
&= ((v, v)) - 2\rho((Av, v)) + \rho^2((Av, Av)) = \\
&= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 \|Av\|^2 \leq \\
&\leq 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2, \quad \forall v \quad / \quad \|v\| \leq 1.
\end{aligned}
$$

Sea la función:

$$
\begin{aligned}
f(\rho) &= 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2 \\
f'(\rho) &= -2\alpha + 2\rho\|A\|^2 = 0 \Longrightarrow \rho = \frac{\alpha}{\|A\|^2} \\
f_{min} &= f\left(\frac{\alpha}{\|A\|^2}\right) = 1 - \frac{\alpha^2}{\|A\|^2} < 1.
\end{aligned}
$$

Por tanto, para el valor $\rho = \frac{\alpha}{\|A\|^2}$, tenemos que:

$$
\|I - \rho A\| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|I - \frac{\alpha}{\|A\|^2} A\| < 1
$$

y, en consecuencia,

$$
\|w_1 - w_2\| \leq \|u_1 - u_2\|,
$$

luego $F_\rho$ es una contracción.

■

La demostración del teorema anterior sugiere el siguiente algoritmo de resolución numérica:

(i) Sean $u^0$ arbitrario y $0 < p < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$

(ii) Conocido $u^n$, resolvemos:

$$
\begin{aligned}
\forall v \in V \qquad & ((u^{n+1}, v - u^{n+1})) + \rho\psi(v) - \rho\psi(u^{n+1}) \geq \\
& \geq ((u^n, v - u^{n+1})) + \langle L, v - u^{n+1}\rangle - \rho a(u^n, v - u^{n+1}).
\end{aligned}
$$

Trataremos de buscar $((\cdot, \cdot))$ lo más sencillo posible; por ejemplo, en dimensión finita, un operador diagonal.

## 2.2. Ejemplos físicos.

### 2.2.1. Torsión elastoplástica. Ley de Hencky.

Sean:

- un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \Re^2$
- $V = H_0^1(\Omega)$
- $V' = H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$)
- $H = L^2(\Omega)^2$
- un operador $B$:
$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & \nabla v \end{array}$$
- el operador dual $B^*$:
$$\begin{array}{rcl} B^* : H & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & -\mathrm{div}\, q \end{array}$$
- $K = \{v \in V \,/\, |\nabla v(x)| \leq k \text{ ctp en}\Omega\}$.

**Formulación del problema**:

(a) Sea $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$.

Hallar $u \in V$ t. q. $J(u) = \inf J(v) \quad \forall v \in K$.

(b) Sea el conjunto $C = \{q \in L^2(\Omega)^2 \quad / \quad |q(x)| \leq k \text{ ctp en } \Omega\}$.

Sea $F(v) = J(v) + I_C(Bv) = \begin{cases} J(v) & \text{si} \quad Bv \in C \\ +\infty & \text{si} \quad Bv \notin C. \end{cases}$

Hallar $u \in V$ t. q. $F(u) = \inf\limits_{v \in V} F(v)$.

(c) Sea $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$.

Hallar $u \in V$ t. q.,

$$a(u, v - u) + I_C(Bv) - I_C(Bu) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in V.$$

(d) Puesto que $I_C$ es finita y continua en $q = 0$, p. ej.

Hallar $u \in V$ t. q. $\quad f - Au \in B^*\partial\varphi(Bu)$.

(e) Hallar $u \in V$ t. q.

$$\begin{cases} Au + B^*p = f \\ p \in \partial\varphi(Bu) \end{cases}$$

es decir,

Hallar $u \in V$ t. q.

$$\begin{cases} -\triangle u - \mathrm{div}\, p = f \\ p \in \partial I_C(\nabla u). \end{cases} \tag{2.3}$$

### 2.2.2. Membrana con obstáculo. Flujo en medio poroso.

Sean:

- $V = H_0^1(\Omega), \quad \Omega \subset \Re^2$
- $V' = H^{-1}(\Omega)$
- $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$
- $\langle L, v\rangle = (f,v)$
- $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \quad / \quad v(x) \geq g(x) \text{ ctp en } \Omega\}$
- $\psi = I_K$.

**Formulación del problema**:

(a) Sea $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$.
Hallar $u \in V$ t. q.

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

(c) Hallar $u \in K$ t.q.

$$a(u, v-u) + I_K(v) - I_K(u) \geq (f, v-u).$$

(d) $f - Au \in \partial I_K(u)$.

(e) Hallar $u \in V$ t.q.

$$\begin{cases} Au + p = f \\ p \in \partial I_K(u). \end{cases}$$

### 2.2.3. Flujo de fluido tipo Bingham en un cilindro.

Sean:

- $V = H_0^1(\Omega)$
- $V' = H^{-1}(\Omega)$
- $H = L^2(\Omega)^d$
- un operador $B$:

$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & \nabla v \end{array}$$

- el operador traspuesto $B^*$:

$$\begin{array}{rcl} B^* : H & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & -\text{div}\, q \end{array}$$

- $a(u,v) = \nu \int_\Omega \nabla u \nabla v$
- $\langle L, v\rangle = \int_\Omega fv$
- $C = \{q \in H \quad / \quad |q(x)| \leq 1 \text{ ctp en } \Omega\}$
- $\varphi(q) = \int_\Omega |q(x)| dx \qquad$ (función soporte de $C$).

**Formulación del problema**:

(c) Hallar $u \in V$ t. q.

$$a(u, v-u) + \varphi(Bu) - \varphi(Bu) \geq \langle L, v-u\rangle.$$

(d) Hallar $u \in V$ t. q.
$$f - Au \in B^*\partial\varphi(Bu).$$

(e) Hallar $u \in V$ t. q.
$$\begin{cases} Au + B^*p = f \\ p \in \partial\varphi(Bu). \end{cases}$$

### 2.2.4. Problema de Stefan en dos fases.

Sean:

- $\langle L, v\rangle = \int_\Omega fv$
- $C = \{v \in H^1(\Omega) \quad / \quad |v(x)| \leq 1\}$
- $\psi(v) = \lambda \int_\Omega |v|dx \quad (\lambda = \text{valor latente}).$

**Formulación del problema**:

(c) Utilizando la transformación de Duvaut,

Hallar $u \in V$ t. q.,
$$\langle Au, v - u\rangle + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle L, v - u\rangle, \quad \forall v \in V$$
donde $A$ es fuertemente monótono unívoco.

(d) Hallar $u \in V$ t. q. $\quad f - Au \in \partial\varphi(u).$

(e) Hallar $u \in V$ t. q.
$$\begin{cases} Au + p = f \\ p \in \partial\psi(u). \end{cases}$$

### 2.2.5. Problema lineal con restricciones lineales. Ecuaciones de Stokes.

Sean:

- $V = H_0^1(\Omega)^d$
- $V' = H^{-1}(\Omega)^d$
- $H = L^2(\Omega)$
- un operador $B$:
$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & -\text{div } v \end{array}$$
- el operador traspuesto $B^*$:
$$\begin{array}{rcl} B^* : H & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & \nabla q \end{array}$$

Sea $\varphi$ la función indicatriz del convexo $\{ 0 \}$, es decir,
$$\begin{array}{rcl} \varphi : H & \longrightarrow & \Re \cup \{+\infty\} \\ q & \longrightarrow & \varphi(q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad q \neq 0. \end{cases} \end{array}$$

**Propiedad 22** $\varphi$ es convexa, propia y s.c.i.

**Propiedad 23** $\varphi(p) = \begin{cases} L^2(\Omega) & \text{si} \quad p = 0 \\ \phi & \text{si} \quad p \neq 0. \end{cases}$

**Propiedad 24** $-\text{div } u = Bu = 0 \Longleftrightarrow p \in (\partial\varphi)(Bu)$.

**Formulación del problema** (problema de Stokes):

(0) $\begin{cases} -\nu\triangle u + \nabla p = f \\ -\text{div } u = 0. \end{cases}$

(e) Utilizando la última propiedad,

$$\begin{cases} -\triangle u + \nabla p = f \\ p \in (\partial\varphi)(-\text{div } u) \end{cases} \tag{2.4}$$

o bien,

$$f + \triangle u \in \nabla(\partial\varphi(-\text{div } u))$$

o bien,

$$f - Au \in B^*(\partial\varphi(Bu)).$$

### 2.2.6. Condiciones de contorno no homogéneas.

Sean:

- $V = H^1(\Omega)$
- $V' = (H^1(\Omega))'$
- $H = L^2(\Omega)$
- el operador *varphi*:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : L^2(\Gamma) & \longrightarrow & \Re \cup \{+\infty\} \\ v & \longrightarrow & \varphi(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = u_0 \\ +\infty & \text{si } v \neq u_0 \end{cases} \end{array}$$

**Propiedad 25** El subdiferencial de $\varphi$ viene dado por:

$$\partial\varphi = \begin{cases} L^2(\Gamma) & \text{si } v = u_0 \\ \phi & \text{si } v \neq u_0. \end{cases}$$

■

Sea la aplicación traza, $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$.

**Formulación del problema**:

(1) Puede expresarse de la manera siguiente:

$$\begin{cases} -\triangle u = f \\ \ \ u|_\Gamma = u_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

(c) Encontrar $u$ t. q.

$$\langle \triangle u, v - u\rangle + \varphi(\gamma v) - \varphi(\gamma u) \geq \langle f, v - u\rangle.$$

(e) Hallar $u$ t. q.

$$\begin{cases} -\triangle u + \gamma^* p = f \\ p \in \partial\varphi(\gamma u). \end{cases}$$

### 2.2.7. Flujo no lineal en medio poroso. Flujo potencial compresible.

Sean:

- $W^{1,s} = \{v \in L^s(\Omega) \quad / \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^s(\Omega), i = 1, 2, \ldots, d\}$
- $V = W^{1,s}_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \{v \in W^{1,s} \quad / \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}$
- $V' = (W^{1,s}_{0,\Gamma_1})'$
- $H = (L^s(\Omega))^d$
- $K = \{v \in W^{1,s} \quad / \quad v|_{\Gamma} = u_0\}$
- el operador $A$:
$$\begin{array}{rcl} A : V & \longrightarrow & V' \\ v & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
- el operador $B$:
$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & \nabla v \end{array}$$
- el operador traspuesto $B^*$:
$$\begin{array}{rcl} B^* : H^1 & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & -\mathrm{div}\, q \end{array}$$

**Formulación del problema**:

(1) Flujo lineal. Hallar $u$ t. q.

$$\begin{cases} -\nabla(k\nabla u) = f \\ u|_{\Gamma_1} = u_0 \\ k\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g. \end{cases}$$

(2) Flujo no lineal: $k = k(u) = k_n|\nabla u|^n$. Tomaremos $k_n = 1$.

(a) $J(v) = \frac{1}{s}\int_\Omega |\nabla v|^s - \int_\Omega fv - \int_{\Gamma_2} gv$, donde $s = n+2$.
Hallar $u$ t. q. $J(u) = \inf\limits_{v\in K} J(v)$.

### 2.2.8. Elastoplasticidad.

Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \int_\Omega f_i w_i + \int_\Gamma g_i w_i \quad \forall w$$

Criterio de Plasticidad (Von Mises):

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D - k^2 \le 0$$

Ley de Comportamiento (Prandtl - Reuss):

$$a(\dot\sigma, \tau-\sigma) - (\varepsilon(\dot u), \tau - \sigma) \ge 0, \quad \forall \tau \in H$$

donde:

- $a(\tau,\sigma) = \int_\Omega A_{ijkl}\tau_{ij}\sigma_{kl}$
- $a(\tau,\tau) \ge \mu\|\tau\|^2 = \mu\int_\Omega \tau_{ij}\tau_{ij}$
- $H = \{\tau \in L^2(\Omega)^9 \quad / \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$
- $K = \{\tau \in H \quad / \quad F(\tau(x)) \le 0 \text{ ctp en } \Omega\}$.

Condiciones Iniciales: $\sigma(0) = 0$.

**Formulación del problema**:

(c) $a(\dot\sigma, \tau-\sigma) - (\varepsilon(\dot u), \tau-\sigma) + I_K(\tau) - I_K(\sigma) \ge 0$

(e) Sea $a(\tau,\sigma) = (A\tau,\sigma)$. Entonces,

$$A\dot\sigma - \varepsilon(\dot u) \in \partial I_K(\sigma)$$

es decir,

$$\begin{cases} A\dot\sigma - \varepsilon(\dot u) = \lambda \\ \lambda \in \partial I_K(\sigma) \end{cases}$$

donde

- $\varepsilon(\dot u)$ = incremento de deformación elástica
- $\lambda$ = incremento de deformación plástica.

**Nota 6** Si sustituimos $\partial I_K$ por su aproximada Yosida $(\partial I_K)_\mu$, tenemos la viscoplasticidad. ■

## 2.3. Métodos de resolución numérica.

### 2.3.1. El método de penalización.

Consiste en sustituir la ecuación multívoca

$$Au + B^*\partial\varphi(Bu) \ni f$$

por la ecuación unívoca

$$Au_\lambda + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda) = f.$$

**Teorema 17** Con las hipótesis del problema (2.1), obtenemos

$$\|u - u_\lambda\| \leq C\sqrt{\lambda}.$$

Demostración: Consideremos las ecuaciones:

$$Au + B^*(\partial\varphi)(Bu) \ni f$$
$$Au_\lambda + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda) = f.$$

Pongamos:

$$\begin{cases} p \in (\partial\varphi)(Bu) \Longleftrightarrow p = (\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) \\ p_\lambda \in (\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda). \end{cases}$$

Tenemos así:

$$\begin{cases} Au + B^*p = f \\ Au_\lambda + B^*p_\lambda = f. \end{cases}$$

Restando obtenemos: $A(u - u_\lambda) + B^*(p - p_\lambda) = 0$.
Y, multiplicando por $u - u_\lambda$,

$$\langle A(u - u_\lambda), u - u_\lambda\rangle + \langle B^*(p - p_\lambda), p - p_\lambda\rangle = 0$$
$$\langle A(u - u_\lambda), u - u_\lambda\rangle + \langle p - p_\lambda, B(p - p_\lambda)\rangle = 0.$$

Por ser $A$ coercivo, $\langle A(u - u_\lambda), u - u_\lambda\rangle \geq \alpha\|u - u_\lambda\|^2$ luego,

$$\alpha\|u - u_\lambda\|^2 + (p - p_\lambda, B(p - p_\lambda)) \leq 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |p - p_\lambda|^2 &= |(\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) - (\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda)|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda}(p - p_\lambda, B(u - u_\lambda) + \lambda p) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(p - p_\lambda, B(u - u_\lambda)) + (p - p_\lambda). \end{aligned}$$

De donde se deduce,

$$\begin{aligned} |p - p_\lambda|^2 &\leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u - u_\lambda\|^2 + (p - p_\lambda, p) \leq \\ &\leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u - u_\lambda\|^2 + |p - p_\lambda|^2 + \frac{1}{4}p^2. \end{aligned}$$

Luego $\|u - u_\lambda\|^2 \leq \frac{\lambda}{4\alpha}p^2 = \frac{p^2}{4\alpha}\lambda$.
Tomando $C = \frac{|p|}{\sqrt{2\alpha}}$, siendo $p \in (\partial\varphi)^0(Bu)$, obtenemos la estimación:

$$\|u - u_\lambda\| \leq C\sqrt{\lambda}.$$

■

**Nota 7** En la demostración anterior, hemos utilizado la siguiente propiedad:

$$ab = \varepsilon a\frac{1}{\varepsilon}b \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2a^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon^2}b^2.$$

Tomando en este caso $\varepsilon = \sqrt{2}$, tenemos $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$. ■

**Aplicación al problema de Stokes.**

Las ecuaciones de Stokes deducidas anteriormente son (cf. (2.4)):

$$\begin{cases} -\nu\triangle u + \nabla p = f \\ p \in \partial\varphi(-\text{div } u). \end{cases}$$

El problema penalizado será:

$$\begin{cases} -\nu\triangle u_\lambda + \nabla p_\lambda = f \\ p_\lambda = \partial\varphi(-\text{div } u_\lambda). \end{cases}$$

Recordemos que $\varphi$ es la función indicatriz del convexo $C = \{0\}$:

$$\varphi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ +\infty & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Puesto que se trata de una función indicatriz, su aproximada Yosida viene dada por (Nota 5):

$$\varphi_\lambda(p) = \frac{1}{2\lambda}\|p - \text{Proy}_C p\|^2.$$

Pero $\text{Proy}_0 p = 0$, luego,

$$\varphi_\lambda(p) = \frac{1}{2\lambda}|p|^2$$

de donde,

$$(\partial\varphi_\lambda(p), q) = \frac{1}{\lambda}(p, q), \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

Tenemos, pues,

$$p_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\text{div } u_\lambda$$

y la ecuación de Stokes penalizada es:

$$-\nu\triangle u_\lambda - \frac{1}{\lambda}\nabla(\text{div } u_\lambda) = f.$$

**Aplicación al problema lineal con condiciones no homogéneas.**

El problema expuesto anteriormente es (cf. (2.5)):

$$\begin{cases} -\triangle u = f \\ u|_\Gamma = u_0. \end{cases}$$

El problema penalizado será:

$$\begin{cases} -\triangle u + \gamma^* p = f \\ p \in \partial\varphi(\gamma u) \end{cases}$$

donde $\varphi$ es la función indicatriz del convexo $\{u_0\}$.

De manera similar al problema de Stokes, deducimos:

$$\varphi_\lambda(v) = \frac{1}{2\lambda}\int_\Gamma (v - u_0)^2$$

$$(\partial\varphi_\lambda(u), v) = \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma (u - u_0)v, \quad \forall u, v \in L^2(\Gamma).$$

En consecuencia, el problema penalizado será, en forma variacional:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma (u - u_0)\gamma v = \int_\Omega f v.$$

### 2.3.2. Un primer algoritmo (A1) para resolver (P).

Recordemos que el problema planteado era:

$$(P) \qquad \begin{cases} Au + B^*p = f & \text{en } V' \\ p \in \partial\varphi(Bu) & \text{en } H. \end{cases}$$

El problema es equivalente a:

$$(P) \qquad \begin{cases} Au + B^*p = f \\ p = (\partial\varphi)_\lambda\,(Bu + \lambda p). \end{cases}$$

Ello sugiere el siguiente algoritmo $(A1)$:

- Sea $p^0$ inicial, arbitrario.
- Obtenido $p^m$, resolvemos:

$$\begin{cases} Au^m = f - B^*p^m \\ p^{m+1} = (\partial\varphi)_\lambda\,(Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

**Nota 8** Si $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y $\varphi$ derivable, el anterior algoritmo es el algoritmo de Uzawa para la búsqueda del punto silla del lagrangiano:

$$L(v,q) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle L, v\rangle + (q, \varphi'(Bv))$$
$$L(u,q) \leq L(u,p) \leq L(v,p).$$

■

**Teorema 18** Con las hipótesis del Teorema 16 tenemos, para un adecuado valor de $\lambda$,

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\| = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $(\partial\varphi)_\lambda$ es lipschitciano de constante $\frac{1}{\lambda}$,

$$\begin{aligned} |p - p^{m+1}|^2 &= |(\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) - (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m + \lambda p^m)|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2}|(Bu + \lambda p) - (Bu^m + \lambda p^m)|^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m) + \lambda(p - p^m)|^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 + \frac{2}{\lambda}(B(u - u^m), (p - p^m)) + |p - p^m|^2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq -\frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 - \frac{2}{\lambda}\left(B(u - u^m), (p - p^m)\right).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} Au + B^*p &= f \\ Au^m + B^*p^m &= f \\ \Longrightarrow A(u - u^m) &= B^*(p^m - p). \end{aligned}$$

Tenemos así,

$$\begin{aligned} \alpha\|u - u^m\|^2 &\leq (A(u - u^m), u - u^m) = \\ &= \langle B^*(p^m - p), u - u^m\rangle = \\ &= (p^m - p, B(u - u^m)) = \\ &= -\left(B(u - u^m), p - p^m\right). \end{aligned}$$

De donde,

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq -\frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 + \frac{2\alpha}{\lambda}\|u - u^m\|^2.$$

Por otra parte, $B$ es un operador lineal y continuo, luego existe una constante $c$ t. q.

$$|Bv| \leq c\|v\|$$

y entonces,

$$-\frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 \geq -\frac{c^2}{\lambda^2}\|u - u^m\|^2.$$

Tenemos así,

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq \frac{1}{\lambda^2}(2\alpha - \frac{c^2}{\lambda})\|u - u^m\|^2.$$

Escogiendo $\lambda$ convenientemente, de forma que:

$$2\alpha - \frac{c^2}{\lambda} > 0$$

tendremos

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq \|u - u^m\|^2 \geq 0$$

es decir, la sucesión $|p - p^m|^2$ es decreciente.

Por otra parte, dicha sucesión está acotada inferiormente:

$$|p - p^m|^2 \geq 0.$$

En consecuencia, será convergente:

$$\lim_{m\to\infty} |p - p^m|^2 = 0$$

y, de aquí,

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\|^2 = 0.$$

■

**Aplicación al problema de torsión elastoplástica.**

Recordemos el problema (2.3):

$$\begin{cases} -\triangle u - \operatorname{div} p = f & \text{en } H^{-1}(\Omega) \\ p \in \partial I_C(\nabla u) & \text{en } (L^2(\Omega))^2 \end{cases}$$

donde

$$C = \left\{ q \in (L^2(\Omega))^2 \quad / \quad |q(x)| \leq k \text{ ctp en } \Omega \right\}.$$

El algoritmo $A1$ será:

- Dado $p^0$ inicial
- Obtenido $p^m$, resolvemos:

$$\begin{cases} -\triangle u^m = f + \operatorname{div} p^m \\ p^{m+1} = \frac{1}{\lambda}(I - \operatorname{Proy}_C)(\nabla u^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

**Aplicación al fluido Bingham.**

Podemos escribir el problema como:

$$\begin{cases} -\triangle u - \operatorname{div} p = f & \text{en } H^{-1}(\Omega) \\ p \in \partial\varphi(\nabla u) & \text{en } (L^2(\Omega))^2 \end{cases}$$

donde $\varphi$ es la función soporte de:

$$C = \left\{ q \in (L^2(\Omega))^2 \quad / \quad |q(x)| \leq 1 \text{ ctp en } \Omega \right\}.$$

El algoritmo $A1$ será:

- Dado $p^0$ inicial
- Obtenido $p^m$, resolvemos:

$$\begin{cases} -\triangle u^m = f + \operatorname{div} p^m \\ p^{m+1} = \operatorname{Proy}_C(\frac{\nabla u^m}{\lambda} + p^m). \end{cases}$$

**Aplicación al problema de Stefan.**

Sean:

- el operador identidad $I : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$
- $\psi(v) = \varphi(Iv)$
- $K = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^2 \quad / \quad |v(x)| \leq 1 \text{ ctp en } \Omega \right\}$

El algoritmo $A1$ será:

- Dado $p^0$ inicial
- Obtenido $p^m$, resolvemos:

$$\begin{cases} Au^m = f - I^* p^m \\ p^{m+1} = \mathrm{Proy}_K(\frac{u^m}{\lambda} + \lambda p^m). \end{cases}$$

o bien, en forma variacional,

- Dado $p^0$ inicial
- Obtenido $p^m$, resolvemos:

$$\begin{cases} \langle Au^m, v\rangle = (f, v) - L(p, v) \\ p^{m+1} = \mathrm{Proy}_K(\frac{u^m}{\lambda} + \lambda p^m). \end{cases} \qquad \text{L = valor latente}$$

donde el producto escalar es $(u, v) = \int_\Omega uv$.

### 2.3.3. Una clase general de operadores: M($\omega$)-maximales.

Sea $H$ un espacio de Hilbert. Sea $\omega \in \Re$.

**Definición 24** Un operador multívoco $G$ en $H$ es **M($\omega$)- maximal** si $G + \omega I$ es maximal monótono.

**Propiedad 26** Sea $G$ $M(\omega)$-maximal. Si $\lambda\omega < 1$, entonces el operador $J_\lambda = (I + \lambda G)^{-1}$ está definido en todo $H$ y es unívoco. Además, es monótono y lipschitciano de constante $(1 - \lambda\omega)^{-1}$.
DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} (I + \lambda G)^{-1} &= (I + \lambda G + \lambda\omega I - \lambda\omega I)^{-1} = \\ &= [(1 - \lambda\omega)I + \lambda(G + \omega I)]^{-1} = \\ &= (1 - \lambda\omega)^{-1}[I + \frac{\lambda}{1 - \lambda\omega}(G + \omega I)]^{-1}. \end{aligned}$$

Como $G + \omega I$ es maximal monótono, el operador:

$$[I + \frac{\lambda}{1 - \lambda\omega}(G + \omega I)]^{-1}$$

está definido sobre todo $H$ y es unívoco siempre que:

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda\omega} > 0 \iff \lambda\omega < 1.$$

Como $I$ es unívoco, $G + \omega I$ también lo será.
$[I + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}(G + \omega I)]^{-1}$ es, además, una contracción (cf. Propiedad 8), luego

$$J_\lambda = (1 - \lambda\omega)^{-1}[I + \frac{\lambda}{1 - \lambda\omega}(G + \omega I)]^{-1}$$

es lipschitciano de constante $(1 - \lambda\omega)^{-1}$.

■

Sea $G$ un operador $M(\omega)$-maximal.

**Definición 25** Definimos la aproximada Yosida de $G$ como:

$$G_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$$

siempre que $\lambda\omega < 1$.

**Propiedad 27** $G_\lambda$ es $M\left(\frac{\omega}{1-\lambda\omega}\right)$-maximal.
DEMOSTRACIÓN:

1. El operador $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es monótono. En efecto,

$$G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\omega}{1-\lambda\omega}\right) I - \frac{1}{\lambda} J_\lambda =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\lambda\omega} I - \frac{1}{\lambda} J_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\lambda\omega} I - J_\lambda\right).$$

   Además, $J_\lambda$ es lipschitciano, luego

$$(J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2) \leq (1-\lambda\omega)^{-1}(x_1 - x_2, x_1 - x_2) =$$
$$= \frac{1}{1-\lambda\omega}\|x_1 - x_2\|^2.$$

   Entonces,

$$\left(\frac{x_1}{1-\lambda\omega} - J_\lambda x_1 - \frac{x_2}{1-\lambda\omega} + J_\lambda x_2, x_1 - x_2\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\lambda\omega}(x_1 - x_2, x_1 - x_2) - (J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2) =$$
$$= \frac{1}{1-\lambda\omega}\|x_1 - x_2\|^2 - (J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geq 0$$

   luego $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es monótono.

2. Además, $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es maximal, ya que (cf. Teorema 9):

   - $D(G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I) = D(G_\lambda) = H$
   - $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es unívoco, pues $G_\lambda, I$ son unívocos
   - también es hemicontinuo, pues $J_\lambda$ es hemicontinuo:

$$\|J_\lambda\left((1-t)x + ty\right) - J_\lambda x\| \leq \frac{1}{1-\lambda\omega}\|(1-t)x + ty - x\| =$$
$$= \frac{|t|}{1-\lambda\omega}\|x - y\|.$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0}\|J_\lambda\left((1-t)x + ty\right) - J_\lambda x\| = 0.$$

■

**Propiedad 28** Si $G$ es M($\omega$)-maximal, se verifican las siguientes mayoraciones:

1. $\frac{1-2\lambda\omega}{\lambda^2}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 + \|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|v_1 - v_2\|^2$
2. $\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, v_1 - v_2\right) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|$.

DEMOSTRACIÓN: Por ser $G + \omega I$ maximal monótono, se cumple:

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) \geq 0 \\ \forall y_k \in (G+\omega I)(J_\lambda v_k) = G(J_\lambda v_k) + \omega J_\lambda v_k \quad (k = 1, 2).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Además (cf. Propiedad 15),

$$G_\lambda v \in G(J_\lambda v).$$

Sean $z_k = G_\lambda v_k \in G(J_\lambda v_k) \quad (k = 1, 2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) &= (z_1 - z_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) = \\ = (z_1 + \omega J_\lambda v_1 - \omega J_\lambda v_1 - z_2 - \omega J_\lambda v_2 + \omega J_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) &= \\ = ((z_1 + \omega J_\lambda v_1) - (z_2 + \omega J_\lambda v_2), J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) - \omega (J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) &= \\ = (y_1 - y_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) - \omega \|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 &\end{aligned}$$

donde $y_k = z_k + \omega J_\lambda v_k \quad (k = 1, 2)$.

Utilizando (2.6), obtenemos,

$$\begin{aligned}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) = (z_1 - z_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) \geq \\ \geq -\omega \|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2.\end{aligned} \tag{2.7}$$

1. Por definición de la aproximada Yosida, $\lambda G_\lambda v + J_\lambda v = (I - J_\lambda)v + J_\lambda v = v$ luego,

$$\begin{aligned}\lambda G_\lambda v_1 + J_\lambda v_1 &= v_1 \\ \lambda G_\lambda v_2 + J_\lambda v_2 &= v_2 \\ \Longrightarrow G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2 + \frac{1}{\lambda}(J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) &= \frac{v_1 - v_2}{\lambda}.\end{aligned}$$

   Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned}\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 + \\ + \frac{2}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) = \frac{1}{\lambda^2}\|v_1 - v_2\|^2.\end{aligned}$$

   Luego, utilizando (2.7),

$$\begin{aligned}\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 - \\ - \frac{2\omega}{\lambda}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|v_1 - v_2\|^2\end{aligned}$$

   que es la proposición (a).

2. Tenemos:

$$\begin{aligned}\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 &= \left(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, \frac{I - J_\lambda}{\lambda} v_1 - \frac{I - J_\lambda}{\lambda} v_2\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, v_1 - v_2) - \\ &\qquad - \frac{1}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, v_1 - v_2) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2\end{aligned}$$

   también gracias a (2.7).

■

**Nota 9** En particular, observemos que si $\lambda\omega \leq 1/2$, entonces $G_\lambda$ es lipschitciano de constante $1/\lambda$. En efecto, en (a), si $\lambda\omega \leq 1/2$, entonces $\frac{1-2\lambda\omega}{\lambda^2} \geq 0$, y de ahí el resultado. ■

**Propiedad 29** Sea $G$ un operador M($\omega$)-maximal. Si $\lambda\omega < 1$, tenemos la equivalencia:

$$u \in G(v) \iff u \in G_\lambda(v + \lambda u).$$

Demostración: Idéntica al caso $\omega = 0$. ■

**Propiedad 30** Sea $G$ M($\omega$)-maximal. Sean $\lambda\omega < 1$ y $v_1, v_2, w_1, w_2 \in H$. Entonces,

$$\|v_1 - v_2 - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|w_1 - w_2 - \lambda(v_1 - v_2)\|^2 + \\ + \|v_1 - v_2\|^2 + \frac{2\omega}{\lambda}\|J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que:

$$G_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad J_\lambda = I - \lambda G_\lambda$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
&\|v_1 - v_2 - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2)\|^2 = \\
&= \|v_1 - v_2 - \frac{1}{\lambda}(w_1 - w_2) + (G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2)\|^2 = \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\|\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2) + \lambda(G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2)\|^2 = \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\|\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2)\|^2 + \|G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\|^2 + \\
&\quad + \frac{2}{\lambda}\left(\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2), G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\right) \leq \\
&\text{(utilizando la Propiedad 28)} \ \leq \frac{1}{\lambda^2}\|\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2)\|^2 + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda}(G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2, w_1 - w_2) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2\|^2 + \\
&\quad + 2\left(v_1 - v_2, G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\right) - \frac{2}{\lambda}\left(w_1 - w_2, G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\right).
\end{aligned}$$

Pero,

$$2(v_1 - v_2, G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2) \leq \|v_1 - v_2\|^2 + \|G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\|^2 \leq \\ \leq \|v_1 - v_2\|^2 + \frac{1}{\lambda}(G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2, w_1 - w_2) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2\|^2$$

y entrando en la desigualdad anterior se obtiene la mayoración buscada. ■

### 2.3.4. Una modificación del algoritmo A1: el algoritmo A2.

Sea el problema general en la forma:

$$f - Au \in B^* \partial\varphi(Bu).$$

Dado $\omega \in \Re$, podemos poner:

$$f - Au - \omega B^* Bu \in B^* \partial\varphi(Bu) - \omega B^* Bu$$

es decir,

$$f - Au - \omega B^* Bu \in B^*(\partial\varphi - \omega I)(Bu).$$

Llamando $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ y $p \in G^\omega(Bu)$, el problema se escribe:
Hallar $u$ t. q.

$$\begin{cases} Au + \omega B^* Bu = f - B^* p \\ p \in G^\omega(Bu). \end{cases}$$

Si podemos definir la aproximación Yosida $G^\omega_\lambda$ de $G^\omega$, el problema es equivalente a:

$$\begin{cases} Au + \omega B^* Bu = f - B^* p \\ p = G^\omega_\lambda(Bu + \lambda p). \end{cases}$$

Un algoritmo (A2) adaptado a este problema es el siguiente:

- Sea $p^0$ inicial, arbitrario
- Obtenido $p^m$, calculamos $u^m, p^{m+1}$ como solución de:

$$\begin{cases} Au^m + \omega B^* Bu^m = f - B^* p^m \\ p^{m+1} = G^\omega_\lambda (Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

**Lema 3** Sea $\varphi$ una función convexa módulo $\beta$, es decir:

$$\varphi((1-t)v_1 + tv_2) \le (1-t)\varphi(v_1) + t\varphi(v_2) - \\ - \frac{1}{2}\beta t(1-t)|v_1 - v_2|^2, \quad \beta \ge 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Entonces el operador $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ es M$(\omega - \beta)$-maximal.
Demostración: Tenemos, $\forall t \in (0,1)$:

$$\varphi(u + t(v-u)) \le (1-t)\varphi(u) + t\varphi(u) - \frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2.$$

Por otra parte,

$$\varphi(u + t(v-u)) - \varphi(u) \ge (\partial\varphi(u), t(v-u)) = t\,(\partial\varphi(u), v-u) \\ \Longrightarrow \varphi(u + t(v-u)) \ge \varphi(u) + t(\partial\varphi(u), v-u)$$

de donde,

$$(1-t)\varphi(u) + t\varphi(v) - \frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2 \ge \varphi(u) + t(\partial\varphi(u), v-u) \\ \Longrightarrow t(\partial\varphi(u), u-v) \ge \frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2 + t(\varphi(u) - \varphi(v)).$$

Intercambiando $\{u, v\}$, tenemos:

$$t(\partial\varphi(v), v-u) \ge \frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2 + t(\varphi(v) - \varphi(u)).$$

Sumando y dividiendo por $t$, y haciendo $t = 0$,

$$(\partial\varphi(u) - \partial\varphi(v), u-v) \ge \beta(1-t)|u-v|^2 \\ (\partial\varphi(u) - \partial\varphi(v), u-v) \ge \beta|u-v|^2.$$

Es decir, $\partial\varphi$ es fuertemente monótono y, en consecuencia, el operador $\partial\varphi - \beta I = G^\omega + (\omega - \beta)I$ es maximal monótono. Finalmente se deduce que el operador

$$G^\omega = \partial\varphi - \omega I$$

es M$(\omega - \beta)$-maximal.

∎

**Teorema 19** Con las hipótesis siguientes:

1. $a(v,v) = \langle Av, v\rangle \ge \alpha\|v\|^2, \quad \alpha \ge 0, \quad \forall v \in V$
2. $\varphi$ es convexa módulo $\beta$
3. o bien $\alpha > 0$ o bien $B^*B$ es un isomorfismo de $V$ en $V'$, es decir:

$$\|u - u^m\| \le c\|B^*B(u - u^m)\|_{V'}$$

4. $\lambda(\omega - \beta) \le 1/2$

5. $0 \leq \varepsilon_1 \leq \frac{1}{\lambda} \leq \varepsilon_2 \leq 2\left(\omega + \frac{\alpha}{\|B\|^2}\right)$

se tiene:

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\| = 0.$$

Demostración: Recordemos el algoritmo $A2$:

$$\begin{cases} Au^m + \omega B^* B u^m = f - B^* p^m \\ p^{m+1} = G^\omega_\lambda (Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

Gracias al lema anterior, el operador $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ es M$(\omega - \beta)$-maximal. Por lo tanto, podemos aplicar la Propiedad 28 con:

$$\begin{cases} v_1 = Bu + \lambda p \\ v_2 = Bu^m + \lambda p^m \end{cases} \qquad \begin{cases} G^\omega_\lambda (Bu + \lambda p) = p \\ G^\omega_\lambda (Bu^m + \lambda p^m) = p^{m+1} \end{cases}$$

para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\lambda(\omega - \beta)}{\lambda^2} &|J^\omega_\lambda (Bu + \lambda p) - J^\omega_\lambda (Bu^m + \lambda p^m)|^2 + |p - p^{m+1}|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m) + \lambda(p - p^m)|^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 + \frac{2}{\lambda}\left(B(u - u^m), p - p^m\right) + |p - p^m|^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} Au + \omega B^* B u &= f - B^* p \\ Au^m + \omega B^* B u^m &= f - B^* p^m. \end{aligned}$$

Restando y multiplicando por $u - u^m$, obtenemos:

$$\begin{gathered} A(u - u^m) + \omega B^* B(u - u^m) = B^*(p^m - p) \\ \langle A(u - u^m), u - u^m\rangle + \omega(B^* B(u - u^m), u - u^m) = (B^*(p^m - p), u - u^m) \\ \langle A(u - u^m), u - u^m\rangle + \omega(B(u - u^m), B(u - u^m)) = (p^m - p, B(u - u^m)) \\ \alpha\|u - u^m\|^2 + \omega|B(u - u^m)|^2 \leq -(p - p^m, B(u - u^m)) \end{gathered} \tag{2.9}$$

De la ecuación (2.8), tenemos:

$$\begin{aligned} |p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 &\geq \frac{1 - 2\lambda(\omega - \beta)}{\lambda^2}|J^\omega_\lambda (Bu + \lambda p) - J^\omega_\lambda (Bu^m + \lambda p^m)|^2 - \\ &\quad - \frac{2}{\lambda}(B(u - u^m), p - p^m) - \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 \geq \\ &\geq \frac{1 - 2\lambda(\omega - \beta)}{\lambda^2}|J^\omega_\lambda (Bu + \lambda p) - J^\omega_\lambda (Bu^m + \lambda p^m)|^2 - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 + \frac{2\alpha}{\lambda}\|u - u^m\|^2 + \frac{2\omega}{\lambda}|B(u - u^m)|^2. \end{aligned}$$

Como $|B(u - u^m)|^2 \leq \|B\|^2\|u - u^m\|^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} |p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 &\geq \frac{1 - 2\lambda(\omega - \beta)}{\lambda^2}|J^\omega_\lambda (Bu + \lambda p) - J^\omega_\lambda (Bu^m + \lambda p^m)|^2 + \\ &\quad + \left\{ \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\|B\|^2} + \omega\right) - \frac{1}{\lambda^2} \right\} \cdot |B(u - u^m)|^2. \end{aligned}$$

Si elegimos $\lambda$ y $\omega$ de forma que verifiquen la última hipótesis,

$$\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\|B\|^2} + \omega\right) - \frac{1}{\lambda^2} \geq \frac{1}{\lambda}\varepsilon_2 - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}(\varepsilon_2 - \frac{1}{\lambda}) \geq \varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_2) = 0.$$

Además, gracias a la hipótesis (d),

$$\lim_{m\to\infty}\left(|p-p^m|^2-|p-p^{m+1}|^2\right)=0$$

de donde $\lim\limits_{m\to\infty}|B(u-u^m)|=0$. Entonces, teniendo en cuenta (19),

- si $\alpha>0$,
$$\alpha\|u-u^m\|^2\leq(p^m-p,B(u-u^m))\leq|p-p^m|\cdot|B(u-u^m)|\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$$
- si $B^*B$ es un isomorfismo,
$$\|u-u^m\|\leq c\|B^*B(u-u^m)\|_{V'}\leq c\|B^*\||B(u-u^m)|\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

luego

$$\lim_{m\to\infty}\|u-u^m\|=0.$$

∎

Antes de pasar a los ejemplos concretos, conviene hallar una expresión de $G^\omega_\lambda$, aproximada Yosida de $G^\omega=\partial\varphi-\omega I$ en función de la aproximada Yosida de $\partial\varphi$.

**Propiedad 31** La aproximada Yosida de $G^\omega=\partial\varphi-\omega I$ viene dada por:

$$G^\omega_\lambda(v)=\frac{1}{1-\lambda\omega}\,(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{v}{1-\lambda\omega}\right)-\frac{\omega}{1-\lambda\omega}v. \tag{2.10}$$

Demostración: Sea $p=G^\omega_\lambda(v)$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
&p\in G^\omega(v-\lambda p)\\
\Longleftrightarrow\, &p\in(\partial\varphi-\omega I)(v-\lambda p)\\
\Longleftrightarrow\, &p\in(\partial\varphi)(v-\lambda p)-\omega v+\lambda\omega p\\
\Longleftrightarrow\, &p+\omega v-\lambda\omega p\in(\partial\varphi)(v-\lambda p)\\
\Longleftrightarrow\, &p+\omega v-\lambda\omega p\in(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(v-\lambda p+\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}p+\frac{\lambda\omega}{1-\lambda\omega}v-\frac{\lambda^2\omega}{1-\lambda\omega}p\right).
\end{aligned}$$

Pero

- $\left(-\lambda+\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}-\frac{\lambda^2\omega}{1-\lambda\omega}\right)p=0$
- $v+\frac{\lambda\omega}{1-\lambda\omega}v=\frac{v}{1-\lambda\omega}$

luego

$$(1-\lambda\omega)p=(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{v}{1-\lambda\omega}\right)-\omega v$$

de donde se deduce (2.10).

∎

**Aplicación a la torsión elastoplástica.**

Según hemos visto anteriormente, $B^*B(\cdot)=-\text{div}\,(\nabla(\cdot))$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
p^{m+1}&=G^\omega_\lambda(\nabla u^m+\lambda p^m)=\\
&=\frac{1}{1-\lambda\omega}\,(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{\nabla u^m+\lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right)-\frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m+\lambda p^m).
\end{aligned}$$

Pero,

$$(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}} = \frac{1-\lambda\omega}{\lambda}(I - \text{Proy}_C)$$

luego

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= \frac{1}{1-\lambda\omega}\frac{1-\lambda\omega}{\lambda}(I-\text{Proy}_C)\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m + \lambda p^m) = \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\lambda\omega} - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}\right)(\nabla u^m + \lambda p^m) - \frac{1}{\lambda}\text{Proy}_C\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(\nabla u^m + \lambda p^m) - \frac{1}{\lambda}\text{Proy}_C\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right). \end{aligned}$$

El algoritmo $A2$ será, por tanto,

$$\begin{cases} -(1+\omega)\triangle u^m = f + \text{div } p^m \\ p^{m+1} = p^m + \frac{1}{\lambda}\nabla u^m - \frac{1}{\lambda}\text{Proy}_C\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right). \end{cases}$$

**Aplicación al fluido Bingham.**

De manera similar tendremos:

$$\begin{cases} -(\nu+\omega)\triangle u^m = f + \text{div } p^m \\ p^{m+1} = \frac{1}{1-\lambda\omega}\text{Proy}_C\left(p^m + \frac{\nabla u^m}{\lambda}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

**Aplicación al problema de Stokes.**

En este caso, $Bv = -\text{div } v$ y $B^*q = \nabla q$. La segunda ecuación del algoritmo será, por lo tanto,

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= \frac{1}{1-\lambda\omega}(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{-\text{div } u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(-\text{div } u^m + \lambda p^m) = \\ &= \frac{1}{1-\lambda\omega}\frac{1-\lambda\omega}{\lambda}\frac{-\text{div } u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega} - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(-\text{div } u^m + \lambda p^m) = \\ &= p^m - \frac{1}{\lambda}\text{div } u^m. \end{aligned}$$

Si escribimos $\rho = 1/\lambda$, el algoritmo queda:

$$\begin{cases} -\nu\triangle u^m + \omega\nabla(\text{div } u^m) = f - \nabla p^m \\ p^{m+1} = p^m - \rho\text{div } u^m. \end{cases}$$

Este algoritmo es el correspondiente el método de *lagrangiano aumentado* para el problema de Stokes.

**Aplicación al flujo lineal en medio poroso.**

Recordemos el problema:

$$\begin{cases} B^*p = f \\ p = \partial\varphi(Bu) \end{cases}$$

donde $Bv = \nabla v$ y $B^*q = -\text{div } q$. Observemos que la función

$$\varphi(q) = \frac{1}{s}\int_\Omega |q(x)|^s dx$$

es diferenciable.

La forma modificada apta para inducir el algoritmo $A2$ será:

$$\begin{cases} -\omega\triangle u = f + \text{div } p \\ p = G_\lambda^\omega(\nabla u + \lambda p) \end{cases}$$

donde

$$G_\lambda^\omega(q) = \frac{1}{1-\lambda\omega}\,(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{q}{1-\lambda\omega}-\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}q.$$

El algoritmo será:

$$\begin{cases} -\omega\triangle u^m = f + \text{div } p^m \\ p^{m+1} = \frac{1}{1-\lambda\omega}\frac{1-\lambda\omega}{\lambda}\left(I - J^{\partial\varphi}_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\right)\left(\frac{\nabla u^m+\lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

Hagamos

$$z^m = J^{\partial\varphi}_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right)$$

es decir, $z^m$ es solución de:

$$(I + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}\varphi')z^m = \frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}.$$

El algoritmo será:

$$\begin{cases} -\omega\triangle u^m = f + \text{div } p^m \\ z^m + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}|z^m|^{s-2}z^m = \frac{\nabla u^m+\lambda p^m}{1-\lambda\omega} \\ p^{m+1} = p^m + \frac{1}{\lambda}(\nabla u^m - z^m). \end{cases}$$

Los pasos segundo y tercero pueden resolverse localmente. En concreto, para resolver el segundo aplicamos en cada punto de integración el método de Newton a la ecuación escalar:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}|z^m|^{s-2}\right)|z^m| = |\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}|$$

(donde $|\cdot|$ es la norma euclídea en $\Re^d$) y, una vez tenemos $|z^m|$, calculamos $z^m$:

$$z^m = \frac{\frac{\nabla u^m+\lambda p^m}{1-\lambda\omega}}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}|z^m|^{s-2}}.$$

Este es un algoritmo próximo al de lagrangiano aumentado utilizado por Ferragut y Elorza.

### 2.3.5. Relación con el método de direcciones alternadas.

Sean $A$ y $B$ dos operadores maximales monótonos. Consideremos la ecuación multívoca:

$$Au + Bu \ni 0. \tag{2.11}$$

Si $A$ es unívoco, el problema se puede poner de la forma:

$$\begin{cases} Au + p = 0 \\ p \in Bu. \end{cases}$$

Y podemos aplicar el algoritmo $A2$:

$$Au^m + \omega u^m + p^m = 0p^{m+1} = \frac{1}{1-\lambda\omega}B_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(u^m + \lambda p^m).$$

En particular, si $\omega = \frac{1}{2\lambda}$ y haciendo el cambio de variable,

$$p^m = -\frac{v^m}{2\lambda}$$

el algoritmo queda:

$$\begin{cases} Au^m + \frac{u^m - v^m}{2\lambda} = 0 \\ -\frac{1}{2\lambda}v^{m+1} = 2B_{2\lambda}\left(\frac{u^m - v^m/2}{1/2}\right) - \frac{1}{\lambda}(u^m - \frac{v^m}{2}). \end{cases}$$

De la primera ecuación podemos despejar:

$$u^m = (I + 2\lambda A)^{-1} v^m = J^A_{2\lambda} v^m$$

y de la segunda,

$$\begin{aligned} v^{m+1} &= (2u^m - v^m) - 4\lambda \left( \frac{I - J^A_{2\lambda}}{2\lambda} \right) (2u^m - v^m) = \\ &= (2J^A_{2\lambda} - I)v^m - 2(I - J^B_{2\lambda})(2J^A_{2\lambda} - I)v^m = \\ &= (I - 2I + 2J^B_{2\lambda})(2J^A_{2\lambda} - I)v^m = \\ &= (2J^B_{2\lambda} - I)(2J^A_{2\lambda} - I)v^m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A2$ puede escribirse como:

$$\begin{cases} v^{m+1} = (2J^B_{2\lambda} - I)(2J^A_{2\lambda} - I)v^m \\ u^{m+1} = J^A_{2\lambda} v^{m+1}. \end{cases}$$

Vamos a interpretar este algoritmo como un algoritmo de direcciones alternadas. Sea la ecuación multívoca (2.11), que podemos considerar comoel límite estacionario de la ecuación de evolución:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \ni 0.$$

El método de direcciones alternadas de Peaceman - Rachford será, formalmente:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\lambda} + Au^n + Bu^{n+1/2} \ni 0 & \begin{cases} \text{(explícito en } A) \\ \text{(implícito en } B) \end{cases} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\lambda} + Au^{n+1} + Bu^{n+1/2} \ni 0 & \begin{cases} \text{(explícito en } B) \\ \text{(implícito en } A) \end{cases} \end{cases}$$

Estas ecuaciones son equivalentes, respectivamente, a:

$$\begin{cases} u^{n+1/2} \in (I + \lambda B)^{-1}(I - \lambda A)u^n \\ u^{n+1} \in (I + \lambda A)^{-1}(I - \lambda B)u^{n+1/2} \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u^{n+1} &\in (I + \lambda A)^{-1}(I - \lambda B)(I + \lambda B)^{-1}(I - \lambda A)u^n \\ &= J^A_\lambda (I - \lambda B) J^B_\lambda (I - \lambda A) u^n. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Si $A$ o $B$ son multívocos, la expresión anterior no es utilizable; vamos a modificarla de forma que tenga sentido en el caso de operadores multívocos (habrá equivalencia en el caso $A$ y $B$ unívocos). Si $A$ y $B$ fueran unívocos, tendríamos:

$$\begin{cases} (I + \lambda B)J^B_\lambda = I \quad \text{con} \quad J^B_\lambda = (I + \lambda B)^{-1} \\ (I + \lambda A)J^A_\lambda = I \quad \text{con} \quad J^A_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}. \end{cases}$$

Si hacemos el cambio de variable $u^n = J^A_\lambda v^n$, la ecuación (2.12) queda:

$$J^A_\lambda v^{n+1} = J^A_\lambda (I - \lambda B) J^B_\lambda (I - \lambda A) J^A_\lambda v^n.$$

Tomaremos, pues, como algoritmo:

$$v^{n+1} = (I - \lambda B) J^B_\lambda (I - \lambda A) J^A_\lambda v^n.$$

Veamos ahora que, si $A$ es unívoco,

$$\begin{aligned} 2J^A_\lambda - I &= 2J^A_\lambda - (I + \lambda A)J^A_\lambda = \\ &= (2I - I - \lambda A)J^A_\lambda = (I - \lambda A)J^A_\lambda \end{aligned}$$

luego, asumiendo la misma condición para $B$,

$$\begin{cases} (I-\lambda A)J_\lambda^A = 2J_\lambda^A - I \\ (I-\lambda B)J_\lambda^B = 2J_\lambda^B - I \end{cases}$$

de modo que el algoritmo resultante será:

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= (I-\lambda B)J_\lambda^B(I-\lambda A)J_\lambda^A v^n = \\ &= (2J_\lambda^B - I)(2J_\lambda^A - I)v^n \\ u^{n+1} &= J_\lambda^A v^{n+1} \end{aligned}$$

que coincide con $A2$, cambiando $\lambda$ por $2\lambda$.

### 2.3.6. Un algoritmo de penalti-dualidad (A3).

Recordemos el problema general de partida

$$\begin{cases} Au + B^*p = f \\ p \in (\partial\varphi)(Bu) \end{cases}$$

que se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} Au + B^*p = f \\ p = (\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) \end{cases}$$

o, también,

$$\begin{cases} Au + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) = f \\ p = (\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p). \end{cases}$$

Ello sugiere el siguiente algoritmo ($A3$):

- $p^0$ inicial, arbitrario
- obtenido $p^m$, calculamos $u^m$ y $p^{m+1}$ como solución de:

$$\begin{cases} Au^m + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu^m + \lambda p^m) = f \\ p^{m+1} = (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

**Nota 10** Si elegimos $p^0 = 0$, entonces $u^0$ es solución de:

$$Au^0 + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu^0) = f.$$

Es decir, tendremos $\|u - u^0\| = O(\sqrt{\lambda})$ en la primera iteración, pues $u^0$ es la solución del problema penalizado. La dificultad estriba en que la primera ecuación a resolver es (en general) no lineal, y habrá que plantear un método iterativo de resolución. ■

**Teorema 20** Si $\alpha > 0$, o bien, si $\beta > 0$ y $B^*B$ es un isomorfismo, entonces:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|u - u^m\|^2}{\lambda} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Caso $\alpha > 0$.

   Por ser $(\partial\varphi)_\lambda$ un operador lipschitciano de constante $\frac{1}{\lambda}$ (cf. Teorema 10), tendremos:

$$|(\partial\varphi)_\lambda(v_1) - (\partial\varphi)_\lambda(v_2)|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left((\partial\varphi)_\lambda(v_1) - (\partial\varphi)_\lambda(v_2), v_1 - v_2\right).$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} p &= (\partial\varphi)_\lambda(Bu+\lambda p) \\ p^{m+1} &= (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m+\lambda p^m). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|p-p^{m+1}|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left(p-p^{m+1}, (Bu+\lambda p)-(Bu^m+\lambda p^m)\right). \tag{2.13}$$

Por otra parte, comparando las ecuaciones del problema y del algoritmo,

$$\begin{aligned} Au+B^*p &= f \\ Au^m+B^*p^{m+1} &= f. \end{aligned}$$

Restando y multiplicando por $(u-u^m)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} A(u-u^m)+B^*(p-p^{m+1}) &= 0 \\ (A(u-u^m), u-u^m)+(p-p^{m+1}, B(u-u^m)) &= 0 \\ \alpha\|u-u^m\|^2+(p-p^{m+1}, B(u-u^m)) &\leq 0 \\ (p-p^{m+1}, B(u-u^m)) &\leq -\alpha\|u-u^m\|^2. \end{aligned}$$

Entrando con esta última ecuación en (2.13),

$$\begin{aligned} |p-p^{m+1}|^2 &\leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2+(p-p^{m+1}, p-p^m) \leq \\ &\leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2+\frac{1}{2}|p-p^{m+1}|^2+\frac{1}{2}|p-p^m|^2 \\ |p-p^m|^2-|p-p^{m+1}|^2 &\geq \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2. \end{aligned}$$

de donde,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\|u-u^m\|^2}{\lambda}=0.$$

2. Caso $\beta>0, B^*B$ isomorfismo. Daremos las líneas generales de la demostración.

   En las ecuaciones del problema y del algoritmo, tenemos:

$$\begin{cases} (\partial\varphi)_\lambda(Bu+\lambda p) = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)(Bu+\lambda p) \\ (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m+\lambda p^m) = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)(Bu^m+\lambda p^m) \end{cases}$$

   Utilizando la técnica habitual, obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} |p-p^{m+1}|^2 \leq &-\frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2-\frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2+ \\ &+|(p-p^m)-\frac{1}{\lambda}(J_\lambda(Bu+\lambda p)-J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m))|^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

   Puesto que $\partial\varphi$ es M($\omega$)-maximal, alplicando la Propiedad 30 tendremos:

$$\begin{aligned} |p-p^m-\frac{1}{\lambda}(J_\lambda(Bu+\lambda p)-J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2+ \\ +|p-p^m|^2-\frac{2\beta}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p)-J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2 \end{aligned}$$

de donde, entrando en (2.14),

$$\begin{aligned}|p-p^{m+1}|^2 &\leq -\frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 - \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 + \\ &+ |p-p^m|^2 - \frac{2\beta}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2 \\ |p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2 &\geq \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 + \frac{2\beta}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} |p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2 = 0.$$

Además, si $\beta > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2}{\lambda} = 0.$$

De (2.14) deducimos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|B(u-u^m)|^2 \leq \lambda\left(|p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2\right) + \\ + 2|p-p^m||J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)| + \\ + \frac{1}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2.\end{aligned}$$

Pasando al límite,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|B(u-u^m)|^2}{\lambda} = 0$$

y, si $B^*B$ es un isomorfismo,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|u-u^m)\|^2}{\lambda} = 0.$$

■

En cada iteración del algoritmo $A3$ hay que resolver un problema en general no lineal, de la forma:

$$Au + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu+\lambda p) = f$$

que se puede resolver aplicando, por ejemplo:

- los algoritmos $A1$ o $A2$; así, el algoritmo $A1$ sería:

$$\begin{cases} Au_i = f - B^*w_i \\ w_{i+1} = (\partial\varphi)_{\lambda+\mu}(Bu_i + \lambda p + \mu w_i), \quad \mu > 0 \end{cases}$$

- o bien, teniendo en cuenta que tenemos:

$$Au + B^*\left(\frac{I-J_\lambda}{\lambda}\right)(Bu+\lambda p) = f$$

$$Au + \frac{1}{\lambda}B^*Bu = f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu+\lambda p)$$

el algoritmo correspondiente será:

$$Au_{i+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu_{i+1} = f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu_i+\lambda p).$$

Estudiemos la convergencia: restando las dos últimas expresiones,

$$
\begin{aligned}
Au + \frac{1}{\lambda}B^*Bu &= f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu + \lambda p) \\
Au_{i+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu_{i+1} &= f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu_i + \lambda p) \\
A(u - u_{i+1}) + \frac{1}{\lambda}B^*B(u - u_{i+1}) &= \frac{1}{\lambda}B^*(J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p))
\end{aligned}
$$

y, multiplicando por $(u - u_{i+1})$,

$$
\begin{aligned}
(A(u - u_{i+1}), u - u_{i+1}) &+ \frac{1}{\lambda}(B^*B(u - u_{i+1}), u - u_{i+1}) = \\
&= \frac{1}{\lambda}(B^*(J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p)), u - u_{i+1}) \\
(A(u - u_{i+1}), u - u_{i+1}) &+ \frac{1}{\lambda}(B(u - u_{i+1}), B(u - u_{i+1})) = \\
&= \frac{1}{\lambda}((J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p)), B(u - u_{i+1}))
\end{aligned}
$$

y, por ser $A$ un operador coercivo,

$$
\begin{aligned}
\alpha\|u - u_{i+1}\|^2 &+ \frac{1}{\lambda}|B(u - u_{i+1})|^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{\lambda}((J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p)), B(u - u_{i+1})).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, $J_\lambda$ es lipschitciano de constante $\frac{1}{1+\lambda\beta}$:

$$
\begin{aligned}
\alpha\|u - u_{i+1}\|^2 + \frac{1}{\lambda}|B(u - u_{i+1})|^2 &\leq \frac{1}{\lambda(1 + \lambda\beta)}(B(u - u_i), B(u - u_{i+1})) \leq \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} \qquad &\leq \frac{1}{\lambda(1 + \lambda\beta)}|B(u - u_i)| \cdot |B(u - u_{i+1})| = \\
&= \frac{1}{\lambda}\left[|B(u - u_{i+1})| \cdot \frac{1}{1 + \lambda\beta}|B(u - u_i)|\right] \leq \\
\text{(cf. Nota 7 con } \varepsilon = \sqrt{\lambda}) \qquad &\leq \frac{1}{\lambda}\left[\ \frac{1}{2}|B(u - u_{i+1})|^2 + \frac{1}{2(1 + \lambda\beta)^2}|B(u - u_i)|^2\ \right]
\end{aligned}
$$

de donde,

$$
\alpha\|u - u_{i+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\lambda}|B(u - u_{i+1})|^2 - \frac{1}{\lambda}|B(u - u_{i+1})|^2 + \frac{1}{2\lambda(1 + \lambda\beta)^2}|B(u - u_i)|^2.
$$

Separando en fracciones sencillas el siguiente término:

$$
\frac{1}{2\lambda(1 + \lambda\beta)^2} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{\beta(2 + \lambda\beta)}{2(1 + \lambda\beta)^2}
$$

obtenemos:

$$
\alpha\|u - u_{i+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\lambda}\left(|B(u - u_i)|^2 - |B(u - u_{i+1})|^2\right) - \frac{\beta(2 + \lambda\beta)}{2(1 + \lambda\beta)^2}|B(u - u_i)|^2
$$

donde sabemos que:

$$
-\frac{\beta(2 + \lambda\beta)}{2(1 + \lambda\beta)^2}|B(u - u_i)|^2 \leq 0.
$$

En consecuencia,

$$
\lim_{i\to\infty}\|u - u_i\| = 0.
$$

En cambio, si $\alpha = 0$, pero $\beta > 0$, tenemos:

$$\frac{\beta(2+\lambda\beta)}{2(1+\lambda\beta)^2}|B(u-u_i)|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left(|B(u-u_i)|^2 - |B(u-u_{i+1})|^2\right)$$

de donde $\lim_{i\to\infty} |B(u-u_i)| = 0$ y, si $B^*B$ es un isomorfismo,

$$\lim_{i\to\infty} \|u-u_i\| = 0.$$

**Una modificación.**

Si nos limitamos a una sola iteración en el algoritmo interno, el algoritmo completo quedará:
Dados $u^m, p^m$, hallamos $u^{m+1}, p^{m+1}$ como solución de:

$$\begin{cases} Au^{m+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu^{m+1} = f - B^*p^m + \frac{1}{\lambda}z^m \\ p^{m+1} = (\partial\varphi)_\lambda(Bu^{m+1} + \lambda p^m) \end{cases}$$

donde $z^m = J_\lambda(Bu^m + \lambda p^m)$. Este algoritmo puede ser modificado formalmente de la manera siguiente:

- sean $p^0, z^0$ arbitrarios
- calculamos $u^{m+1}$ como solución de:

$$Au^{m+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu^{m+1} = f - B^*(p^m - \frac{1}{\lambda}z^m)$$

- calculamos $z^{m+1}$ como solución de:

$$z^{m+1} + \lambda(\partial\varphi)z^{m+1} \ni Bu^{m+1} + \lambda p^m$$

  (donde hemos sustituido $p^{m+1}$, desconocido, por $p^m$)

- calculamos finalmente $p^{m+1}$:

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= (\partial\varphi)_\lambda(Bu^{m+1} + \lambda p^m) = \\ &= \frac{I - J_\lambda}{\lambda}(Bu^{m+1} + \lambda p^m) = \\ &= p^m + \frac{1}{\lambda}Bu^{m+1} - \frac{1}{\lambda}J_\lambda(Bu^{m+1} + \lambda p^m). \end{aligned}$$

**Aplicación al problema de flujo no lineal.**

En este caso, tenemos:

- $A = 0$
- $B = \nabla, \quad B^* = -\mathrm{div} \implies B^*B = -\triangle$
- $(\partial\varphi)_\lambda(z) = \varphi'(z) = |z|^{s-2}z.$

El algoritmo queda de la forma:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\triangle u_{m+1} = f + \mathrm{div}\,(p_m - \frac{1}{\lambda}z_m) \\ z_{m+1} + \lambda|z_{m+1}|^{s-2}z_{m+1} = \nabla u_{m+1} + \lambda p_m \\ p_{m+1} = p_m + \frac{1}{\lambda}(\nabla u_{m+1} - z_{m+1}) \end{cases}$$

que es el algoritmo de lagrangiano aumentado utilizado por Ferragut - Elorza.

**Aplicación al problema de la elastoplasticidad.**

Recordemos las principales ecuaciones planteadas en la sección 2.2.8 (suponemos $g_i = 0$, por simplificar):

$$(\sigma(u), \varepsilon(u)) = (f, w), \quad \forall w \in V$$
$$a(\dot{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(\dot{u}), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in H.$$

**Discretización espacial y temporal**: resolviendo paso a paso,

$$\begin{cases} (\sigma^{n+1}, \varepsilon(w)) = (f^{n+1}, w), \quad \forall w \in V_h \\ a(\frac{\sigma^{n+1}-\sigma^n}{\Delta t}, \tau - \sigma^{n+1}) - (\varepsilon(v^{n+1}), \tau - \sigma^{n+1}) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h \end{cases}$$

donde:

- $V_h = \{w \in V \quad / \quad w|_T \in (P_1(T))^3, T \in T_h\}$
- $H_h = \{\hat{\tau} \in H \quad / \quad \hat{\tau}|_T \in (P_0(T))^9, T \in T_h\}$
- $K_h = K \cap H_h$.

En cada paso de tiempo hay que resolver, por lo tanto, un problema del tipo:
Dado $\tilde{\sigma}$, hallar $\sigma$ tal que:

$$\begin{cases} (\sigma, \varepsilon(w)) = (f, w), \quad \forall w \in V_h \\ \frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h \end{cases} \tag{2.15}$$

Este problema puede ser resuelto, por ejemplo, mediante el algoritmo de Uzawa (en realidad, es el algoritmo $A1$):

- obtenido $v_i$, calculamos $\sigma_{i+1}$ como solución de:

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i), \tau - \sigma_{i+1}) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h \tag{2.16}$$

- a continuación, calculamos $v_{i+1}$ como solución de:

$$(\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i), \varepsilon(w)) + \rho((f, w) - (\sigma_{i+1}, \varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h. \tag{2.17}$$

**Nota 11**

- El tensor de velocidad de deformación juega aquí el papel de multiplicador de Lagrange.
- El operador auxiliar se puede elegir de otra forma, por ejemplo, $(A^{-1}\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w))$, que es el operador asociado a la elasticidad lineal.
- El primer paso es un problema no lineal pero desacoplado; en cada punto de integración tenemos un problema lineal de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.

**Convergencia del algoritmo**: Tomemos $\tau = \sigma_{i+1}$ en la segunda ecuación de (2.15) y $\tau = \sigma$ en (2.16):

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma_{i+1} - \sigma) - (\varepsilon(v), \sigma_{i+1} - \sigma) \geq 0$$
$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \tilde{\sigma}, \sigma - \sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i), \sigma - \sigma_{i+1}) \geq 0.$$

Restando la primera ecuación de la segunda, obtenemos:

$$a(\sigma_{i+1} - \sigma, \sigma - \sigma_{i+1}) - \Delta t(\varepsilon(v_i) - \varepsilon(v), \sigma - \sigma_{i+1}) \geq 0 \tag{2.18}$$

Por otra parte, utilizando ahora la primera ecuación de (2.15) y entrando en (2.17):

$$\begin{aligned}(\varepsilon(v_{i+1}),\varepsilon(w)) &= (\varepsilon(v_i),\varepsilon(w)) + \rho[(\sigma,\varepsilon(w)) - (\sigma_{i+1},\varepsilon(w))] = \\ &= (\varepsilon(v_i),\varepsilon(w)) + \rho(\sigma-\sigma_{i+1},\varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h\end{aligned}$$

o bien,

$$(\varepsilon(v_{i+1}-v),\varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i-v),\varepsilon(w)) + \rho(\sigma-\sigma_{i+1},\varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h$$

Tomando $w = v_{i+1} - v$:

$$(\varepsilon(v_{i+1}-v),\varepsilon(v_{i+1}-v)) = (\varepsilon(v_i-v),\varepsilon(v_{i+1}-v)) + \rho(\sigma-\sigma_{i+1},\varepsilon(v_{i+1}-v))$$

de donde,

$$\|\varepsilon(v_{i+1}-v)\|^2 \le \|\varepsilon(v_{i+1}-v)\| \cdot \|\varepsilon(v_i-v)+\rho(\sigma-\sigma_i)\|.$$

Dividiendo por $\|\varepsilon(v_{i+1}-v)\|$, y elevando la inecuación resultante al cuadrado,

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(v_{i+1}-v)\|^2 &\le \|\varepsilon(v_i-v)+\rho(\sigma-\sigma_i)\|^2 \le \\ &\le \|\varepsilon(v_i-v)\|^2 + 2\rho(\varepsilon(v_i-v),\sigma-\sigma_{i+1}) + \rho^2\|\sigma-\sigma_{i+1}\|^2.\end{aligned}$$

Utilizando (2.18), tenemos:

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(v_i-v)\|^2 - \|\varepsilon(v_{i+1}-v)\|^2 &\ge -2\rho\,(\varepsilon(v_i-v),\sigma-\sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma-\sigma_{i+1}\|^2 \ge \\ &\ge -\frac{2\rho}{\Delta t}a(\sigma_{i+1}-\sigma,\sigma-\sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma-\sigma_{i+1}\|^2 = \\ &= \frac{2\rho}{\Delta t}a(\sigma_{i+1}-\sigma,\sigma_{i+1}-\sigma) - \rho^2\|\sigma_{i+1}-\sigma\|^2 \ge \\ &\ge \frac{2\rho}{\Delta t}\mu\|\sigma_{i+1}-\sigma\|^2 - \rho^2\|\sigma_{i+1}-\sigma\|^2 = \\ &= \left(\frac{2}{\Delta t}-\rho\right)\rho\|\sigma_{i+1}-\sigma\|^2.\end{aligned}$$

Luego, para un adecuado valor de $\rho$:

$$\lim_{i\to\infty}\|\sigma_{i+1}-\sigma\| = 0.$$

**Resolución del problema en cada paso de tiempo**. Dado $\tilde{\sigma}$, hallar $\sigma \in K_h$ tal que:

$$\frac{1}{\Delta t}a(\sigma-\tilde{\sigma},\tau-\sigma) - (\varepsilon(v),\tau-\sigma) \ge 0, \qquad \forall \tau \in K_h \tag{2.19}$$

$$(\sigma,\varepsilon(w)) = (f,w), \qquad \forall w \in V_h. \tag{2.20}$$

Podemos aquí utilizar el algoritmo de Uzawa (es el algoritmo $A1$ adaptado):

- Sea $v_0$ arbitrario
- Obtenido $v_i$, calculamos $\{\sigma_{i+1}, v_{i+1}\}$ resolviendo:

$$\frac{1}{\Delta t}a(\sigma_{i+1}-\tilde{\sigma},\tau-\sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i),\tau-\sigma_{i+1}) \ge 0, \quad \forall \tau \in K_h \tag{2.21}$$

$$(\varepsilon(v_{i+1}),\varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i),\varepsilon(w)) + \rho[(f,w) - (\sigma_{i+1},\varepsilon(w))], \quad \forall w \in V_h. \tag{2.22}$$

(2.21) es un problema local de 6 ecuaciones con 6 incógnitas en cada punto de integración.

**Nota 12**

- El operador auxiliar $(\varepsilon(v), \varepsilon(w))$ puede ser sustituido por $(A^{-1}\varepsilon(v), \varepsilon(w))$; resolvemos así un problema de elasticidad lineal en cada iteración. $\varepsilon(v)$ juega el papel de multiplicador de Lagrange.

- Para resolver la primera ecuación, nos trasladamos al caso:

$$a(\sigma, \tau - \sigma) - (\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0 \tag{2.23}$$

introduciendo, por ejemplo, un campo $\tilde{v}$ tal que $A\tilde{\sigma} = \tilde{v}$. La resolución de (2.23) es entonces una proyección respecto al producto escalar $a(\sigma, \tau)$ de $A^{-1}\varepsilon(v)$:

$$\sigma = \text{Proy}_{K_h} A^{-1}\varepsilon(v). \qquad \blacksquare$$

**Estudio de la convergencia**. Tomemos $\tau = \sigma_{i+1}$ en (2.19) y $\tau = \sigma$ en (2.21):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma_{i+1} - \sigma) - (\varepsilon(v), \sigma_{i+1} - \sigma) \geq 0 \\
\frac{1}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \tilde{\sigma}, \sigma - \sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i), \sigma - \sigma_{i+1}) \geq 0.
\end{aligned}$$

Sumando y transformando convenientemente la inecuación,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \sigma_{i+1}, \sigma_{i+1} - \sigma) - (\varepsilon(v) - \varepsilon(v_i), \sigma_{i+1} - \sigma) \geq 0 \\
\Longrightarrow\ &\frac{2\rho}{\Delta t} a(\sigma - \sigma_{i+1}, \sigma - \sigma_{i+1}) \leq 2\rho(\varepsilon(v) - \varepsilon(v_i), \sigma - \sigma_{i+1}).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Por otra parte, multiplicando (2.20) por $\rho$ y entrando en (2.22),

$$\begin{aligned}
(\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w)) &= (\varepsilon(v_i), \varepsilon(w)) + \rho[(\sigma, \varepsilon(w)) - (\sigma_{i+1}, \varepsilon(w))], \quad \forall w \in V_h \\
(\varepsilon(v_{i+1} - v), \varepsilon(w)) &= (\varepsilon(v_i - v), \varepsilon(w)) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}, \varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h
\end{aligned}$$

Haciendo $w = v_{i+1} - v$,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &= (\varepsilon(v_i - v), \varepsilon(v_{i+1} - v)) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}, \varepsilon(v_{i+1} - v)) = \\
&= (\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}), \varepsilon(v_{i+1} - v)) \leq \\
&\leq \|\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1})\| \cdot \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|.
\end{aligned}$$

Simplificando la desigualdad, y elevando la resultante al cuadrado,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &\leq \|\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1})\|^2 \leq \\
&\leq \|\varepsilon(v_i - v)\|^2 + 2\rho(\varepsilon(v_i - v), \sigma - \sigma_{i+1}) + \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(v_i - v)\|^2 - \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &\geq -2\rho(\varepsilon(v_i - v), \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 = \\
&= 2\rho(\varepsilon(v - v_i), \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 \geq \\
\text{gracias a (2.24)} \ &\geq \frac{2\rho}{\Delta t} a(\sigma - \sigma_{i+1}, \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 \geq \\
&\geq \frac{2\rho\mu}{\Delta t}\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 = \\
&= \left(\frac{2\mu}{\Delta t} - \rho\right)\rho\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2.
\end{aligned}$$

Eligiendo $0 < \rho < \frac{2\mu}{\Delta t}$, tendremos:

$$\lim_{i \to \infty} \|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 = 0.$$

**Resolución del problema**:

$$\frac{1}{\Delta t}a(\sigma-\tilde{\sigma},\tau-\sigma)-(\varepsilon(v),\tau-\sigma)\geq 0,\quad \forall\tau\in K_h.$$

Introduciendo el operador $A^{-1}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}a(\sigma-\tilde{\sigma},\tau-\sigma)-a(A^{-1}\varepsilon(v),\tau-\sigma)\geq 0,&\quad \forall\tau\in K_h\\ a(\sigma-\tilde{\sigma},\tau-\sigma)-a(\Delta tA^{-1}\varepsilon(v),\tau-\sigma)\geq 0,&\quad \forall\tau\in K_h\\ a((\tilde{\sigma}+\Delta tA^{-1}\varepsilon(v))-\sigma,\tau-\sigma)\leq 0,&\quad \forall\tau\in K_h\end{aligned}$$

luego

$$\sigma=\mathrm{Proy}_{K_h}(\tilde{\sigma}+\Delta tA^{-1}\varepsilon(v))$$

donde la proyección se toma en el sentido del producto escalar $a(\cdot,\cdot)$, y se puede calcular explícitamente en el caso del criterio de Von Mises; poniendo $\tilde{\sigma}=A^{-1}e$,

$$\begin{aligned}\sigma&=\mathrm{Proy}_{K_h}(A^{-1}(e+\Delta t\varepsilon(v)))=\\ &=\mathrm{Proy}_{K_h}(A^{-1}\Sigma)=\\ &=K_0\Sigma_{kk}\delta_{ij}+\inf\left(2\mu,\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\Sigma_{ij}^D\Sigma_{ij}^D}}\right)\Sigma_{ij}^D.\end{aligned}$$

### 2.3.7. Reformulación del problema de la elastoplasticidad. Generalización: viscoplasticidad.

La ley de comportamiento:

$$a(\dot{\sigma},\tau-\sigma)-(\varepsilon(\dot{u}),\tau-\sigma)\geq 0,\quad \forall\tau\in K$$

o bien

$$(A\dot{\sigma}-\varepsilon(\dot{u}),\tau-\sigma)\geq 0,\quad \forall\tau\in K$$

puede también escribirse como:

$$\varphi(\tau)-\varphi(\sigma)\geq(\varepsilon(\dot{u})-A\dot{\sigma},\tau-\sigma)\geq 0,\quad \forall\tau\in H$$

o también

$$\varepsilon(\dot{u})-A\dot{\sigma}\in\partial\varphi(\sigma)$$

donde $\varphi=I_K$ es la función indicatriz de $K$. Considerando distintas funciones $\varphi$, tenemos un modelo general de elastoplasticidad. En particular, tomando:

$$\partial\varphi=(\partial I_K)_\lambda=\partial(I_K)_\lambda$$

tenemos un modelo de viscoplasticidad.

Para reescribir el problema completo, introduzcamos:

$$\begin{aligned}S&=\{\tau=(\tau_{ij})\in H\quad/\quad\int_\Omega\tau_{ij}\varepsilon_{ij}(w)=\int_\Omega f_iw_i+\int_{\Gamma_1}g_iw_i,\quad\forall w\in V\}\\ S^{(0)}&=\{\tau=(\tau_{ij})\in H\quad/\quad\int_\Omega\tau_{ij}\varepsilon_{ij}(w)=0,\quad\forall w\in V\}.\end{aligned}$$

El problema general de la viscoplasticidad se puede formular:

Hallar $\sigma \in S$ tal que:

$$\varepsilon(\dot{u}) - A\dot{\sigma} \in \partial\varphi(\sigma)$$

o, de forma equivalente,

Hallar $\sigma \in S$ tal que:

$$\varphi(\tau) - \varphi(\sigma) \geq (\varepsilon(\dot{u}) - A\dot{\sigma}, \tau - \sigma), \quad \forall \tau \in H.$$

En particular, $\forall \tau \in S$ tendremos:

$$(\tau - \sigma, \varepsilon(\dot{u})) = \int_\Omega (\tau_{ij} - \sigma_{ij})\varepsilon_{ij}(\dot{u}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau - \sigma \in S^{(0)}$$

luego

$$\varphi(\tau) - \varphi(\sigma) \geq (-A\dot{\sigma}, \tau - \sigma), \quad \forall \tau \in S.$$

Este problema puede también escribirse, introduciendo $I_S$ (función indicatriz de $S$):

$$I_S(\tau) + \varphi(\tau) - I_S(\sigma) - \varphi(\sigma) \geq (-A\dot{\sigma}, \tau - \sigma), \quad \forall \tau \in S, \quad \sigma \in S$$

o bien,

$$-A\dot{\sigma} \in \partial(I_S + \varphi)(\sigma)$$

y, debido a las propiedades de continuidad de $I_S$ (es continua en el interior de su dominio efectivo),

$$\begin{aligned} \partial(I_S + \varphi) &= \partial I_S + \partial\varphi \\ \Longrightarrow &- A\dot{\sigma} \in \partial I_S(\sigma) + \partial\varphi(\sigma) \\ \Longrightarrow &A\dot{\sigma} + \partial I_S(\sigma) + \partial\varphi(\sigma) \ni 0 \end{aligned}$$

es decir, una ecuación del tipo: $S\dot{u} + Au + Bu \ni 0$.

Encontremos una interpretación del valor obtenido en cada iteraci'on de los algoritmos diseñados para resolver el problema estacionario $Au + Bu \ni 0$. Volviendo, pues, a la formulaci'on inicial, y haciendo en ella $\dot{\sigma} = 0$, el problema es:

Hallar $\{\sigma, u\}$ tales que:

$$\begin{cases} \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(w) = \int_\Omega f_i w_i + \int_{\Gamma_1} g_i w_i, \quad \forall w \\ \varepsilon(\dot{u}) \in \partial\varphi(\sigma). \end{cases}$$

Si escribimos $\langle G, w\rangle = \int_\Omega fw + \int_{\Gamma_1} gw$, el problema se puede formular:

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \varepsilon(w)\rangle &= \langle G, w\rangle \\ \langle \varepsilon^t\sigma, w\rangle &= \langle G, w\rangle = \langle \partial G(\dot{u}), w\rangle \end{aligned}$$

luego

$$\begin{cases} \varepsilon^t\sigma = \partial G(\dot{u}) \\ \sigma \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) \qquad (F = \varphi^*) \end{cases}$$

Supongamos, por simplificar, $g = 0$. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(w) - \int_\Omega f_i w_i = 0 \\ \sigma \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) \end{cases}$$

Podemos transformar la segunda ecuación en:

$$\begin{aligned} \sigma - \omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) - \omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) &= \\ = G^\omega(\varepsilon(\dot{u})) \end{aligned}$$

mientras que la primera ecuación es:

$$\varepsilon^*\sigma = L \tag{2.25}$$

donde $L$ es la aplicación tal que: $\langle L, w\rangle = \int_\Omega fw$. De ello se puede deducir:

$$\begin{cases} \varepsilon^*\sigma = L \\ \sigma \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) \end{cases} \implies L \in \varepsilon^*(\partial F(\varepsilon(\dot{u}))).$$

Por lo tanto, (2.25) es equivalente a:

$$\begin{aligned} -\omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) &= -\varepsilon^*\sigma - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) + L \\ L - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) &= \varepsilon^*(\partial F(\varepsilon(\dot{u})) - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u})) \\ L - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) &\in \varepsilon^*(\partial F - \omega a^{-1})(\varepsilon(\dot{u})) \\ &= \varepsilon^* G^\omega(\varepsilon(\dot{u})). \end{aligned}$$

El problema es, por lo tanto,

$$\begin{cases} \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) = L - \varepsilon^*(p) \\ p \in G^\omega(\varepsilon(\dot{u})) = (\partial F - \omega A^{-1})(\varepsilon(\dot{u})) \end{cases}$$

o bien, en forma variacional,

$$\begin{cases} \omega \int_\Omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u})\varepsilon(w) = \int_\Omega f_i w_i - \int_\Omega p_{ij}\varepsilon_{ij}(w) \\ p = (\partial F - \omega A^{-1})_\lambda(\varepsilon(\dot{u}) + \lambda p). \end{cases}$$

Finalmente, el algoritmo de resolución ser'a:

- $p^0$ arbitrario,
- en la iteración $n$, resolver:

$$\begin{cases} \omega \int_\Omega A^{-1}\varepsilon(\overset{n}{\dot{u}})\varepsilon(w) = \int_\Omega f_i w_i - \int_\Omega p^n_{ij}\varepsilon_{ij}(w) \\ p^{n+1} = (\partial F - \omega A^{-1})_\lambda(\varepsilon(\overset{n}{\dot{u}}) + \lambda p^n) \\ \sigma^{n+1} = p^{n+1} + \omega A^{-1}\varepsilon(\overset{n}{\dot{u}}). \end{cases}$$