

# Métodos Numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales

Luis Ferragut Canals  
Mabel Asensio Sevilla

15 de junio de 2021

# Índice general

<b>1. Espacios de Sobolev</b>	<b>7</b>
1.1. Nociones sobre teoría de distribuciones . . . . .	7
1.2. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . . .	9
1.3. El espacio $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	11
1.4. Teorema de la traza . . . . .	19
1.4.1. Caso A . . . . .	19
1.4.2. Caso B . . . . .	23
1.5. Aplicaciones del teorema de la traza . . . . .	26
1.6. Un resultado de compacidad . . . . .	29
1.7. Los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$ . . . . .	29
<b>2. Formulación débil de problemas elípticos</b>	<b>32</b>
2.1. Problemas variacionales abstractos . . . . .	32
2.2. Formulación débil de problema unidimensionales . . . . .	36
2.3. Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador $-\Delta$ . . . . .	41

2.4. Problema de Neumann homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$	44
2.5. Problema de Dirichlet no homogéneo asociado al operador $-\Delta$	47
2.6. Problema de Neumann no homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$	49
2.7. Problema de contorno asociado a un operador elíptico de segundo orden	51
2.8. Un ejemplo sin unicidad . . . . .	57
2.9. Deformación elástica de un sólido . . . . .	61
2.10. Elasticidad plana . . . . .	70
<b>3. Aproximación numérica mediante el Método de Elementos Finitos</b>	<b>73</b>
3.1. Aproximación variacional abstracta . . . . .	73
3.2. El M.E.F. para el problema modelo de dimensión 1 con funciones lineales a trozos	76
3.3. Construcción de espacios de Elementos Finitos . . . . .	79
3.3.1. Generalidades . . . . .	79
3.3.2. Concepto de Elemento Finito . . . . .	81
3.3.3. Elementos Finitos de Lagrange en un $d$ -simplex . . . . .	83
3.3.4. Un método general para construir a partir de un elemento finito $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ toda	
3.3.5. Construcción de subespacios de $H^1$ . . . . .	94
<b>4. Análisis numérico del Método de Elementos Finitos</b>	<b>99</b>
4.1. Resultados generales de aproximación en espacios de Sobolev .	99
4.2. Aplicación al análisis numérico del M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden	111
<b>5. Aspectos prácticos y programación del M.E.F.</b>	<b>114</b>

5.1. Un Método de Elementos Finitos para el problema de Poisson	114
5.2. Cálculo de la matriz del sistema de ecuaciones y del segundo miembro: Un ejemplo	120
5.3. Un método general para el cálculo de matrices y vectores elementales	125
<b>6. El Método Multimalla</b>	<b>129</b>
6.1. Introducción	129
6.2. Definiciones y Algoritmo Multimalla	131
6.2.1. Descripción del problema	131
6.2.2. Descripción del algoritmo multimalla	132
6.2.3. Interpretación Matricial	135
6.3. Análisis numérico del método multimalla	140
6.3.1. Método de dos mallas	141
6.3.2. Convergencia del Método multimalla, ciclo $W$ ( $\gamma = 2$ )	151
6.3.3. Convergencia del Método multimalla, ciclo $V$ ( $\gamma = 1$ )	153
6.4. Complejidad Algorítmica del Método Multimalla	158
6.5. Anexo: Desigualdades de Hölder	164

# Índice de figuras

3.1. Ejemplo de una función $v_h \in V_h$ , 10 subintervalos. . . . .	76
3.2. Ejemplo de una función de la base de $V_h$ , 10 subintervalos. . .	77
3.3. Ejemplo de triangulación . . . . .	80
3.4. triángulo de seis nodos . . . . .	86
3.5. función $p_1$ . . . . .	87
3.6. función $p_2$ . . . . .	87
3.7. función $p_3$ . . . . .	88
3.8. función $p_4$ . . . . .	88
3.9. función $p_5$ . . . . .	89
3.10. función $p_6$ . . . . .	89
5.1. Ejemplo de triangulación . . . . .	116
5.2. Ejemplo de una función base . . . . .	117
5.3. función $\lambda_1$ . . . . .	119
5.4. función $\lambda_2$ . . . . .	119
5.5. función $\lambda_3$ . . . . .	120

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

5.6. Triangulación del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ . . . . .	121
5.7. Curvas de nivel de la función $\varphi_{41}$ . . . . .	122
5.8. Soporte de la función $\varphi_{41}$ . . . . .	122
5.9. Estrella asociada a la ecuación 41 . . . . .	123
6.1. Error inicial $\mathbf{E}^{(0)}$ . . . . .	130
6.2. Error $\mathbf{E}^{(\nu)}$ después $\nu$ iteraciones . . . . .	131
6.3. Funciones de la base de $\mathcal{M}_0$ . . . . .	138
6.4. Funciones de la base de $\mathcal{M}_1$ . . . . .	138
6.5. Gráfica $\kappa^\alpha f(\nu, \alpha)$ vs $\alpha$ después $\nu$ iteraciones . . . . .	147

# Capítulo 1

## Espacios de Sobolev

### 1.1. Nociones sobre teoría de distribuciones

Sea  $\Omega$  un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición:**  $\mathcal{D}(\Omega)$  es el espacio de funciones de clase  $C^\infty(\Omega)$  con soporte compacto en  $\Omega$ .

Utilizaremos la siguiente notación para las derivadas en  $\mathcal{D}(\Omega)$ : si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  es un multientero, con  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ , denotamos

$$\partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

#### Pseudotopología en $\mathcal{D}(\Omega)$

**Definición:** si  $\{\varphi_n\}$  es una sucesión de  $\mathcal{D}(\Omega)$  diremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$  en  $\mathcal{D}(\Omega)$  si:

1. el soporte de  $\varphi_n$  permanece en un compacto fijo  $K$  de  $\Omega \forall n$ ,
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$  se tiene convergencia uniforme, es decir,

$$\sup_{x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{N}^d} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

## 1.1. NOCIONES SOBRE TEORÍA DE DISTRIBUCIONES

---

**Definición:** Se denomina espacio de distribuciones sobre  $\Omega$ ,  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , al dual topológico de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , es decir, el espacio de las formas lineales continuas sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

### Pseudotopología en $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Definición:** si  $\{T_n\}$  es una sucesión de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  diremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si  $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

### **Ejemplos:**

1. Delta de Dirac:

Sea  $a \in \Omega$ , la delta de Dirac en  $a$ ,  $\delta_a$  se define  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

2. Espacio de funciones  $L^2(\Omega)$ :

Recordemos que  $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_{\Omega} f^2 dx < \infty\}$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar  $(f, g)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$  y la correspondiente norma asociada  $\|f\|_{0, \Omega} = (\int_{\Omega} f(x)^2 dx)^{1/2}$ . Además  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$ . A cada  $f \in L^2(\Omega)$  le asociamos la distribución  $T_f$  definida por:  $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . La aplicación  $L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  que asigna a cada función  $f$  la correspondiente distribución asociada  $T_f$  así definida es inyectiva y continua.

### Derivación en el sentido de las distribuciones

**Definición:** Sea  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  una distribución, se define la derivada de  $T$  respecto a  $x_i$  en el sentido de las distribuciones,  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ , como la siguiente distribución:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De manera general, sea  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  una distribución y  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  un multientero, se define:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

### Propiedades:



1. Si  $f \in C^1(\Omega)$ , su derivada clásica coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones, es decir,  $T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial T_f}{\partial x_i}$ .
2. La aplicación  $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  es continua.
3. Una distribución es infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones.
4. La aplicación  $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  es continua  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ .

## 1.2. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$

Sea  $f \in L^2(\Omega)$  que puede ser o no derivable en el sentido clásico, pero entendida como distribución,  $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , podemos derivarla en el sentido de las distribuciones  $\frac{\partial T_f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq d$ . En general, esta distribución no está en  $L^2(\Omega)$ , pero si existe una función  $g \in L^2(\Omega)$  tal que  $T_g = \frac{\partial T_f}{\partial x_i}$  entonces podemos escribir  $g = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$  en el sentido de las distribuciones, cumpliéndose,

$$\int_{\Omega} g\varphi dx = \langle T_g, \varphi \rangle = \langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Definición:** Se llama espacio de Sobolev de orden 1 sobre  $\Omega$  al espacio,

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d\}$$

donde las derivadas son en el sentido de las distribuciones.

Se dota a este espacio del siguiente producto escalar,

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} (uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx,$$

y la correspondiente norma asociada,

$$\|u\|_{1,\Omega} = (u, u)_{1,\Omega}^{1/2} = (\int_{\Omega} u^2 + \sum_{i=1}^d (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx)^{1/2}.$$

## 1.2. EL ESPACIO DE SOBOLEV $H^1(\Omega)$

---

**Teorema:**  $H^1(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con la norma  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ .

Demostración: Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto escalar que es completo para la norma asociada, es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente. Basta pues demostrar que en  $H^1(\Omega)$  toda sucesión de Cauchy es convergente para la norma  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ .

Sea  $\{v_m\}_{m=1}^\infty$  una sucesión de Cauchy en  $H^1(\Omega)$ , por lo tanto,

$$\|v_n - v_m\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} ((v_n - v_m)^2 + \sum_{i=1}^d (\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v_m}{\partial x_i})^2) dx \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$$

lo cual implica,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v_n - v_m)^2 dx &\xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d (\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v_m}{\partial x_i})^2 dx &\xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las sucesiones  $\{v_m\}_{m=1}^\infty$  y  $\{\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\}_{m=1}^\infty$  para  $i = 1, \dots, d$ , entendidas como sucesiones de  $L^2(\Omega)$  son de Cauchy. Como  $L^2(\Omega)$  es un espacio completo, estas sucesiones son convergentes en este espacio, es decir, existen funciones  $v$  y  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , en  $L^2(\Omega)$ , tales que,

$$\begin{aligned} v_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} v, \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_i, \quad 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

Basta demostrar que  $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq d$ , en el sentido de las distribuciones. Puesto que la inclusión canónica de  $L^2(\Omega)$  en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  es continua, la convergencia de las sucesiones en  $L^2(\Omega)$  implica la convergencia en  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , es decir,

$$\begin{aligned} T_{v_n} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_v, \\ T_{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_{v_i}, \quad 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

Por otro lado, la continuidad de la derivada en el sentido de las distribuciones implica,

$$\frac{\partial T_{v_n}}{\partial x_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial T_v}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Como además  $\frac{\partial T_{v_n}}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}}$ ,  $1 \leq i \leq d$  por ser  $v_n \in H^1(\Omega)$ , y el límite es único, entonces  $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq d$ , en el sentido de las distribuciones.

■

**Teorema:**  $H^1(\Omega)$  es separable, es decir, tiene una parte densa numerable.

Demostración: La demostración de este resultado se basa en las siguientes propiedades de los espacios separables:

1. el producto cartesiano de espacios separables es separable,
2. un subespacio cerrado de un espacio separable es separable.

$L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert separable, entonces el espacio producto  $(L^2(\Omega))^{d+1}$  con la estructura hilbertiana producto es separable. Por otro lado, la aplicación,

$$J : v \mapsto \left( v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right)$$

de  $H^1(\Omega)$  en  $(L^2(\Omega))^{d+1}$  es una isometría, puesto que,

$$\|Jv\|_{(L^2(\Omega))^{d+1}} = \left( \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} = \|v\|_{1,\Omega}.$$

Identificando  $H^1(\Omega)$  con  $J(H^1(\Omega))$ , al ser este un subespacio cerrado del espacio separable  $(L^2(\Omega))^{d+1}$ , es separable, y por tanto  $H^1(\Omega)$  es separable.

■

### 1.3. El espacio $H_0^1(\Omega)$

Sabemos que  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\Omega)$  es un cierto subespacio de  $L^2(\Omega)$ . Nos preguntamos si  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $H^1(\Omega)$ , en general NO, pero si  $\Omega = \mathbb{R}^d$  entonces si es cierto.

### 1.3. EL ESPACIO $H_0^1(\Omega)$

---

**Definición:** Se define  $H_0^1(\Omega)$  como la adherencia de  $\mathcal{D}(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$ , es decir,  $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ .

**Teorema:**  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  es denso en  $H^1(\mathbb{R}^d)$ , es decir,  $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$ .

Demostración: La demostración de este resultado se divide en dos partes: truncamiento y regularización. Con la regularización demostramos que el espacio  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  es denso en el espacio de las funciones de  $H^1(\mathbb{R}^d)$  con soporte compacto, y con el truncamiento demostramos que este espacio es denso en  $H^1(\mathbb{R}^d)$ .

#### 1- Truncamiento

Queremos aproximar las funciones de  $H^1(\mathbb{R}^d)$  por funciones de  $H^1(\mathbb{R}^d)$  con soporte compacto. Para ello introducimos una función  $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  tal que:

$$\begin{cases} M(x) = 1 & \text{para } |x| \leq 1 \\ 0 < M(x) < 1 & \text{para } 1 < |x| < 2 \\ M(x) = 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$$

Ahora, para todo número real  $R > 0$ , definimos la función  $M_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  dada por:

$$M_R(x) = M\left(\frac{x}{R}\right) \quad \text{donde } \frac{x}{R} = \left(\frac{x_1}{R}, \dots, \frac{x_d}{R}\right).$$

Entonces, si  $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , la función  $M_R \cdot v \in H^1(\mathbb{R}^d)$  y es de soporte compacto pues su soporte es el de  $M_R$ . Veamos ahora que  $M_R \cdot v \xrightarrow{R \rightarrow \infty} v$  en  $H^1(\mathbb{R}^d)$  y habremos concluido. Para ello tenemos que demostrar dos cosas:

- 1-  $M_R \cdot v \xrightarrow{R \rightarrow \infty} v$  en  $L^2(\mathbb{R}^d)$
- 2-  $\frac{\partial M_R \cdot v}{\partial x_i} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial x_i}$  en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  para  $i = 1, \dots, d$

1- Tenemos que ver que  $\|M_R \cdot v - v\|_{0, \mathbb{R}^d} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , en efecto,

$$\begin{aligned} \|M_R \cdot v - v\|_{0, \mathbb{R}^d}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (M_R \cdot v - v)^2 dx = \\ &= \int_{|x| < R} (M_R \cdot v - v)^2 dx + \int_{|x| \geq R} (M_R \cdot v - v)^2 dx \\ &= \int_{|x| \geq R} (M_R \cdot v - v)^2 dx \leq \int_{|x| \geq R} v^2 dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

2- Calculemos  $\frac{\partial M_R \cdot v}{\partial x_i}$  en el sentido de las distribuciones.

$$\frac{\partial M_R \cdot v}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial M_R}{\partial x_i} \right) \cdot v + M_R \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

El segundo término evidentemente converge a 0 cuando  $R \rightarrow \infty$ . Veamos el primer término. Tenemos que  $\frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial x_i} \left( \frac{x}{R} \right)$ , por tanto  $\forall i = 1, \dots, d$ , se tiene que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) = 0$ . Así podemos concluir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{\partial M_R}{\partial x_i} \cdot v \right)^2 dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial M_R}{\partial x_i} \right|^2 \int_{\mathbb{R}^d} v^2 dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

## 2- Regularización

Queremos demostrar que toda función de  $H^1(\mathbb{R}^d)$  con soporte compacto se puede escribir como límite en  $H^1(\mathbb{R}^d)$  de funciones  $v_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Para ello definimos una función  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  tal que:

$$\begin{cases} \varphi \geq 0 \\ \varphi(x) = 0 \text{ si } |x| > 1 \\ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1 \end{cases}$$

Ahora, para cada  $\epsilon > 0$ , construimos la función  $\varphi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  definida por  $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$  que verifica:

$$\begin{cases} \varphi_\epsilon \geq 0 \\ \varphi_\epsilon(x) = 0 \text{ si } |x| > \epsilon \\ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x) dx = 1 \end{cases}$$

Consideramos la función regularizada  $v_\epsilon = \varphi_\epsilon \star v$ , es decir,

$$v_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x - y) v(y) dy$$

Como  $v$  y  $\varphi_\epsilon$  son de soporte compacto,  $v_\epsilon$  también es de soporte compacto. Por las propiedades del producto de convolución y por ser  $\varphi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  tenemos que  $v_\epsilon$  es  $C^\infty$ -diferenciable.

### 1.3. EL ESPACIO $H_0^1(\Omega)$

---

Por último, utilizando el resultado del lema que demostramos a continuación, tenemos:

$$\begin{aligned} v_\epsilon &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} v \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d) \\ \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} &= \varphi_\epsilon \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Y así tenemos que  $v_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} v$  en  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . ■

**Lema:** Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi_\epsilon \star f \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$  en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Demostración: Como  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , se puede considerar una sucesión  $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  tal que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y escribir,

$$\varphi_\epsilon \star f - f = \varphi_\epsilon \star f - \varphi_\epsilon \star f_n + \varphi_\epsilon \star f_n - f_n + f_n - f$$

Tomando la norma  $\|\cdot\|_{0, \mathbb{R}^d}$ ,

$$\|\varphi_\epsilon \star f - f\|_{0, \mathbb{R}^d} \leq \|\varphi_\epsilon \star f - \varphi_\epsilon \star f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} + \|\varphi_\epsilon \star f_n - f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} + \|f_n - f\|_{0, \mathbb{R}^d}$$

Por un lado, por las propiedades del producto de convolución, y por ser  $\|\varphi_\epsilon\|_{0,1, \mathbb{R}^d} = 1$ , tenemos,

$$\|\varphi_\epsilon \star f - \varphi_\epsilon \star f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} = \|\varphi_\epsilon \star (f - f_n)\|_{0, \mathbb{R}^d} \leq \|\varphi_\epsilon\|_{0,1, \mathbb{R}^d} \|f - f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por otro lado, obviamente,

$$\|f_n - f\|_{0, \mathbb{R}^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por último, multiplicando por  $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x-y) dy = 1$

$$\begin{aligned} (\varphi_\epsilon \star f_n - f_n)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x-y) f_n(y) dy - f_n(x) = \\ &\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x-y) f_n(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x-y) dy f_n(x) = \\ &\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x-y) (f_n(y) - f_n(x)) dy = \\ &\int_{|x-y| \leq \epsilon} \varphi_\epsilon(x-y) (f_n(y) - f_n(x)) dy, \end{aligned}$$

tomando valor absoluto,

$$\begin{aligned} |(\varphi_\epsilon \star f_n - f_n)(x)| &\leq \int_{|x-y| \leq \epsilon} |\varphi_\epsilon(x-y)| |f_n(y) - f_n(x)| dy \leq \\ \sup_{y: |x-y| \leq \epsilon} |f_n(y) - f_n(x)| &\int_{|x-y| \leq \epsilon} |\varphi_\epsilon(x-y)| dy = \\ \sup_{y: |x-y| \leq \epsilon} |f_n(y) - f_n(x)| & \end{aligned}$$

Tenemos que  $\sup_{y:|x-y|\leq\epsilon} |(f_n(y) - f_n(x))| \xrightarrow{\epsilon\rightarrow\infty} 0$  uniformemente, por tanto  $|(\varphi_\epsilon \star f_n - f_n)(x)| \xrightarrow{\epsilon\rightarrow\infty} 0$  uniformemente. Además  $\varphi_\epsilon$  y  $f_n$  tienen soporte compacto, luego su producto de convolución también tiene soporte compacto. Sea  $K = \text{sop}\varphi_\epsilon \cup \text{sop}f_n$ , entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_\epsilon \star f_n - f_n|^2 dx \leq \sup_{y:|x-y|\leq\epsilon} |\varphi_\epsilon \star (f_n(x) - f_n(x))|^2 \int_K 1 dx \xrightarrow{\epsilon\rightarrow\infty} 0,$$

es decir, también tiende a 0 el término que faltaba para completar la demostración.

$$\|\varphi_\epsilon \star f_n - f_n\|_{0,\mathbb{R}^d} \xrightarrow{\epsilon\rightarrow\infty} 0.$$

■

**Teorema (de prolongación):** Si  $v \in H_0^1(\Omega)$ , la función  $\tilde{v}$ , prolongación de  $v$  por 0 en  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ , es una función de  $H^1(\Omega)$ .

Demostración: Para esta demostración utilizaremos repetidamente el teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas: *Sea  $E$  un subespacio de un espacio normado  $\overline{E}$ , con  $E$  denso en  $\overline{E}$ ,  $B$  un espacio de Banach y  $f : E \rightarrow B$  una aplicación lineal continua, entonces existe una prolongación  $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow B$  lineal y continua.*

Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , evidentemente  $\tilde{\varphi}$  prolongación de  $\varphi$  por 0 en  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$  es una función de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  pues  $\varphi$  en la frontera de  $\Omega$  es 0. Por tanto  $\tilde{\varphi}$  sigue siendo de soporte compacto y  $C^\infty$ -diferenciable en todo  $\mathbb{R}^d$ . Además  $\|\tilde{\varphi}\|_{1,\mathbb{R}^d} = \|\varphi\|_{1,\Omega}$  provisto  $\mathcal{D}(\Omega)$  de la norma inducida por la de  $H^1(\Omega)$ . Por tanto, la siguiente aplicación es lineal y continua:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d) \\ \varphi &\longmapsto \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$ , entonces utilizando teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas, esta aplicación se prolonga a una aplicación lineal continua,

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^d) \\ v &\longmapsto \tilde{v} \end{aligned}$$

### 1.3. EL ESPACIO $H_0^1(\Omega)$

---

Para concluir tenemos que ver que  $\tilde{v}$  es la prolongación por 0 en  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ . En efecto, sea  $\{\varphi_n\}$  una sucesión de funciones de  $\mathcal{D}(\Omega)$  que converge a  $v$  en  $H_0^1(\Omega)$ , en particular converge en  $L^2(\Omega)$ . Por la continuidad de la aplicación ampliada,  $\widetilde{\varphi_n}$  converge a  $\tilde{v}$  en  $H^1(\mathbb{R}^d)$  y también en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Entonces podemos extraer una subsucesión  $\{\widetilde{\varphi_m}\}$  que converja a  $\tilde{v}$  casi por todas partes en  $\mathbb{R}^d$ , y por tanto,

$$\begin{aligned} \text{si } x \in \Omega \text{ se tiene que } \widetilde{\varphi_m}(x) &= \varphi_m(x) \rightarrow v(x) = \tilde{v}(x) \\ \text{si } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \text{ se tiene que } \widetilde{\varphi_m}(x) &= 0 \rightarrow 0 = \tilde{v}(x) \end{aligned}$$

■

**Fórmula de Green para funciones de  $H_0^1(\Omega)$ :**

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega) \text{ se tiene } \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \quad \forall i = 1, \dots, d$$

Demostración: La demostración de basa en la fórmula de Green para funciones de  $\mathcal{D}(\Omega)$  (integración por partes) y la densidad de  $\mathcal{D}(\Omega)$  en  $H_0^1(\Omega)$ .

Por la densidad de  $\mathcal{D}(\Omega)$  en  $H_0^1(\Omega)$ , existen dos sucesiones  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  que convergen respectivamente a  $u$  y  $v$  en la norma de  $H^1(\Omega)$ , por tanto,  $\forall i = 1, \dots, d$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{en } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Green clásica a las funciones de  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n dx + \int_{\Gamma} u_n v_n \gamma_i ds$$

Como son funciones de soporte compacto, la integral sobre la frontera es nula, y pasando al límite se concluye. ■

**Definición:** Se define la siguiente seminorma sobre  $H^1(\Omega)$ :

$$v \mapsto |v|_{1,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$



Esta aplicación es sólo seminorma porque hay funciones de  $H^1(\Omega)$  que no son nulas pero sus derivadas si lo son.

**Teorema (Desigualdad de Poincaré):** Si  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$ , existe una constante  $C = C(\Omega) > 0$  tal que,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: Por la densidad de  $\mathcal{D}(\Omega)$  en  $H_0^1(\Omega)$ , basta demostrar este resultado para funciones  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , luego tomando sucesiones convergentes queda demostrado  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ .

Como  $\Omega$  está acotado, podemos suponer que está contenido en una banda  $\{x = (x', x_d), x' = (x_1, \dots, x_{d-1}), a \leq x_d \leq b\}$ . Sea  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  y  $\tilde{v}$  su prolongación por 0 en  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ . Obviamente  $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , y se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\tilde{v}(x', x_d) = \int_a^{x_d} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) d\xi \leq \left( \int_a^{x_d} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int_a^{x_d} 1^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Tomando el cuadrado del valor absoluto,

$$|\tilde{v}(x', x_d)|^2 \leq (x_d - a) \int_a^{x_d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) \right|^2 d\xi \leq (x_d - a) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) \right|^2 d\xi,$$

integrando respecto a la variable  $x'$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\tilde{v}(x', x_d)|^2 dx' \leq (x_d - a) \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right|^2 dx,$$

finalmente, integrando respecto a la variable  $x_d$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{v}(x)|^2 dx = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\tilde{v}(x', x_d)|^2 dx' dx_d \leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right|^2 dx,$$

obteniendo,

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,\Omega}^2 = \|\tilde{v}\|_{0,\mathbb{R}^d}^2 &\leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right|^2 dx = \frac{1}{2}(b - a)^2 \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d} \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 = \frac{1}{2}(b - a)^2 \|v\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

### 1.3. EL ESPACIO $H_0^1(\Omega)$

---

Tomando raíz cuadrada, concluimos  $\|v\|_{0,\Omega} \leq \frac{|b-a|}{\sqrt{2}}|v|_{1,\Omega}$ .

■

Observar que en la demostración anterior basta exigir que  $\Omega$  sea acotado en una dirección.

Supongamos que  $\Omega$  es acotado y definimos  $v$  tal que  $v(x) = 1, \forall x \in \Omega$ , esta función es de  $H^1(\Omega)$  pero no verifica la desigualdad de Poincaré. Por tanto, podemos concluir el siguiente resultado:

**Corolario:** Si  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$ , entonces  $H_0^1(\Omega)$  es un subespacio propio de  $H^1(\Omega)$ , es decir,  $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ .

**Corolario:** Si  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$ , entonces la seminorma  $|\cdot|_{1,\Omega}$  es una norma sobre  $H_0^1(\Omega)$  equivalente a la norma inducida por  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ , es decir, existen constantes  $C_1$  y  $C_2$  tales que

$$C_1\|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq C_2\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración:

1. Es evidente que  $C_2 = 1$ , en efecto,

$$|v|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \leq \int_{\Omega} v^2 + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx = \|v\|_{1,\Omega}^2$$

2. Como  $\Omega$  es acotado y  $v \in H_0^1(\Omega)$ , utilizando la desigualdad de Poincaré obtenemos  $C_1 = 1/\sqrt{C^2(\Omega) + 1}$  despejando de:

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq (C^2(\Omega) + 1) \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 = (C^2(\Omega) + 1)|v|_{1,\Omega}^2$$

## 1.4. Teorema de la traza

Sea  $\Gamma = \partial\Omega$ , dada una función  $v \in H^1(\Omega)$ , queremos definir su valor en la frontera  $\Gamma$ .

Para  $d = 1$ , se tiene  $H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$ , entonces como toda función  $v \in H^1(I)$  tiene un representante continuo en  $\bar{I}$ , basta tomar el valor de este representante en los extremos del intervalo  $I$  para definir  $v|_{\Gamma}$ . Sin embargo, para  $d \geq 2$ , las funciones de  $H^1(\Omega)$  no son en general continuas y hacen falta argumentos más sofisticados para definir su valor en la frontera.

Nuestro objetivo es estudiar si  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  es denso en  $H^1(\Omega)$ , para así poder prolongar por continuidad la aplicación  $\gamma_0$ ,

$$\begin{array}{ccc} \gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) & \longrightarrow & C^0(\Gamma) \\ v & \longmapsto & \gamma_0 v = v|_{\Gamma} \\ & \Downarrow & \\ \gamma_0 : H^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Gamma) \\ v & \longmapsto & \gamma_0 v = v|_{\Gamma} \end{array}$$

y así dar sentido al valor de las funciones  $v \in H^1(\Omega)$  en  $\Gamma$ . Esta aplicación prolongada se llama APLICACIÓN TRAZA, y el valor de  $\gamma_0 v$  de una función  $v \in H^1(\Omega)$  se llama TRAZA de  $v$  en  $\Gamma$ .

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  será denso en  $H^1(\Omega)$  para  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\Gamma$  *suficientemente regular*. Veamos cuáles son estas condiciones de regularidad suficientes.

### 1.4.1. Caso A

Consideremos el caso más simple,  $\Omega = \mathbb{R}_+^d$  donde

$$\mathbb{R}_+^d = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d, x_d > 0\}.$$

Entonces, la frontera de  $\Omega$  es el hiperplano  $\Gamma = \{x = (x', 0) \in \mathbb{R}^d, x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}$ .

#### 1.4. TEOREMA DE LA TRAZA

---

**Teorema:**  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$  es denso en  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ .

Demostración: De nuevo, esta demostración se divide en fase de truncamiento y fase de regularización.

##### 1- Truncamiento

Queremos aproximar las funciones de  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$  por funciones de  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$  con soporte compacto en  $\mathbb{R}_+^d$ . La demostración es igual que en el caso anterior.

##### 2- Regularización

Queremos demostrar que toda función de  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$  con soporte compacto se puede escribir como límite en  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$  de funciones  $v_\epsilon \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$ . Se procede de nuevo mediante regularización por convolución, pero en este caso se plantean algunas dificultades.

Sea  $v \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$  con soporte compacto en  $\mathbb{R}_+^d$ , para aplicar convolución necesitamos que sea una función ampliada de todo  $\mathbb{R}^d$  y luego volver a restringir a  $\mathbb{R}_+^d$  el producto de convolución. Sin embargo, si prolongamos  $v \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$  por 0 a todo  $\mathbb{R}^d$ , la función prolongada no pertenece a  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . Para resolver esta dificultad trasladamos la función.

Sea  $w_h$  la siguiente función  $\tau_{-h}v = w_h(x', x_d) = v(x', x_d + h)$ , definida para  $x_d \geq -h$ , y consideremos  $v_h = w_h|_{\mathbb{R}_+^d}$ . Veamos que  $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} v$  en  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ , para ello basta ver que  $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} v$  en  $L^2(\mathbb{R}_+^d)$  y observar que  $\tau_{-h} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{-h}v)$ . Para demostrar que  $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} v$  en  $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ , por densidad, basta demostrarlo para  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$ .

Sea  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$ , por tanto tiene soporte compacto dentro de  $\mathbb{R}_+^d$ , luego podemos ampliarla por 0 en  $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}_+^d$  y la función ampliada  $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Por Cauchy-Schwarz, tenemos,

$$\begin{aligned} (\tau_{-h}\tilde{v} - \tilde{v})(x) &= \tilde{v}(x', x_d + h) - \tilde{v}(x', x_d) = \int_0^1 h \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th) dt \leq \\ &\left( \int_0^1 h^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th) \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq h \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th) \right)^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

integrando el cuadrado en todo  $\mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{-h}\tilde{v} - \tilde{v})^2(x)dx &\leq h^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th)\right)^2 dt dx = \\ &h^2 \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_d}(x)\right)^2 dx = h^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_d}(x)\right)^2 dx \leq h^2 |\tilde{v}|_{1, \mathbb{R}^d}^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

y finalmente, siendo  $v_h = \tau_{-h}v|_{\mathbb{R}_+^d}$ , tenemos,

$$\|v_h - v\|_{0, \mathbb{R}_+^d} = \int_{\mathbb{R}_+^d} (v_h - v)^2 dx = \int_{\mathbb{R}_+^d} (\tau_{-h}\tilde{v}_h - \tilde{v})^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{-h}\tilde{v}_h - \tilde{v})^2 dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Una vez que hemos demostrado que  $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  en  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ , podemos limitar nuestro estudio a funciones  $v$  que son restricciones a  $\mathbb{R}_+^d$  de funciones  $w \in H^1(\mathbb{R}_{-h}^d)$  y de soporte compacto.

Sea  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{-h}^d)$  tal que  $\psi = 1$  en el  $\text{sop}(v)$  y  $\psi = 0$  cuando  $x_d \leq -h/2$ . Naturalmente  $\psi w_h \in H^1(\mathbb{R}_{-h}^d)$ , se anula en un entorno de la frontera de  $\mathbb{R}_{-h}^d$  y su prolongación por 0 a todo  $\mathbb{R}^d$ ,  $\widetilde{\psi w_h}$ , pertenece a  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . Ahora ya estamos en condiciones de aplicar regularización por convolución, por tanto, existe una sucesión de funciones  $\varphi_\epsilon \star \widetilde{\psi w_h}$  tales que  $\varphi_\epsilon \star \widetilde{\psi w_h} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \widetilde{\psi w_h}$  en  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . Por las propiedades del producto de convolución, a partir de un  $\epsilon$  suficientemente pequeño, se tiene,

$$\text{sop}(\varphi_\epsilon \star \widetilde{\psi w_h}) \subset \text{sop}(\varphi_\epsilon) + \text{sop}(\widetilde{\psi w_h}) \subset \mathbb{R}_{-h}^d$$

por tanto, tomando restricciones a  $\mathbb{R}_{-h}^d$ ,

$$(\varphi_\epsilon \star \widetilde{\psi w_h})|_{\mathbb{R}_{-h}^d} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \psi w_h \text{ en } H^1(\mathbb{R}_{-h}^d),$$

y tomando restricciones a  $\mathbb{R}_+^d$ ,

$$(\varphi_\epsilon \star \widetilde{\psi w_h})|_{\mathbb{R}_+^d} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \psi w_h|_{\mathbb{R}_+^d} \text{ en } H^1(\mathbb{R}_+^d),$$

donde naturalmente  $(\varphi_\epsilon \star \widetilde{\psi w_h})|_{\mathbb{R}_+^d} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$

■

#### 1.4. TEOREMA DE LA TRAZA

---

**Lema:** Para toda función  $v$  de  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$  se tiene la desigualdad

$$\|v(\cdot, 0)\|_{0, \mathbb{R}^{d-1}} \leq \|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}$$

Demostración: Sea  $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$ , por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$|v(x', 0)|^2 = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_d} |v(x', x_d)|^2 dx_d = -2 \int_0^\infty v(x', x_d) \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) dx_d,$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|v(x', 0)|^2 \leq 2 \left( \int_0^\infty |v(x', x_d)|^2 dx_d \right)^{1/2} \left( \int_0^\infty \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 dx_d \right)^{1/2},$$

y la desigualdad  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,

$$|v(x', 0)|^2 \leq \int_0^\infty \left( |v(x', x_d)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 \right) dx_d,$$

de modo que concluimos integrando en  $x'$ ,

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, 0)\|_{0, \mathbb{R}^{d-1}} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x', 0)|^2 dx' \leq \\ &\int_{\mathbb{R}_+^d} \left( |v(x', x_d)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 \right) dx \leq \|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}^2. \end{aligned}$$

■

**Corolario (Teorema de la traza en  $\mathbb{R}_+^d$ ):** La aplicación lineal continua

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \subset L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \\ v &\longmapsto v(\cdot, 0) \end{aligned}$$

se prolonga por continuidad a una aplicación lineal continua

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}_+^d) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \\ v &\longmapsto v(\cdot, 0) \end{aligned}$$

verificándose además  $\forall v \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$

$$\|v(\cdot, 0)\|_{0, \mathbb{R}^{d-1}} \leq \|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}.$$

### 1.4.2. Caso B

**Definición:** Un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  se dice que es *1-regular* si es acotado y su frontera  $\Gamma$  es una variedad de clase  $C^1$  de dimensión  $d - 1$ .

Esto significa que existe un número finito de abiertos acotados  $\theta_i$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $0 \leq i \leq I$ , tales que  $\overline{\theta_0}$  está incluido en  $\Omega$ ,  $\{\theta_i\}_{i=0}^I$  es un recubrimiento abierto de  $\overline{\Omega}$ , y para todo  $i = 1, \dots, I$  existe una aplicación invertible de clase  $C^1$   $\varphi_i : x \mapsto y = \varphi_i(x)$  de  $\theta_i$  en  $B$ , bola abierta de  $\mathbb{R}^d$  de radio 1, cuya aplicación inversa  $\varphi_i^{-1}$  también es de clase  $C^1$  y tal que

$$\begin{aligned}\varphi_i(\theta_i \cap \Omega) &= B \cup \mathbb{R}_+^d = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d, |y'| < 1, y_d > 0\}, \\ \varphi_i(\theta_i \cap \Gamma) &= \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d, |y'| < 1, y_d = 0\}.\end{aligned}$$

Diremos que  $\{\theta_i, \varphi_i\}_{i=1}^I$  es un *sistema de cartas locales* que definen  $\Gamma$ .

Vamos a demostrar el teorema de la traza para  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  abierto 1-regular, pero también se puede generalizar a abiertos acotados con frontera de clase  $C^1$  a trozos.

La demostración se hace en varias etapas, a través de los siguientes lemas.

**Lema 1:** Si  $\Omega$  es 1-regular, existe un operador  $P$  lineal continuo llamado de *1-prolongación*  $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$ , tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad Pv = v \quad \text{casi por todas partes en } \Omega.$$

Demostración: Veamos primero el caso de  $\Omega = \mathbb{R}_+^d$  y luego por cartas locales y partición de la unidad lo extenderemos al caso de  $\Omega$  un abierto 1-regular.

Caso:  $\Omega = \mathbb{R}_+^d$

Si  $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$ , sea  $Pv$  su prolongación por reflexión,

$$Pv(x', x_d) = \begin{cases} v(x', x_d) & \text{si } x_d \geq 0 \\ v(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \end{cases}$$

#### 1.4. TEOREMA DE LA TRAZA

---

$Pv$  es continua, está en  $H^1(\mathbb{R}^d)$  y se tiene,

$$\frac{\partial Pv}{\partial x_i}(x', x_d) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_d) & \text{si } x_d \geq 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \text{ y } 1 \leq i \leq d-1 \\ -\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que  $\|Pv\|_{1, \mathbb{R}^d} = \sqrt{2}\|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}$  que nos da la continuidad de la aplicación  $P : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ .

Como  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$  es denso en  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ , esta aplicación se prolonga por continuidad a todo  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ , verificando que  $Pv(x) = v(x)$  casi por todo  $\mathbb{R}_+^d$ .

Caso:  $\Omega$  abierto 1-regular

Sea  $\{\alpha_i\}_{i=1}^I$  una partición de la unidad subordinada al recubrimiento  $\{\theta_i\}_{i=1}^I$ , es decir,  $\alpha_i \in \mathcal{D}(\theta_i)$ ,  $\forall i = 0, \dots, I$  y  $\sum_{i=1}^I \theta_i = 1$ . Si  $v \in H^1(\Omega)$ , escribimos,

$$v = \sum_{i=1}^I \alpha_i v,$$

y para cada  $i = 0, 1, \dots, I$  definimos  $P(\alpha_i v)$  de modo que,

$$Pv = \sum_{i=1}^I P(\alpha_i v).$$

Por un lado,  $P(\alpha_0 v) = \widetilde{\alpha_0 v}$ , prolongación de  $\alpha_0 v$  por 0 en  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ . Por otro lado, para  $i = 1, \dots, I$ , consideramos la función  $w_i = (\alpha_i v) \circ (\varphi_i^{-1}|_{B_+})$ , donde  $B_+ = B \cap \mathbb{R}_+^d$ . Se tiene que  $w_i \in H^1(B_+)$  y es nula en un entorno de  $\{y \in \partial B_+; y_d > 0\}$ , entonces podemos prolongar  $w_i$  por 0 en  $\mathbb{R}_+^d \setminus B_+$  y obtener una función  $\widetilde{w}_i \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$ , y ésta a su vez prolongarla por reflexión a una función  $\overline{w}_i \in H^1(\mathbb{R}^d)$  de soporte compacto en  $B$ . Finalmente,  $\overline{w}_i \circ \varphi_i$  definido en  $\theta_i$  se prolonga por 0 en  $\mathbb{R}^d \setminus \theta_i$  de modo que  $\widetilde{\overline{w}_i \circ \varphi_i}$  es una función de  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . De este modo definimos  $P(\alpha_i v) = \widetilde{\overline{w}_i \circ \varphi_i}$  para  $i = 1, \dots, I$ .

Ahora es fácil verificar que la aplicación  $v \longrightarrow \sum_{i=0}^I P(\alpha_i v)$  verifica las condiciones del lema.

■



**Lema 2:** Si  $\Omega$  es 1-regular,  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  es denso en  $H^1(\Omega)$ .

Demostración: Sea  $v \in H^1(\Omega)$  y  $Pv \in H^1(\mathbb{R}^d)$  su prolongación a todo  $\mathbb{R}^d$ . Como  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  es denso en  $H^1(\mathbb{R}^d)$  existe una sucesión  $\{w_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  tal que  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Pv$  en  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . Sea  $v_n = w_n|_\Omega$ , la sucesión  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  tal que  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$  en  $H^1(\Omega)$ .

■

Para el tercer lema utilizaremos la siguiente notación  $d\sigma$  denota la medida superficial sobre  $\Gamma$ , inducida por la medida Lebesgue  $dx$ . Así definimos  $L^2(\Gamma)$  el conjunto de las funciones definidas sobre  $\Gamma$  medibles para la medida  $d\sigma$  y de cuadrado integrable, con la norma  $\|v\|_{0,\Gamma} = (\int_\Gamma v^2 d\sigma)^{1/2}$ .

De manera equivalente, utilizando la partición de la unidad, podemos definir,

$$L^2(\Gamma) = \{v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha_i v) \circ \widetilde{\varphi_i^{-1}}(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^{d-1}), \quad 1 \leq i \leq I\}$$

con la norma

$$\|v\|_{0,\Gamma} = \left( \sum_{i=1}^I \|(\alpha_i v) \circ \widetilde{\varphi_i^{-1}}\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}}^2 \right)^{1/2}$$

que es equivalente a la anterior, es decir, existen constantes  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $C_1 \|v\|_{0,\Gamma} \leq \|v\|_{0,\Gamma} \leq C_2 \|v\|_{0,\Gamma}$ .

**Lema 3:** Si  $\Omega$  es 1-regular, existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega}.$$

Demostración: Sea  $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ , utilizando la partición de la unidad  $\{\alpha_i\}_{i=1}^I$ , definimos en  $B_+$  las funciones  $w_i = (\alpha_i v) \circ \varphi_i^{-1}$ , para  $1 \leq i \leq I$ . Sea  $\tilde{w}_i$  su prolongada por 0 a todo  $\mathbb{R}_+^d$ . Según el teorema de la traza en  $\mathbb{R}_+^d$ , se tiene que  $\|\tilde{w}_i(\cdot, 0)\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \leq \|\tilde{w}_i\|_{1,\mathbb{R}_+^d}$ , y por las propiedades de  $\alpha_i$  y  $\varphi_i$ , se deduce  $\|\tilde{w}_i\|_{1,\mathbb{R}_+^d} \leq C_i \|v\|_{1,\Omega}$ . Finalmente, por la equivalencia anterior de normas, se

concluye,

$$\begin{aligned} \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} &\leq C_2 \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} = C_2 \left( \sum_{i=1}^I \|\widetilde{w_i(\cdot, 0)}\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_2 \left( \sum_{i=1}^I C_i^2 \right)^{1/2} \|v\|_{1,\Omega} = C \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

■

El teorema de la traza es consecuencia directa de estos tres resultados.

**Teorema (de la traza):** Sea  $\Omega$  un abierto 1-regular de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  es denso en  $H^1(\Omega)$  y la aplicación lineal continua  $\gamma_0 : v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\Gamma}$  de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  en  $L^2(\Gamma)$  se prolonga por continuidad a una aplicación lineal continua de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Gamma)$ , que denotamos también  $\gamma_0$ , llamada aplicación traza.

## 1.5. Aplicaciones del teorema de la traza

### Fórmula de Green para funciones de $H^1(\Omega)$

Denotamos por  $\gamma_i$  la  $i$ -ésima componente del vector normal unitario exterior de  $\Omega$ .

**Teorema:** Sea  $\Omega$  un abierto 1-regular de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces  $\forall u, v \in H^1(\Omega)$  se tiene,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} u v \gamma_i d\sigma, \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

Demostración: Si  $u, v \in H^1(\Omega)$ , entonces existen sendas sucesiones  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  tales que convergen respectivamente a  $u$  y  $v$  en  $H^1(\Omega)$ .

Para  $u_n, v_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$  es válida la fórmula de Green,

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n dx + \int_{\Gamma} u_n v_n \gamma_i d\sigma, \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

Se concluye pasando al límite, puesto que por la continuidad de la aplicación traza,  $u_n|_{\Gamma}$  y  $v_n|_{\Gamma}$  convergen respectivamente a  $u|_{\Gamma}$  y  $v|_{\Gamma}$  en  $L^2(\Gamma)$ .

■

### Caracterización del espacio $H_0^1(\Omega)$

El teorema de la traza también nos permite caracterizar de forma más sencilla el subespacio  $H_0^1(\Omega)$  de  $H^1(\Omega)$ .

**Teorema:** Sea  $\Omega$  un abierto 1-regular de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces  $H_0^1(\Omega)$  es el núcleo de la aplicación traza  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ , esto es,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$$

Demostración: Sea  $v \in H_0^1(\Omega)$ , entonces existe una sucesión  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  tal que  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$  en  $H^1(\Omega)$ . Por la continuidad de la aplicación traza,  $\|\gamma_0 \varphi_n - \gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C \|\varphi_n - v\|_{1,\Omega}$ , de donde  $\gamma_0 \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma_0 v$  en  $L^2(\Gamma)$ . Como las funciones  $\varphi_n$  son de soporte compacto en  $\Omega$ , entonces  $\gamma_0 \varphi_n = 0 \forall n$ , y por tanto  $\gamma_0 v = 0$  en  $\Gamma$ .

La demostración del recíproco es más delicada. Lo demostraremos para  $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ , pues por cartas locales y partición de la unidad se generaliza al caso  $\Omega$  abierto 1-regular.

Sea pues  $v \in \{v \in H^1(\mathbb{R}_+^d) : \gamma_0 v = v(\cdot, 0) = 0\}$  y queremos demostrar que  $v \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ , es decir, que se puede aproximar por funciones  $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$ . Buscamos una sucesión  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  de funciones de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$  tal que  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$  en  $H^1(v)$ .

Sea  $\tilde{v}$  la prolongación por 0 de  $v$  a todo  $\mathbb{R}^d$ . Es fácil ver que  $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ . Obviamente  $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  y también  $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\forall i = 1, \dots, d$ . Basta demostrar que  $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, d$  y tendremos que  $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ . En efecto,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , aplicando la fórmula de Green y teniendo en cuenta que  $v(\cdot, 0) = 0$ , tenemos que  $\forall i = 1, \dots, d$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle \tilde{v}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbb{R}_+^d} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \\ &\int_{\{(x', 0), x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}} v \varphi \gamma_i d\sigma = \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Como en los casos anteriores, tenemos que hacer producto de convolución por una sucesión regularizante,  $\varphi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , pero de nuevo el soporte de  $\varphi_\epsilon \star \tilde{v}$  puede estar fuera de  $\mathbb{R}_+^d$ . Para evitarlo nos trasladamos una magnitud  $h$  definiendo  $\tau_h \tilde{v}(x', x_d) = \tilde{v}(x', x_d - h)$ . Ya demostramos que  $\tau_h \tilde{v} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{v}$  y que además  $\text{sop} \tau_h \tilde{v} \subset \mathbb{R}_+^d$ , por tanto  $\tau_h \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d}$  en  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ . Por otro lado,  $\text{sop}(\varphi_\epsilon \star \tau_h \tilde{v}) \subset \mathbb{R}_+^d$  y como ya vimos  $\varphi_\epsilon \star \tau_h \tilde{v} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tau_h \tilde{v}$  en  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . Con ambas cosas,  $\varphi_\epsilon \star \tau_h \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d}$  en  $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ , siendo  $\varphi_\epsilon \star \tau_h \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$  la sucesión buscada. ■

### Construcción de subespacios de $H^1(\Omega)$ de dimensión finita

En el capítulo 3 estudiaremos la construcción de subespacios de dimensión finita de  $H^1(\Omega)$ . Para ello se procederá a construir funciones de  $H^1(\Omega)$  mediante funciones a “trozos”. Será de gran utilidad el siguiente resultado.

Sea  $\overline{\Omega} = \cup_{r=1}^N \overline{\Omega}_r$  una descomposición de  $\Omega$  tal que:

- $\Omega_r$  es un abierto de  $\mathbb{R}^d$  contenido en  $\Omega$  con frontera  $\Gamma_r$  de clase  $C^1$ , para todo  $r = 1, \dots, N$ ,
- $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$  para  $r \neq s$ .

**Teorema:** Sea  $v \in C^0(\overline{\Omega})$  tal que la restricción  $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r) \forall r = 1, \dots, N$ , entonces  $v \in H^1(\Omega)$ .

Demostración: Sea  $v \in C^0(\overline{\Omega})$  con  $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$ ,  $\forall r = 1, \dots, N$ . Evidentemente  $v \in L^2(\Omega)$ , veamos que también las derivadas en el sentido de las distribuciones  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  son también funciones de  $L^2(\Omega)$ ,  $\forall i = 1, \dots, d$ . Definimos  $v_i \in L^2(\Omega)$  tal que  $v_i|_{\Omega_r} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Omega_r}$ ,  $\forall r = 1, \dots, N$ , veamos que  $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$  en el sentido de las distribuciones. En efecto,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \rangle &= -\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \\ &= \sum_{r=1}^N \left( \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\partial \Omega_r} v \varphi \nu_i d\sigma \right) = \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v_i \varphi dx = \int_{\Omega} v_i \varphi dx = \langle v_i, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Entonces  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$  y por tanto  $v \in H^1(\Omega)$ .

■

## 1.6. Un resultado de compacidad

El siguiente resultado se llama teorema de Rellich, y será útil para las sucesiones pues nos permite afirmar que en las condiciones del teorema de la traza, dada una sucesión acotada en  $H^1(\Omega)$ , podemos extraer una subsucesión convergente en  $L^2(\Omega)$ .

**Teorema:** Sea  $\Omega$  un abierto 1-regular de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces la inyección canónica de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Omega)$  es compacta, es decir, todo subconjunto acotado de  $H^1(\Omega)$  es relativamente compacto en  $L^2(\Omega)$ .

## 1.7. Los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$

Generalicemos la definición del espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$ .

**Definición:** Para todo entero  $m \geq 1$  llamamos espacio de Sobolev de orden  $m$  sobre  $\Omega$  al espacio

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

dotado del producto escalar,

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right) dx,$$

la norma asociada,

$$\|u\|_{m,\Omega} = (u, u)_{m,\Omega}^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \sum_{\alpha \leq m} (\partial^\alpha u)^2 dx \right)^{1/2},$$

## 1.7. LOS ESPACIOS DE SOBOLEV $H^M(\Omega)$

---

y la seminorma,

$$|u|_{m,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{\alpha=m} (\partial^{\alpha} u)^2 dx \right),$$

**Teorema:**  $H^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert separable para la norma

$$\|\cdot\|_{m,\Omega}$$

La demostración es idéntica al caso  $m = 1$ .

**Caso particular  $H^2(\Omega)$**

Si  $\Omega$  es 1-regular, se puede definir la traza de una función  $v \in H^2(\Omega)$ ,  $\gamma_0 v = v|_{\Gamma}$ . Por otro lado, si  $v \in H^2(\Omega)$  entonces  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , y por tanto también se pueden definir las trazas de estas funciones  $\gamma_0 \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Gamma}$ ,  $1 \leq i \leq d$ , que pertenecen a  $L^2(\Gamma)$ . La función  $\nu_i \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Gamma}$  es entonces una función de  $L^2(\Gamma)$  por ser producto de una función de  $L^{\infty}(\Gamma)$  y otra de  $L^2(\Gamma)$ , y podemos definir la derivada normal,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma} = \sum_{i=1}^d \gamma_i \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Gamma}$$

como una función de  $L^2(\Gamma)$ .

Sea  $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  el Laplaciano de una distribución  $u$ . Entonces si  $u \in H^2(\Omega)$ , se tiene para toda función  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$- \int_{\Omega} (\Delta u) v dx = - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i d\sigma \right\},$$

de donde se obtiene la fórmula de Green generalizada.

**Teorema: (Fórmula de Green generalizada)** Si  $\Omega$  es 1-regular, para toda función  $u$  de  $H^2(\Omega)$  y toda función  $v$  de  $H^1(\Omega)$ , se tiene:

$$- \int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma.$$

## 1.7. LOS ESPACIOS DE SOBOLEV $H^M(\Omega)$

---

**Nota:** para  $m > d/2$  las funciones de  $H^m(\Omega)$  son continuas, en particular, si  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ .

# Capítulo 2

## Formulación débil de problemas elípticos

### 2.1. Problemas variacionales abstractos

Vamos a introducir un marco abstracto bien adaptado para problemas de contorno asociados a ecuaciones en derivadas parciales. Sean:

1.  $V$  un **espacio de Hilbert** sobre  $\mathbb{R}$  de norma  $\|\cdot\|$ ,
2. una **forma bilineal**  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  **continua**, es decir, existe una constante  $M \geq 0$  tal que  $\forall u, v \in V$ ,  $a(u, v) \leq M\|u\|\|v\|$ , y  **$V$ -elíptica**, es decir, existe una constante  $\alpha > 0$  tal que  $\forall v \in V$ ,  $a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$ ,
3. y una **forma lineal**  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  **continua**, es decir,  $\forall v \in V$ ,  $|L(v)| \leq \|L\|_{\star} \cdot \|v\|$ , donde  $\|L\|_{\star} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{L(v)}{\|v\|}$

Consideramos el siguiente problema variacional:

$$(P) \quad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

La existencia y unicidad de la solución de este problema nos la da el teorema de Lax-Milgram.



**Teorema de Lax-Milgram:** Si se verifican las condiciones 1, 2 y 3, el problema  $P$  tiene solución única.

Observar que si suponemos que la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es además simétrica, entonces  $a(\cdot, \cdot)$  es un producto escalar en  $V$  con norma asociada  $\|v\|_E = (a(v, v))^{1/2}$ , que es equivalente a la norma  $\|\cdot\|$  de  $V$ . En este caso, la existencia y unicidad de la solución del problema ( $P$ ) viene dada por el teorema de Riesz-Frechet.

Demostración: Introducimos el siguiente operador,

$$\begin{aligned} A : V &\longrightarrow V \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

definido por  $(Au, v) = a(u, v) \forall v \in V$  donde  $(\cdot, \cdot)$  designa el producto escalar en  $V$ . Esta aplicación está bien definida pues fijado  $u$ , la aplicación  $v \mapsto a(u, v)$  es lineal y continua de  $V$  en  $\mathbb{R}$ , y por el teorema de Riesz-Frechet se puede representar dicha aplicación por un único elemento de  $V$  que llamaremos  $Au$ .

Evidentemente la aplicación  $A$  es lineal y continua por serlo  $a(\cdot, \cdot)$ , y además verifica,

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \leq M\|u\| \\ (Av, v) &\geq \alpha\|v\|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, al ser  $L$  una forma lineal continua sobre  $V$ , aplicando de nuevo el teorema de Riesz-Frechet, existe un único  $\tau L \in V$  tal que  $\forall v \in V$  se tiene  $L(v) = (\tau L, v)$ .

Observar que esto define una biyección lineal,

$$\begin{aligned} \tau : V' &\longrightarrow V \\ L &\longmapsto \tau L \end{aligned}$$

que es una isometría puesto que,

$$\|\tau L\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{(\tau L, v)}{\|v\|} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{L(v)}{\|v\|} = \|L\|_*$$

## 2.1. PROBLEMAS VARIACIONALES ABSTRACTOS

---

Entonces el problema  $(P)$  se puede escribir de la siguiente forma,

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } (Au, v) = (\tau L, v) \quad \forall v \in V,$$

esto es,

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } Au = \tau L.$$

Para demostrar que este problema, en su última versión, tiene solución única utilizaremos el teorema de Punto Fijo de Banach para contracciones estrictas. Para ello, dado un  $\rho > 0$  que elegiremos más adelante de forma apropiada, escribimos nuestro problema de la siguiente forma,

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } u = u - \rho(Au - \tau L).$$

De este modo, tenemos definida una aplicación,

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v - \rho(Av - \tau L) \end{aligned}$$

cuyo punto fijo sería solución de nuestro problema. Para demostrar que esta aplicación tiene un único punto fijo bastará demostrar que es una contracción estricta puesto que al ser  $V$  un espacio de Hilbert y por tanto completo, podremos aplicar el teorema de Banach que asegura en este caso la existencia de un único punto fijo.

En efecto, se tiene que,

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(A(v_1 - v_2))\|^2 = \\ &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) + \rho^2\|A(v_1 - v_2)\|^2 \leq \\ &= (1 - 2\alpha\rho + \rho^2)\|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

luego para que  $T$  sea una contracción estricta basta tomar  $\rho$  de modo que  $1 - 2\alpha\rho + \rho^2 < 1$ , y esto es cierto para  $0 < \rho < 2\alpha/M^2$ .

Por tanto para cada  $\rho$  entre 0 y  $2\alpha/M^2$  hemos demostrado que existe una solución del problema  $(P)$ , veamos que esta es única independientemente del valor de  $\rho$  elegido. Supongamos que existen  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones de  $(P)$ , entonces,

$$\begin{aligned} a(u_1, v) &= L(v) \quad \forall v \in V, \\ a(u_2, v) &= L(v) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Restando  $a(u_1 - u_2, v) = 0, \forall v \in V$ , en particular,  $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ , y por la  $V$ -elipticidad de la aplicación bilineal,  $0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2$ . Por tanto  $u_1 = u_2$ .

■

Cuando la aplicación bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es además simétrica, el problema  $(P)$  es equivalente a un problema de optimización.

**Teorema:** Si se verifican las condiciones 1, 2 y 3, y además  $a(\cdot, \cdot)$  es simétrica y verifica  $a(v, v) \geq 0 \forall v \in V$ , entonces el problema  $(P)$  es equivalente al siguiente problema de optimización,

$$(Q) \quad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

donde  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ .

Demostración: Sea  $u$  solución del problema  $(P)$ . Sea  $v \in V$  cualquiera con  $v \neq u$ , es decir,  $v = u + w$  con  $w \neq 0$ , entonces,

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + w) = \frac{1}{2}a(u + w, u + w) - L(u + w) = \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, w) + \frac{1}{2}a(w, w) - L(u) - L(w) = \\ &= J(u) + a(u, w) - L(w) + \frac{1}{2}a(w, w). \end{aligned}$$

Como  $u$  es solución de  $(P)$ , entonces  $a(u, w) = L(w)$ , por otro lado  $a(w, w) \geq 0$ , por tanto,

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(w, w) \geq J(u),$$

y esto es cierto  $\forall v \in V$  con  $v \neq u$ .

Veamos la demostración del recíproco. Sea  $u$  solución del problema de optimización  $(Q)$ , entonces  $\forall v \in V$  y  $\lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u + \lambda(v - u)) \\ J(u) &\leq \frac{1}{2}a(u + \lambda(v - u), u + \lambda(v - u)) - L(u + \lambda(v - u)) \\ J(u) &\leq \frac{1}{2}a(u, u) + \lambda a(u, v - u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v - u, v - u) - L(u) - \lambda L(v - u) \\ 0 &\leq \lambda a(u, v - u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v - u, v - u) - \lambda L(v - u) \\ 0 &\leq \frac{\lambda}{2}a(v - u, v - u) + a(u, v - u) - L(v - u). \end{aligned}$$

## 2.2. FORMULACIÓN DÉBIL DE PROBLEMA UNIDIMENSIONALES

Tomando el límite cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , tenemos,

$$0 \leq a(u, v - u) - L(v - u).$$

Como esta desigualdad es cierta  $\forall v \in V$ , podemos tomar  $v + u$  en lugar de  $u$ , de donde,

$$0 \leq a(u, v) - L(v), \quad \forall v \in V,$$

y de la misma forma, tomando  $-v$  en lugar de  $v$ ,

$$0 \geq a(u, v) - L(v), \quad \forall v \in V,$$

de donde se deduce,

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

■

## 2.2. Formulación débil de problema unidimensionales

### Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador $-d^2/dx^2$

Sea  $I = (a, b) \in \mathbb{R}$  un intervalo de la recta real,  $f \in L^2(I)$ , consideremos el problema:

Hallar  $u$  tal que

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en } I \tag{2.2.1}$$

$$u(a) = 0 \tag{2.2.2}$$

$$u(b) = 0 \tag{2.2.3}$$

En principio supondremos que  $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$  para que la ecuación anterior tenga sentido y de modo que se verifiquen las condiciones de contorno

## 2.2. FORMULACIÓN DÉBIL DE PROBLEMA UNIDIMENSIONALES

(2.2.2) y (2.2.3). Vamos a formular el problema anterior de otra manera. Elegimos una función  $v \in H_0^1(I)$  cualquiera, multiplicamos los dos miembros de la ecuación (2.2.1) por  $v$  e integramos por partes,

$$\int_a^b u'v' dx - (u'(b)v(b)u'(a)v(a)) = \int_a^b f v dx \quad (2.2.4)$$

como  $v(a) = v(b) = 0$  el problema se reformula de la siguiente manera: hallar  $u \in H_0^1(I)$  tal que

$$\int_a^b u'v' dx = \int_a^b f v dx \quad \forall v \in H_0^1(I) \quad (2.2.5)$$

Nos referiremos a (2.2.5) como la formulación débil o formulación variacional del problema de partida (2.2.1, 2.2.2, 2.2.3). Observemos que para que (2.2.5) tenga sentido no es necesario que  $u \in H^2(I)$ . Tenemos ahora que justificar la formulación anterior, es decir, demostrar que el problema (2.2.5) tiene solución y verificar si ésta es única. Para ello utilizaremos el teorema de Lax Milgram.

Antes repasemos algunas propiedades del espacio  $H_0^1(I)$ .

**Teorema 2.1.** : Sobre  $H_0^1(I)$  la seminorma  $|v|_{1,I} = (\int_a^b (v')^2 dx)^{1/2}$  y la norma de  $L^2(I)$ ,  $\|v\|_{0,I} = (\int_a^b v^2 dx)^{1/2}$  verifican la siguiente desigualdad

$$\|v\|_{0,I} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} |v|_{1,I}$$

**Demostración:** Es un caso particular del teorema de Poincaré del capítulo anterior. Basta demostrar el teorema para funciones  $v \in D(I)$ , pues  $D(I)$  es denso en  $H_0^1(I)$ .

$$v(x) = \int_a^x v'(x) dx$$

tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $L^2(I)$  obtenemos para  $x \in (a, b)$

$$|v(x)| \leq \left( \int_a^x 1^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_a^x (v')^2 dx \right)^{1/2}$$

## 2.2. FORMULACIÓN DÉBIL DE PROBLEMA UNIDIMENSIONALES

---

mayorando la segunda integral tomando  $x = b$  como límite superior de la integral

$$|v(x)| \leq (x - a)^{1/2} \left( \int_a^b (v')^2 dx \right)^{1/2} = (x - a)^{1/2} |v|_{1,I}$$

Elevando al cuadrado e integrando de nuevo en  $I$

$$\|v\|_{0,I}^2 \leq \frac{(b - a)^2}{2} |v|_{1,I}^2$$

Finalmente tomando la raíz cuadrada positiva obtenemos el resultado buscado. ■

**Corolario:** Sobre  $H_0^1(I)$  la seminorma  $|v|_{1,I}$  es una norma equivalente a la norma de  $H^1(I)$ .

**Demostración:** Puesto que

$$\|v\|_{1,I}^2 = \int_0^1 (v^2 + (v')^2) dx = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2$$

Tenemos de forma inmediata

$$|v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

Por otra parte, utilizando la desigualdad demostrada en el teorema anterior

$$\|v\|_{1,I}^2 = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2 \leq \left( \frac{(b - a)^2}{2} + 1 \right) |v|_{1,I}^2$$

de donde finalmente

$$\sqrt{\frac{2}{2 + (b - a)^2}} \|v\|_{1,I} \leq |v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

■

**Teorema 2.2. :** El problema formulado en la pregunta anterior tiene solución única.

## 2.2. FORMULACIÓN DÉBIL DE PROBLEMA UNIDIMENSIONALES

**Demostración:** Aplicamos el teorema de Lax-Milgram. La forma bilineal es

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) &: H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\rightarrow a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

La forma lineal es

$$\begin{aligned} L(\cdot) &: H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow l(v) = \int_0^1 f v dx \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

- La forma (2.2.6) es evidentemente bilineal.
- La forma (2.2.6) es continua, pues para todo  $u, v \in H_0^1(I)$

$$|a(u, v)| = \left| \int_0^1 u'v' dx \right| \leq |u|_{1,I} |v|_{1,I} \leq \|u\|_{1,I} \|v\|_{1,I}$$

- La forma (2.2.6) es elíptica, pues para todo  $v \in H_0^1(I)$

$$a(v, v) = \int_0^1 (v')^2 dx = |v|_{1,I}^2 \geq \frac{2}{2 + (b-a)^2} \|v\|_{1,I}^2$$

donde hemos aplicado la equivalencia entre de la norma  $\|\cdot\|_{1,I}$  y la seminorma  $|\cdot|_{1,I}$  demostrada anteriormente.

- La forma (2.2.7) es evidentemente lineal.
- La forma (2.2.7) es continua, pues para todo  $v \in H_0^1(I)$ ,  $l(v) = \int_0^1 f v dx$ , resulta por una parte aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Poincaré

$$|l(v)| = \left| \int_0^1 f v dx \right| \leq \|f\|_{0,I} |v|_{0,I} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|f\|_{0,I} |v|_{1,I} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|f\|_{0,I} \|v\|_{1,I}$$

■

## 2.2. FORMULACIÓN DÉBIL DE PROBLEMA UNIDIMENSIONALES

---

**Teorema 2.3.** : El problema débil (2.2.5) es equivalente al problema de optimización siguiente:

Hallar  $u \in H_0^1(I)$  tal que

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b (v')^2 dx - \int_a^b f v dx$$

**Demostración:** La forma bilineal (2.2.6) continua y elíptica es también simétrica. ■

**Teorema 2.4.** : La solución débil del problema formulado en la pregunta 2 verifica la ecuación (2.2.1) en el sentido de las distribuciones y en consecuencia  $u \in H^2(I)$ . Además la solución  $u$  de (2.2.5) verifica las condiciones de contorno (2.2.2) y (2.2.3).

**Demostración:** Sea  $u \in H_0^1(I)$  la solución del problema débil (2.2.5). Tomando en (2.2.5) en lugar de  $v$  cualquier función  $\varphi \in \mathcal{D}(I) \subset H_0^1(I)$ , funciones de clase  $C^\infty(I)$  y de soporte compacto en  $I$ , tenemos

$$\int_0^1 u' \varphi' dx = \int_0^1 f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

Podemos interpretar las integrales de la expresión anterior como el valor de las distribuciones  $u'$  y  $f$  en  $\varphi'$  y  $\varphi$  respectivamente, es decir,

$$\langle u', \varphi' \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

o bien

$$- \langle u'', \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

de donde

$$-u'' = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(I)$$



2.3. PROBLEMA DE DIRICHLET HOMOGÉNEO ASOCIADO AL  
OPERADOR  $-\Delta$

---

finalmente, como  $f \in L^2(I)$

$$-u'' = f \quad \text{en } L^2(I) \quad \text{y} \quad u \in H^2(I)$$

además la igualdad en  $L^2(I)$  implica

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en c.t.p. de } I$$

que es la ecuación (2.2.1).

Además como  $u \in H_0^1(I)$  verifica las condiciones de contorno (2.2.2) y (2.2.3). ■

### 2.3. Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador $-\Delta$

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos. El problema a resolver es:

(PDH1) Dada  $f \in L^2(\Omega)$ , hallar  $u$  definida en  $\Omega$  y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que  $u$  es suficientemente regular de modo que la ecuación anterior tenga sentido, por ejemplo  $u \in H^2(\Omega)$ , entendiendo las derivadas en el sentido de las distribuciones. Multiplicando la primera ecuación por una función test  $v \in H_0^1(\Omega)$  e integrando en  $\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizando la fórmula de Green, teniendo en cuenta que  $v|_{\Gamma} = 0$ , tenemos,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

### 2.3. PROBLEMA DE DIRICHLET HOMOGÉNEO ASOCIADO AL OPERADOR $-\Delta$

---

de modo que la ecuación anterior queda,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esta ecuación tiene sentido aunque  $u$  no esté en  $H^2(\Omega)$ , basta con que  $u \in H^1(\Omega)$ . Por otro lado, al ser  $u = 0$  sobre  $\Gamma$  y por las propiedades de  $\Gamma$  tenemos que  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Así podemos reemplazar el problema anterior por el siguiente, que recibe el nombre de FORMULACIÓN VARIACIONAL O DÉBIL,

(PDH2) Dada  $f \in L^2(\Omega)$ , hallar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Teorema:** El problema anterior tiene solución única.

Demostración: Basta demostrar que se verifican las condiciones del teorema de Lax-Milgram, siendo,

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

Evidentemente  $a(\cdot, \cdot)$  es bilinear. La continuidad se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, en efecto,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| = \left| \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left| \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{o, \Omega} \cdot \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{o, \Omega} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{o, \Omega}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{o, \Omega}^2 \right)^{1/2} \\ &= |u|_{1, \Omega} |v|_{1, \Omega} \leq \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

La  $V$ -elipticidad se obtiene por la equivalencia de normas en  $H_0^1(\Omega)$ , por ser  $\Omega$  acotado, ya que en este caso se verifica la desigualdad de Poincaré, en efecto,

$$a(v, v) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx = |v|_{1, \Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{1, \Omega}^2.$$

2.3. PROBLEMA DE DIRICHLET HOMOGÉNEO ASOCIADO AL  
OPERADOR  $-\Delta$

---

Finalmente  $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $L(v) = \int_{\Omega} f v dx$ , es evidentemente lineal, y además  $L(v) = \int_{\Omega} f v dx \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$ , y por tanto continua.

■

Comentarios:

1. Observar que evidentemente una solución del problema fuerte (PDH1) es solución del problema débil (PDH2). Recíprocamente, si  $u \in H_0^1(\Omega)$  es solución del problema débil (PDH2), entonces podemos recuperar las ecuaciones de la formulación fuerte en el sentido de las distribuciones y el teorema de la traza. En efecto, como  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$ , tenemos que la ecuación de la formulación débil también es cierta  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

que interpretándolo como productos de dualidad entre  $\mathcal{D}(\Omega)$  y  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , equivale a,

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y aplicando la definición de derivada en el sentido de las distribuciones,

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De este modo recuperamos la primera ecuación en el sentido de las distribuciones,

$$-\Delta u = f, \quad \text{en } \mathcal{D}(\Omega),$$

en particular, como  $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , se tiene,

$$-\Delta u = f, \quad \text{en } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

y por las propiedades de las funciones de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$

$$-\Delta u = f, \quad \text{en c.t.p. de } \Omega.$$

Por último, por las condiciones de la frontera del dominio, podemos aplicar el teorema de la Traza de modo que, al ser  $u \in H_0^1(\Omega)$ , entonces  $u|_{\Gamma} = 0$ .

2.4. PROBLEMA DE NEUMANN HOMOGÉNEO ASOCIADO AL OPERADOR  $-\Delta + ID$

---

2. Observar también que al ser la aplicación bilineal de este caso simétrica, el problema débil es equivalente al siguiente problema de optimización,

Dada  $f \in L^2(\Omega)$ , hallar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

donde  $J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$ .

## 2.4. Problema de Neumann homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos. El problema a resolver es:

(PNH1) Dada  $f \in L^2(\Omega)$ , hallar  $u$  definida en  $\Omega$  y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} &= 0 && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que  $u$  es suficientemente regular, por ejemplo  $u \in H^2(\Omega)$ . Multiplicamos la primera ecuación de (PNH1) por una función test  $v \in H^1(\Omega)$  e integramos en  $\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizando la fórmula de Green, teniendo en cuenta que  $\frac{\partial u}{\partial \gamma}|_{\Gamma} = 0$ , tenemos,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

de modo que la ecuación anterior queda,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2.4. PROBLEMA DE NEUMANN HOMOGÉNEO ASOCIADO AL  
OPERADOR  $-\Delta + ID$

---

Podemos reemplazar el problema anterior por la correspondiente FORMULACIÓN VARIACIONAL O DÉBIL,

(PNH2) Dada  $f \in L^2(\Omega)$ , hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

**Teorema:** El problema anterior tiene solución única.

Demostración: Se demuestra aplicando el teorema de Riesz-Frechet siendo,

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx = (u, v)_{1,\Omega}, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

donde como vimos antes  $L(\cdot)$  es lineal y continua, y como la aplicación bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es directamente el producto escalar en  $H^1(\Omega)$ , aplicando directamente el teorema de Riesz-Frechet, tenemos que el problema (PNH2) tiene solución única.

■

Comentarios:

1. Es evidente que una solución del problema fuerte (PNH1) es solución del problema débil (PNH2). Veamos en que medida una solución del problema débil (PNH2) es también solución del problema fuerte (PNH1). Si  $u$  es solución del problema débil (PNH2), como  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , se verifica,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Interpretando las integrales como productos de dualidad entre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  y  $\mathcal{D}(\Omega)$ , podemos escribir,

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

2.4. PROBLEMA DE NEUMANN HOMOGÉNEO ASOCIADO AL OPERADOR  $-\Delta + ID$

---

y como por definición de derivada en el sentido de las distribuciones  $\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle$ , podemos recuperar la ecuación de la formulación fuerte en el sentido de las distribuciones,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De hecho, como  $f \in L^2(\Omega)$ , se tiene,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Para recuperar la condición de contorno se necesita cierta regularidad en la solución. En efecto, si suponemos que  $u \in H^2(\Omega)$ , tiene sentido integrar por partes en la ecuación de la formulación débil tenemos,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v d\sigma = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

pero como ya hemos recuperado  $-\Delta u + u = f$  en  $L^2(\Omega)$ , entonces,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Como  $u \in H^2(\Omega)$  entonces  $\frac{\partial u}{\partial \gamma}|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$ , y al ser  $H^{1/2}(\Gamma)$  denso en  $L^2(\Gamma)$ , se tiene que  $\frac{\partial u}{\partial \gamma}|_{\Gamma} = 0$  en  $L^2(\Gamma)$ .

Observar que para recuperar la condición de contorno es imprescindible la hipótesis de regularidad  $u \in H^2(\Omega)$ .

2. Al ser  $a(\cdot, \cdot)$  el producto escalar en  $H^1(\Omega)$ , es simétrico, y tenemos la equivalencia del problema (PNH2) con el problema de optimización,

Dada  $f \in L^2(\Omega)$ , hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

donde  $J(v) = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} u v dx \right) - \int_{\Omega} f v dx$ .

3. En el problema de Neumann las condiciones de contorno se recogen directamente en la formulación variacional, mientras que en el problema de Dirichlet aparecen en el espacio funcional elegido para resolver el problema.

## 2.5. Problema de Dirichlet no homogéneo asociado al operador $-\Delta$

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos. El problema a resolver es:

(PD1) Dada  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , hallar  $u$  definida en  $\Omega$  solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que  $u \in H^2(\Omega)$ , multiplicamos la primera ecuación de (PD1) por una función test  $v \in H_0^1(\Omega)$  e integramos en  $\Omega$ . Aplicando la fórmula de Green obtenemos que la función  $u$  verifica,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esta formulación no encaja en el marco abstracto del teorema de Lax-Milgram puesto que  $u \in H^1(\Omega)$  con  $u|_{\Gamma} = g$  y  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Sin embargo, como  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , existe una función  $u_0 \in H^1(\Omega)$  tal que  $u_0|_{\Gamma} = g$ . Sea  $w = u - u_0$ , entonces  $w|_{\Gamma} = 0$ , y si  $u$  es solución de la ecuación anterior, entonces  $w$  lo es de la siguiente,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De esta forma hemos trasladado el problema al caso homogéneo, de modo que el problema variacional es,

(PD2') Dada  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , hallar  $w \in H_0^1(\Omega)$  tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

2.5. PROBLEMA DE DIRICHLET NO HOMOGÉNEO ASOCIADO AL OPERADOR  $-\Delta$

---

donde  $u_0 \in H^1(\Omega)$  con  $u_0|_{\Gamma} = g$ .

Resuelto este problema, la solución que buscamos es  $u = w + u_0$ . Por tanto, el problema variacional que realmente resolvemos es,

(PD2) Dada  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u|_{\Gamma} &= g \end{aligned}$$

**Teorema:** El problema anterior tiene solución única.

Demostración: Sea  $u_0 \in H^1(\Omega)$  tal que  $u_0|_{\Gamma} = g$  y  $w$  solución del problema (PD2'), veamos que  $w$  existe y es única. Si demostramos que la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx \end{aligned}$$

es lineal y continua, estaremos en las condiciones del teorema de Lax-Milgram como en el caso homogéneo. Evidentemente es lineal, la continuidad se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz y al hecho de ser  $u_0$  fijo, en efecto,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx \right| = \left| \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left| \int_{\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_{o,\Omega} \cdot \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{o,\Omega} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_{o,\Omega}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{o,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\ &= |u_0|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq |u_0|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos,

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \text{ bilineal, continua y } H_0^1(\Omega)\text{-elíptica} \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx, \text{ lineal y continua.} \end{aligned}$$

y por el teorema de Lax-Milgram existe una única  $w \in H_0^1(\Omega)$  solución del problema (PD2'). Entonces  $u = w + u_0$  es solución del problema (PD2), pero como la elección de  $u_0$  no es única, tenemos que demostrar la unicidad de  $u$ .



2.6. PROBLEMA DE NEUMANN NO HOMOGÉNEO ASOCIADO AL  
OPERADOR  $-\Delta + ID$

---

Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones del problema (PD2), entonces se verifica,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx, & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_1|_{\Gamma} &= g \\ \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx, & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_2|_{\Gamma} &= g \end{aligned}$$

restando las dos expresiones,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v dx &= 0, & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (u_1 - u_2)|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

tomando  $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ , resulta,

$$C \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 \leq |u_1 - u_2|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla u_1 - u_2 dx = 0,$$

por tanto  $\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 = 0$  en  $H^1(\Omega)$ , luego  $u_1 = u_2$  en  $H^1(\Omega)$ .

■

## 2.6. Problema de Neumann no homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos. El problema a resolver es:

(PN1) Dadas  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Gamma)$  (o bien  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , donde  $H^{-1/2}(\Gamma)$  designa el espacio dual de  $H^{1/2}(\Gamma)$ ), hallar  $u$  definida en  $\Omega$  y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} &= g & \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que  $u \in H^2(\Omega)$ , multiplicamos la primera ecuación de (PN1) por una función test  $v \in H^1(\Omega)$  e integramos en  $\Omega$ . Aplicando la fórmula de Green obtenemos,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2.6. PROBLEMA DE NEUMANN NO HOMOGÉNEO ASOCIADO AL OPERADOR  $-\Delta + ID$

---

El correspondiente problema variacional o formulación débil es,

(PN2) Dadas  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Gamma)$ , hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Observación: Si  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$  hay que sustituir el término  $\int_{\Gamma} g v d\sigma$  por  $\langle g, v \rangle$  donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto de dualidad entre  $H^{-1/2}(\Gamma)$  y  $H^{1/2}(\Gamma)$

**Teorema:** El problema anterior tiene solución única.

Demostración: La demostración es como en el caso homogéneo, aplicando el teorema de Riesz-Frechet donde,

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u v dx = (u, v)_{1,\Omega}, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma. \end{aligned}$$

Basta demostrar que la siguiente aplicación es lineal y continua,

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_{\Gamma} g v d\sigma. \end{aligned}$$

Evidentemente es lineal, veamos la continuidad, que se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, al teorema de la traza y al hecho de ser  $g$  fijo, en efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} g v d\sigma &\leq \left( \int_{\Gamma} g^2 d\sigma \right)^{1/2} \left( \int_{\Gamma} v^2 d\sigma \right)^{1/2} = \\ &= \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{0,\Gamma} \leq C \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Riesz-Frechet que nos asegura la existencia y unicidad de la solución.

■

## 2.7. Problema de contorno asociado a un operador elíptico de segundo orden

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos. Sea  $V$  un subespacio cerrado de  $H^1(\Omega)$  tal que,

$$H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega).$$

Sean  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  y  $a_0$  funciones medibles y acotadas en  $\Omega$ , es decir, funciones de  $L^\infty(\Omega)$ . Definamos la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\longmapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx \end{aligned}$$

que es una forma bilineal y continua en  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ . En efecto, la bilinealidad es inmediata. Verifiquemos la continuidad:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| \\ &\leq \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left( \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} \right) \\ &= \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \left( \sum_{i=1}^d 1^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^d 1^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\ &= d \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Supongamos que  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  y  $a_0$  verifican las hipótesis de elipticidad:

1. Existe un número real  $\alpha > 0$  tal que,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

2.7. PROBLEMA DE CONTORNO ASOCIADO A UN OPERADOR ELÍPTICO DE SEGUNDO ORDEN

---

2. Existe un número real  $\alpha_0$  tal que,

$$\forall x \in \Omega, a_0(x) \geq \alpha_0, \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

De estas hipótesis se deduce que  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica si  $\alpha_0 > 0$ . En efecto

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 v^2 dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \alpha_0 \int_{\Omega} v^2 dx \end{aligned}$$

Cuando  $V = H^1(\Omega)$  la condición  $\alpha_0 > 0$  es necesaria y suficiente para que la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  sea  $V$ -elíptica. Por el contrario, cuando  $V = H_0^1(\Omega)$ , para que la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  sea  $V$ -elíptica, basta que  $\alpha_0 \geq 0$ , o incluso es suficiente que  $\alpha_0 > -\frac{\alpha}{C^2(\Omega)}$ , donde  $C(\Omega)$  es la constante de la desigualdad de Poincaré.

Finalmente, sea  $f \in L^2(\Omega)$  y definamos,

$$\begin{aligned} L(\cdot) : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto L(v) = \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

que es lineal y continua en  $V$ .

Definamos el siguiente problema,

(PV) Dadas  $a(\cdot, \cdot)$  y  $L(\cdot)$  definidas sobre  $V$  como antes, hallar  $u \in V$  tal que,

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Si la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica, el teorema de Lax-Milgram nos da la existencia y unicidad de la solución de (PV).

Veamos como recuperar el problema fuerte a partir de esta formulación variacional. Si elegimos una función  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  en lugar de  $v \in V$ , utilizando las reglas de derivación en el sentido de las distribuciones, obtenemos,

$$a(u, \varphi) = \langle Au, \varphi \rangle,$$

2.7. PROBLEMA DE CONTORNO ASOCIADO A UN OPERADOR  
ELÍPTICO DE SEGUNDO ORDEN

---

donde  $A$  es el operador diferencial elíptico de segundo orden con coeficientes variables definido por,

$$Au = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u.$$

Por otra parte,  $L(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$ . Por tanto, se verifica la ecuación en derivadas parciales de segundo orden,

$$Au = f$$

en el sentido de las distribuciones sobre  $\Omega$ . Pero como  $f \in L^2(\Omega)$ , entonces la distribución  $Au \in L^2(\Omega)$ , y la igualdad anterior es cierta en  $L^2(\Omega)$ , y en consecuencia,

$$Au(x) = f(x) \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

Teniendo en cuenta que  $Au = f \in L^2(\Omega)$ , deducimos también,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Au v dx \quad \forall v \in V,$$

relación que tenemos que traducir en términos de condiciones de contorno. Para esto es para lo que necesitamos suponer que la frontera  $\Gamma$  de  $\Omega$  es de clase  $C^1$  a trozos, es decir, que estamos en las condiciones del teorema de la traza. Supongamos además que las funciones  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  son funciones de  $C^1(\overline{\Omega})$  y que  $u \in H^2(\Omega)$ , por tanto las funciones  $\sum_{j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}$ ,  $1 \leq i \leq d$ , pertenecen a  $H^1(\Omega)$ . Entonces, aplicando la fórmula de Green generalizada, tenemos que  $\forall u \in H^2(\Omega)$  y  $\forall v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Au v dx &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx - \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i v d\sigma = \\ &= a(u, v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v d\sigma, \end{aligned}$$

donde el operador  $\frac{\partial}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_i$  se denomina derivada conormal asociada al operador  $A$ .

Por lo tanto, despejando,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Au v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v d\sigma,$$

2.7. PROBLEMA DE CONTORNO ASOCIADO A UN OPERADOR  
ELÍPTICO DE SEGUNDO ORDEN

---

por lo que podemos deducir que,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v d\sigma = 0, \quad \forall v \in V.$$

Observar que si las hipótesis de regularidad no se verifican, la derivada conormal no tiene sentido.

En resumen, la solución  $u$  de (PV) verifica:

$$\begin{cases} u \in V, \\ Au = f \quad \text{en } \Omega, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} Au v dx \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

donde esta última ecuación, en condiciones de regularidad suficientes se puede sustituir por,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v d\sigma = 0, \quad \forall v \in V.$$

Veamos que problema fuerte estamos resolviendo según la elección de  $V$ .

1.  $V = H_0^1(\Omega) \Rightarrow$  PROBLEMA DE DIRICHLET HOMOGÉNEO

El problema resuelto es,

$$\begin{cases} Au = f \quad \text{en } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

En este caso  $\alpha_0 \geq 0$  o  $\alpha_0 > \frac{-\alpha}{C^2(\Omega)}$  es suficiente para que el problema variacional tenga solución única.

2.  $V = H^1(\Omega) \Rightarrow$  PROBLEMA DE NEUMANN HOMOGÉNEO

El problema resuelto es,

$$\begin{cases} Au = f \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma_a} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

En este caso es necesario suponer  $\alpha_0 > 0$  para que el problema variacional tenga solución única.

2.7. PROBLEMA DE CONTORNO ASOCIADO A UN OPERADOR  
ELÍPTICO DE SEGUNDO ORDEN

---

3.  $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\} \Rightarrow$  PROBLEMA MIXTO

El problema resuelto es,

$$\begin{cases} Au = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \frac{\partial u}{\partial \gamma_a} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  son dos partes de la frontera  $\Gamma$  tales que  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  y con interiores disjuntos.

La aplicación composición de la aplicación traza  $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  y de la aplicación restricción de  $L^2(\Gamma)$  sobre  $L^2(\Gamma_0)$  es evidentemente continua de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Gamma_0)$ . Es sencillo comprobar que  $V$  es un subespacio cerrado de  $H^1(\Omega)$  y por lo tanto espacio e Hilbert con la norma inducida por la de  $H^1(\Omega)$ . Si suponemos que  $\alpha_0 > 0$  entonces la aplicación bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica y el correspondiente problema variacional tiene solución única.

Este resultado se puede generalizar al caso  $\alpha_0 \geq 0$  si suponemos que  $\Omega$  es conexo y la parte de la frontera con condiciones de tipo Dirichlet  $\Gamma_0$ , tiene medida no nula, pues en este caso la  $V$ -elipticidad de la aplicación bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es consecuencia del siguiente teorema.

**Teorema:** Si  $\Omega$  es un abierto acotado conexo de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos y  $\Gamma_0$  una parte de la frontera de medida superficial no nula, entonces la seminorma  $|\cdot|_{1,\Omega}$  induce una norma sobre el espacio  $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$  equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ .

Demostración:

Veamos que la siguiente aplicación es una norma sobre  $V$ ,

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto |v|_{1,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Basta demostrar que si  $v \in V$  es tal que  $|v|_{1,\Omega} = 0$  entonces  $v = 0$ . En efecto, si  $|v|_{1,\Omega} = 0$  entonces  $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$  en  $\Omega$ ,  $\forall i = 1, \dots, d$ , por tanto  $v$  es constante en  $\Omega$  en virtud de su conexidad, pero como además  $v|_{\Gamma_0} = 0$ , entonces  $v = 0$  en  $\Omega$ .

Veamos ahora la equivalencia de las normas, es decir, que existen dos constantes  $C_1$  y  $C_2$  positivas tales que  $\forall v \in V$ ,

$$C_1 \|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq C_2 \|v\|_{1,\Omega}.$$

2.7. PROBLEMA DE CONTORNO ASOCIADO A UN OPERADOR  
ELÍPTICO DE SEGUNDO ORDEN

---

Evidentemente, la segunda desigualdad es cierta para  $C_2 = 1$ . La primera desigualdad se deduce por reducción al absurdo. Supongamos que esta desigualdad no es cierta, entonces  $\forall n$  entero positivo, existe una función  $w_n \in V$  tal que  $\|w_n\|_{1,\Omega} > n|w_n|_{1,\Omega}$ . Sea  $v_n = w_n/\|w_n\|_{1,\Omega}$ , así obtenemos una sucesión  $\{v_n\} \subset V$  tal que  $\|v_n\|_{1,\Omega} = 1$  y  $|v_n|_{1,\Omega} < 1/n$ . Por el teorema de Rellich, la inyección canónica de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Omega)$  es compacta, por tanto, podemos extraer una subsucesión convergente  $\{v_\mu\}$  convergente en  $L^2(\Omega)$ ,

$$v_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} v \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Pero tenemos que  $|v_\mu|_{1,\Omega} < 1/\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$ , por tanto para  $i = 1, \dots, d$ , se tiene  $\|\frac{\partial v_\mu}{\partial x_i}\|_{0,\Omega} < 1/\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$ , es decir,  $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$ . Luego  $v \in H^1(\Omega)$ , como  $V$  es cerrado  $v \in V$ . Además  $v$  es constante en  $\Omega$  y como  $v|_{\Gamma_0} = 0$ , entonces  $v = 0$  en  $\Omega$ , pero esto no es posible porque  $\|v\|_{1,\Omega} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|v_\mu\|_{1,\Omega} = 1$ .

■

**Ejercicio: Problema mixto asociado a la ecuación de transmisión de calor**

Consideremos el problema de la determinación de la distribución de la temperatura  $u$  de un cuerpo que ocupa una región  $\Omega$  del espacio  $\mathbb{R}^d$ , siendo  $d = 1, 2$  ó  $3$ . En física e ingeniería se conoce con frecuencia la temperatura de una parte  $\Gamma_0$  de la frontera de  $\Omega$ , y en el resto de la frontera  $\Gamma_1$ , se conoce sino el flujo de calor, una relación que liga éste con la temperatura en  $\Gamma_1$ , que suele ser una condición de transmisión de calor por convección en la frontera y que depende de un coeficiente  $h$  de convección.

Las ecuaciones que rigen este fenómeno son,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (K_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) &= f && \text{en } \Omega \\ -\sum_{i,j=1}^d K_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i &= h(u - u_\infty) && \text{sobre } \Gamma_1 \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma_0 \end{aligned}$$



donde  $K_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$  es el tensor de conductividad, que se supone elíptico, es decir, existe una constante  $\alpha > 0$  tal que  $\sum_{i,j=1}^d K_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ . Si  $K = kId$ , se dice que el medio es isótropo, es decir, el calor se transmite igual en todas direcciones.  $h \in L^\infty(\Gamma_1)$ , es el coeficiente de convección,  $u_\infty \in L^2(\Gamma_1)$  es la temperatura ambiente,  $f \in L^2(\Omega)$  es la fuente de calor y  $g \in H^{1/2}(\Gamma_0)$  es la temperatura en  $\Gamma_0$ .

- Deducir la formulación débil.
- Estudiar la existencia y unicidad de solución.
- Interpretación del problema resuelto.

## 2.8. Un ejemplo sin unicidad

Observemos el problema de Neumann asociado al operador de Laplace,

(P1) Dadas  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^{1/2}(\Gamma)$  (o más generalmente,  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ) hallar  $u$  definida en  $\Omega$  y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

En caso de que tenga solución, ésta no sería única pues cualquier solución más una constante sería también solución. En ese caso podemos caracterizar el conjunto de soluciones.

Razonemos desde el punto de vista físico de la ecuación del calor,  $u$  representa la temperatura de un cuerpo,  $f \in L^2(\Omega)$  son las fuentes volumétricas de calor, y  $g \in L^2(\Gamma)$  las fuentes superficiales de calor. Estamos buscando una solución estacionaria, es decir, independiente del tiempo, pero si el aporte global de calor al cuerpo es positivo (resp. negativo), la temperatura del mismo aumentará (resp. disminuirá) con el tiempo y por tanto la solución no sería estacionaria. Luego parece un requisito indispensable para que nuestro

## 2.8. UN EJEMPLO SIN UNICIDAD

---

problema tenga al menos una solución, que el aporte global de calor sea nulo, lo que matemáticamente se expresa,

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\sigma = 0$$

El correspondiente problema variacional, procediendo como de costumbre, es,

(P2) *Dadas  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Gamma)$ , hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que,*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Primero observemos que tomando  $v = 1$  obtenemos que la condición

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\sigma = 0$$

es necesaria para la existencia de solución. Veamos que también es condición suficiente. Inicialmente nuestro espacio de trabajo sería  $V = H^1(\Omega)$ , y la forma bilineal  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ , que no es elíptica sobre  $H^1(\Omega)$ , y por tanto no podemos aplicar el teorema de Lax-Milgram.

Sin embargo, el hecho de que una solución venga determinada salvo constantes, nos lleva a introducir un nuevo espacio de clases de funciones, el espacio cociente

$$V = H^1(\Omega)/\mathbb{R},$$

cuyos elementos son clases de equivalencia  $\tilde{u}$ , donde dos funciones  $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$  pertenecen a la misma clase de equivalencia si  $u_1 - u_2 = cte$ .

Este espacio cociente  $V$ , es un espacio vectorial normado con la suma, producto por escalares y norma habituales,

$$\begin{aligned} \tilde{u} + \tilde{v} &= \widetilde{u + v}, \\ \lambda \tilde{u} &= \widetilde{\lambda u}, \\ \|\tilde{u}\|_V &= \inf_{u \in \tilde{u}} \|u\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Además  $V$  es un espacio completo por ser  $H^1(\Omega)$  completo con la norma  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  y  $\mathbb{R}$  un subespacio cerrado de  $H^1(\Omega)$ .

Por otro lado, podemos definir un producto escalar en  $V$ ,

$$(\tilde{u}, \tilde{v})_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

con  $u \in \tilde{u}$  y  $v \in \tilde{v}$ , y su correspondiente norma asociada,

$$|\tilde{u}|_V = (\tilde{u}, \tilde{u})_V^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Teorema:** La norma  $|\tilde{u}|_V = (\tilde{u}, \tilde{u})_V^{1/2}$  es equivalente a la norma cociente en  $V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ .

Demostración: En concreto, vamos a demostrar que existe una constante  $C > 0$  tal que  $C\|\tilde{u}\|_V \leq |\tilde{u}|_V \leq \|\tilde{u}\|_V$ .

Primero observemos que  $\forall u \in \tilde{u}$ , se tiene,

$$|\tilde{u}|_V^2 = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx = \|u\|_{1,\Omega}^2,$$

y como es  $\forall u \in \tilde{u}$ , tomando ínfimos,

$$|\tilde{u}|_V^2 \leq \inf_{u \in \tilde{u}} \|u\|_{1,\Omega} = \|\tilde{u}\|_V.$$

Recíprocamente, por reducción al absurdo, supongamos que no es cierta la desigualdad inversa, es decir, que para todo entero positivo  $n$ , existe una clase  $\tilde{w}_n$  tal que  $|\tilde{w}_n|_V < \|\tilde{w}_n\|_V/n$ . Denotemos  $\tilde{u}_n = \tilde{w}_n/\|\tilde{w}_n\|_V$ , formando una sucesión  $\{\tilde{u}_n\} \subset V$  tal que  $\|\tilde{u}_n\|_V = 1$  y  $|\tilde{u}_n|_V < 1/n$ . Como  $\|\tilde{u}_n\|_V = \inf_{u_n \in \tilde{u}_n} \|u_n\|_{1,\Omega}$ , existirá, cualquiera que sea  $n$ , un  $\varepsilon > 0$  y un representante  $u_n \in \tilde{u}_n$  tales que  $\|u_n\|_{1,\Omega} \leq 1 + \varepsilon$ . Entonces  $\{u_n\}$  forman una sucesión acotada en  $H^1(\Omega)$ , por tanto existe una subsucesión  $\{u_\mu\}$  convergente en

## 2.8. UN EJEMPLO SIN UNICIDAD

---

$L^2(\Omega)$ , sea  $u$  su límite. Por otra parte, como  $|\widetilde{u}_\mu|_V < 1/\mu \rightarrow 0$ , tenemos que  $\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} \rightarrow 0$  en  $L^2(\Omega)$ , y por la continuidad de las derivadas en el sentido de las distribuciones,  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, \dots, d$ . Por tanto,  $u$  es constante, luego,

$$\|\widetilde{u}_\mu\|_V = \inf_{u_\mu \in \widetilde{u}_\mu} \|u_\mu\|_{1,\Omega} \leq \|u_\mu - u\|_{1,\Omega} \rightarrow 0,$$

pero esto no es posible porque  $\|\widetilde{u}_\mu\|_V = 1$ . Por tanto es cierta la desigualdad  $|\widetilde{u}|_V \geq C\|\widetilde{u}\|_V, \forall \widetilde{u} \in V$ .

■

Por tanto,  $V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  es un espacio de Hilbert en el que  $\|\cdot\|_V$  y  $|\cdot|_V$  son normas equivalentes.

Por otro lado, definamos la siguiente forma lineal,

$$\begin{aligned} L: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \widetilde{v} &\longmapsto L(\widetilde{v}) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma, \quad \forall v \in \widetilde{v}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que está bien definida, en efecto, sean  $v_1, v_2 \in \widetilde{v}$ , entonces,

$$\int_{\Omega} f(v_1 - v_2) dx + \int_{\Gamma} g(v_1 - v_2) d\sigma = C \left( \int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\sigma \right) = 0.$$

La linealidad es trivial, y la continuidad se obtiene por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el teorema de la traza, en efecto,

$$\begin{aligned} |L(\widetilde{v})| &\leq \left| \int_{\Omega} f v dx \right| + \left| \int_{\Gamma} g v d\sigma \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{0,\Gamma} \\ &\leq (\|f\|_{0,\Omega} + C(\Omega)\|g\|_{0,\Gamma}) \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in \widetilde{v}, \end{aligned}$$

y como esta desigualdad sigue siendo cierta tomando ínfimos en  $v \in \widetilde{v}$ , tenemos,

$$|L(\widetilde{v})| \leq (\|f\|_{0,\Omega} + C(\Omega)\|g\|_{0,\Gamma}) \|\widetilde{v}\|_V.$$

Por tanto, simplemente aplicando el teorema de Riesz-Frechet en  $V$ , tenemos la existencia y unicidad del problema siguiente,

*Hallar una clase  $\widetilde{u} \in V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  que verifica*

$$(\widetilde{u}, \widetilde{v})_V = L(\widetilde{v}), \quad \forall \widetilde{v} \in V.$$

## 2.9. Deformación elástica de un sólido

Consideremos un cuerpo sólido que se deforma elásticamente bajo la acción de fuerzas exteriores. El cuerpo ocupa una región  $\Omega$  del espacio  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). Supongamos que una parte de la frontera  $\Gamma_0$ , de medida no nula en  $\mathbb{R}^{d-1}$ , se mantiene fija. En el resto de la frontera  $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ , supongamos que se ejercen unas fuerzas superficiales  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_d) \in (L^2(\Gamma))^d$ . En  $\Omega$  se ejercen unas fuerzas volumétricas  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_d) \in (L^2(\Omega))^d$ . Debido a la acción de estas fuerzas exteriores  $\vec{f}$  y  $\vec{g}$ , el cuerpo se deforma y cada punto sufre un desplazamiento  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$ . Al deformarse, se generan en el cuerpo unas tensiones elásticas, caracterizadas por el tensor de tensiones  $\sigma_{i,j}(\vec{u})$ , hasta que se logra un equilibrio con las fuerzas exteriores.

Las ecuaciones que rigen este problema se estudian en la teoría de la elasticidad y son,

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{i,j}(\vec{u}) &= f_i && \text{en } \Omega, && i = 1, \dots, d, \\ u_i &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0, && i = 1, \dots, d, \\ \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(\vec{u}) \nu_j &= g_i && \text{sobre } \Gamma_1, && i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Las primeras y últimas ecuaciones representan el equilibrio entre las fuerzas exteriores y las fuerzas elásticas. Las segundas ecuaciones representan que en la parte de la frontera  $\Gamma_0$  no hay desplazamiento.

El tensor de tensiones viene dado por la ley del comportamiento del material o ley de Hooke,

$$\sigma_{i,j}(\vec{u}) = \lambda(\text{div } \vec{u})\delta_{i,j} + 2\mu\varepsilon_{i,j}(\vec{u}) \quad (2.9.1)$$

donde,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j}(\vec{u}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \text{div } \vec{u} &= \sum_{i=1}^d \varepsilon_{ii}(\vec{u}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \delta_{i,j} &= 1, \text{ si } i = j, \delta_{i,j} = 0, \text{ si } i \neq j, \\ \lambda &\geq 0, \mu > 0 \end{aligned}$$

Los coeficientes  $\lambda \geq 0$  y  $\mu > 0$  se llaman coeficientes de Lamé, dependen del material y están directamente relacionados con el módulo de Young

## 2.9. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN SÓLIDO

---

$E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$  y el coeficiente de Poisson  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$  del material. Se puede demostrar, como consecuencia de la ley general de conservación de momento angular que el tensor de tensiones  $\sigma$  es simétrico. El tensor de deformaciones es obviamente simétrico.

La ley de Hooke (2.9.1) se puede invertir, y podemos expresar el tensor de deformaciones en función del tensor de tensiones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \left( \sum_{l=1}^d \sigma_{ll} \right) \delta_{ij} \quad (2.9.2)$$

Veamos la correspondiente formulación variacional. Consideramos el espacio  $(H^1(\Omega))^d = H^1(\Omega) \times \dots \times H^1(\Omega)$ , que es un espacio de Hilbert con el producto,

$$(\vec{u}, \vec{v})_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^d (u_i, v_i)_{1,\Omega}.$$

El espacio donde buscamos la solución, llamado espacio de desplazamientos admisibles es,

$$V = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^d : v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, i = 1, \dots, d \}.$$

Multiplicando escalarmente el primer grupo de ecuación por  $\vec{v} \in V$ , integrando en  $\Omega$  y aplicando la fórmula de Green, tenemos,

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}(\vec{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Gamma_1} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}(\vec{u}) \nu_j v_i d\sigma = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d f_i v_i dx.$$

Teniendo en cuenta que  $\sigma_{i,j}(\vec{u})$  es simétrico, y utilizando el tercer grupo de ecuación, queda,

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma.$$

Por tanto, el correspondiente problema variacional a resolver es, (PE) *Dadas*  $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^d$  y  $\vec{g} \in (L^2(\Gamma))^d$ , hallar  $\vec{u} \in V$  tal que,

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma, \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (2.9.3)$$

Esto significa que la posición de equilibrio se obtiene para  $\vec{u} \in V$  verificando esta ecuación para cualquiera que sea  $\vec{v} \in V$ . Es lo que se conoce en física como *principio de trabajos virtuales*: el primer miembro representa el trabajo de las fuerzas elásticas y el segundo miembro el trabajo de las fuerzas exteriores.

Para poder demostrar la existencia y unicidad de la solución de este problema se necesitan los siguientes resultados.

**Lema (Desigualdad de Korn):** Supongamos que  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  de frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos. Entonces,

$$E = \{\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d; \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) \in L^2(\Omega), i, j = 1, \dots, d\} = (H^1(\Omega))^d,$$

y existe una constante  $C = C(\Omega) > 0$  tal que  $\forall \vec{v} \in (H^1(\Omega))^d$ ,

$$\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 \geq C\|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Se han utilizado sobre los espacios  $(L^2(\Omega))^d$  y  $(H^1(\Omega))^d$  las normas hilbertianas,

$$\|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 = \left( \sum_{i=1}^d \|v_i\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2 = \left( \sum_{i=1}^d \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

La desigualdad de Korn no es en absoluto trivial pues el primer miembro sólo hace intervenir ciertas combinaciones lineales de las primeras derivadas, mientras que en el segundo miembro intervienen todas las derivadas.

### Demostración de la desigualdad de Korn:

La demostración se realiza en tres pasos

1. Sea  $H_0^1(\Omega)$ , sea  $H^{-1}(\Omega)$  su dual. Entonces si,

$$w \in L^2(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$$

## 2.9. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN SÓLIDO

---

En efecto: Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  resulta

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

de donde

$$\left| \left\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| \leq \|w\|_{0,\Omega} \cdot \|\varphi\|_{1,\Omega}$$

por tanto la aplicación

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow - \int_{\Omega} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

se extiende por continuidad a todo el espacio  $H_0^1(\Omega)$  definiendo una forma lineal continua sobre  $H_0^1(\Omega)$ .

2. Si  $w \in H^{-1}(\Omega)$  es tal que  $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$   $i = 1, \dots, d$  entonces  $w \in L^2(\Omega)$ .  
Demostración en “Les inéquations en Mécanique et en Physique”, G. Duvaut, J.L. Lions pág. 111, Ed. Dunod.
3. Pongamos  $E = \{\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d; \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \in L^2(\Omega)\}$ . Está claro que  $E \supset (H^1(\Omega))^d$ . Veamos que  $E \subset (H^1(\Omega))^d$ .  $E$  es un espacio de Hilbert con la norma

$$\vec{v} \rightarrow \left( \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Para todo  $\vec{v} \in E$  tenemos por una parte

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$$

por lo demostrado en el paso 1 y por otra parte como  $\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in H^{-1}(\Omega)$  resulta  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in L^2(\Omega)$ , por lo visto en el paso 2, es decir  $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^d$ . En definitiva,  $E = (H^1(\Omega))^d$ .



Finalmente, la aplicación idéntica

$$\begin{aligned} (H^1(\Omega))^d &\rightarrow E \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{v} \end{aligned}$$

es biyectiva y continua pues evidentemente

$$\|\vec{v}\|_E = \left( \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq \|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

Por el teorema del grafo cerrado la inversa existe y es continua, es decir

$$\|\vec{v}\|_{1,\Omega} \leq C \|\vec{v}\|_E = C \left( \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

que es la desigualdad de Korn.

Como consecuencia de la desigualdad de Korn, tenemos el siguiente resultado que nos va a permitir demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional de la elasticidad (PE).

**Teorema (Corolario de la desigualdad de Korn):** Supongamos que  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  de frontera  $\Gamma$  de clase  $C^1$  a trozos. Entonces existe una constante  $C_0 > 0$  tal que,  $\forall \vec{v} \in V$ ,

$$\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq C_0 \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

**Demostración:**

Demostraremos primeramente que

$$\vec{v} \rightarrow \left( \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

es una norma sobre  $V$ . En efecto, pongamos

$$\mathcal{R} = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^d; \varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0 \text{ para } 1 \leq i, j \leq d \}$$

El conjunto  $\mathcal{R}$  se llama conjunto de desplazamientos rígidos.

## 2.9. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN SÓLIDO

---

- Caso  $d = 2$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow v_1(x_1, x_2) = g(x_2)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow v_2(x_1, x_2) = f(x_1)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = 0 \Rightarrow g'(x_2) + f'(x_1) = 0$$

que implica

$$g'(x_2) = \lambda \quad g(x_2) = \lambda x_2 + a_1$$

$$f'(x_1) = -\lambda \quad f(x_1) = -\lambda x_1 + a_2$$

de donde

$$v_1(x_1, x_2) = a_1 + \lambda x_2$$

$$v_2(x_1, x_2) = a_2 - \lambda x_1$$

es decir

$$\mathcal{R} = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^2; v_1(x_1, x_2) = a_1 + \lambda x_2, v_2(x_1, x_2) = a_2 - \lambda x_1 \}$$

Si  $\vec{v} \in \mathcal{R}$  se anula en 2 puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$  entonces  $\vec{v} = 0$ . Como suponemos que la medida 1-dimensional de  $\Gamma_0$  es mayor que cero, tenemos

$$V \cap \mathcal{R} = \{ \vec{0} \}$$

- Caso  $d = 3$ . Si  $\varepsilon_{ij} = 0$  para  $1 \leq i, j \leq 3$  tenemos

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} = 0$$

para  $1 \leq i, j, k \leq 3$ , de modo que  $v_i$  es un polinomio de grado menor o igual que 1, es decir

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = a_i + \sum_{k=1}^3 b_{ik} x_k \quad 1 \leq i \leq 3$$

## 2.9. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN SÓLIDO

---

además  $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} + b_{ji} = 0$ . Así pues,

$$b_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$b_{ij} = -b_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad i \neq j$$

denotando

$$b_{12} = b_{21} = -b_3$$

$$b_{23} = b_{32} = -b_2$$

$$b_{31} = b_{13} = -b_1$$

resulta

$$v_1(x_1, x_2, x_3) = a_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3$$

$$v_2(x_1, x_2, x_3) = a_2 - b_1 x_3 + b_3 x_1$$

$$v_3(x_1, x_2, x_3) = a_3 - b_2 x_1 + b_1 x_2$$

o bien, con notación evidente

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x}$$

Entonces si  $\vec{v} \in \mathcal{R}$  se anula en 3 puntos no alineados de  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\vec{v} = 0$ . Como suponemos que la medida 1-dimensional de  $\Gamma_0$  es mayor que cero, tenemos

$$V \cap \mathcal{R} = \{\vec{0}\}$$

y esto prueba que

$$\vec{v} \rightarrow \left( \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

es una norma sobre  $V$ .

Demostramos ahora la equivalencia de las dos normas, es decir, existen dos constantes  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que

$$C_1 \|\vec{v}\|_{1,\Omega} \leq \left( \sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

## 2.9. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN SÓLIDO

---

La segunda desigualdad es inmediata con  $C_2 = 1$ . Demostremos la otra por reducción al absurdo. Supongamos que no existe ninguna constante  $C_1$  verificando la primera desigualdad de la expresión anterior, es decir, supongamos que para todo entero  $n \geq 1$  existe un  $\vec{w}_n \in V$  tal que

$$\frac{1}{n} \|\vec{w}_n\|_{1,\Omega} > \left( \sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}(\vec{w}_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

y tomemos  $\vec{v}_n = \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|_{1,\Omega}}$ , resulta

$$\|\vec{v}_n\|_{1,\Omega} = 1 \tag{2.9.4}$$

$$\left( \sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{n} \tag{2.9.5}$$

Como la inclusión de

$$\begin{aligned} I : (H^1(\Omega))^d &\rightarrow (L^2(\Omega))^d \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{v} \end{aligned}$$

es compacta, y la sucesión  $(\vec{v}_n)_n$  es acotada, existe una subsucesión  $(\vec{v}_\mu)_\mu$  de  $(\vec{v}_n)_n$  convergente en  $(L^2(\Omega))^d$ . Sea

$$\vec{v} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \vec{v}_\mu \quad \text{en } (L^2(\Omega))^d$$

Tenemos por la continuidad de la derivación en el sentido de las distribuciones

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{ij}(\vec{v}_\mu) = \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

Por otra parte por (2.9.5) resulta

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{ij}(\vec{v}_\mu) = \varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0 \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

de donde el límite  $\vec{v} \in E = (H^1(\Omega))^d$ . Utilizando la desigualdad de Korn,  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \vec{v}_\mu = \vec{v}$  en  $(H^1(\Omega))^d$ . Además como  $V$  es un subespacio cerrado de

$(H^1(\Omega))^d$  y  $(\vec{v}_\mu)_\mu \subset V$ ,  $\vec{v} \in V$ . Finalmente como  $\varepsilon_{i,j}(\vec{v}) = 0$  resulta  $\vec{v} = 0$  lo que contradice (2.9.4).

■

Como consecuencia de estos dos resultados tenemos la existencia y unicidad de la solución del problema variacional de la elasticidad (PE).

**Teorema:** El problema (PE) tiene solución única.

Demostración: Denotemos,

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx, \\ L(\vec{v}) &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1 \Gamma} g_i v_i d\sigma. \end{aligned}$$

Por tanto el problema (PE) se escribe ahora,

$$\text{Hallar } \vec{u} \in V \text{ tal que } a(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Es fácil ver que  $L(\cdot)$  es lineal y continua, y que  $a(\cdot, \cdot)$  es bilineal y continua. La  $V$ -elipticidad es consecuencia del corolario de la desigualdad de Korn, en efecto,

$$\begin{aligned} a(\vec{v}, \vec{v}) &= \lambda \int_{\Omega} (\text{div } \vec{v})^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d (\varepsilon_{i,j}(\vec{v}))^2 dx \geq \\ &\geq 2\mu \sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq 2\mu C_0 \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Y en estas condiciones, el teorema es consecuencia del Lax-Milgram.

■

**Equivalencia con un problema de optimización.**

La forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es simétrica, por tanto,

**Teorema:** La solución  $\vec{u}$  del problema (PE) verifica,

$$J(\vec{u}) = \min_{\vec{v} \in V} J(\vec{v}),$$

donde,

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{v}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1 \Gamma} g_i v_i d\sigma.$$

La formulación del problema de elasticidad de esta forma se conoce en física como el principio de mínima energía, e indica que el estado de equilibrio de un cuerpo elástico se corresponde al de la mínima energía. La aplicación bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ , representa el trabajo de deformación elástica, la aplicación lineal  $L(\cdot)$ , el trabajo de las fuerzas exteriores, y el funcional  $J(\vec{v})$ , la energía total del sistema correspondiente al estado  $\vec{v}$ .

## 2.10. Elasticidad plana

### Campo de deformaciones planas

Si en un cuerpo elástico el campo de desplazamientos es de la forma

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

el campo de deformaciones está dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned}$$

decimos que tenemos un campo de deformaciones planas. Se observa que las únicas componentes no nulas de este tensor de deformaciones son las componentes  $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . además las componentes solo dependen de  $x_1$  y de  $x_2$ , pero no de  $x_3$ .

El tensor de tensiones asociado es de la forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

donde las componentes  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  solo dependen de  $x_1$  y de  $x_2$  y vienen dadas por

$$\sigma_{ij} = \lambda \left( \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, 2$$

Por otra parte como  $\varepsilon_{33} = 0$ , resulta de la relación (2.9.2)

$$(1 + \nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0$$

es decir,

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

El campo de tensiones es pues, como el campo de desplazamientos y de deformaciones, independiente de  $x_3$ .

### Campo de tensiones planas

Un campo de tensiones planas es por definición un campo de tensiones  $\sigma_{ij}$  que solo depende de  $x_1$  y de  $x_2$  y tal que las componentes  $\sigma_{i3}$ ,  $i = 1, 2, 3$  son nulas. Si el cuerpo elástico es isótropo, el campo de deformaciones asociado  $\varepsilon_{ij}$  está relacionado con el tensor de tensiones por la ley de Hooke (2.9.1), es decir

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, 2 \quad (2.10.1)$$

$$0 = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.10.2)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \quad (2.10.3)$$

resulta de la última de estas relaciones que  $\varepsilon_{33}$  se expresa explícitamente en función de  $\varepsilon_{11}$  y de  $\varepsilon_{22}$  por

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.10.4)$$

Se puede escribir la relación (2.10.1) como función únicamente de las componentes  $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , obteniendo

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda^* \left( \sum_{l=1,2} \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad i, j = 1, 2 \quad (2.10.5)$$

donde

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$$

## 2.10. ELASTICIDAD PLANA

---

Resulta además que  $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  solo dependen de  $x_1$  y de  $x_2$  y lo mismo ocurre con  $\varepsilon_{33}$  como consecuencia de (2.10.4).

Un problema de tensiones planas conduce pues a las mismas ecuaciones de equilibrio que un problema de deformaciones planas sin más que sustituyendo  $\lambda$  por  $\lambda^*$  en (2.10.5).

**Formulación débil de problemas de elasticidad plana** Con las notaciones para las coordenadas cartesianas mediante  $x = x_1$  e  $y = x_2$ , y para los desplazamientos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  en elasticidad plana, teniendo en cuenta las observaciones de las subsecciones anteriores la expresión correspondiente a (2.9.3) se escribe para deformaciones planas:

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx dy = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_1} g_i v_i d\gamma \quad (2.10.6)$$

y teniendo en cuenta (2.10.6) y desarrollando tendremos

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx dy \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{div}(\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\vec{u})) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \, dx dy \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_1} g_i v_i d\gamma \end{aligned}$$

debiendo sustituir el valor de  $\lambda$  por el de  $\lambda^*$  en el caso de tensiones planas.



# Capítulo 3

## Aproximación numérica mediante el Método de Elementos Finitos

### 3.1. Aproximación variacional abstracta

Consideremos el siguiente problema abstracto: Sean

- $V$  un espacio de Hilbert
- $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilineal continua y elíptica
- $L(.) : V \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua

Hallar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (P) \quad (3.1.1)$$

El correspondiente problema aproximado será: Sea  $V_h \subset V$  un subespacio de dimensión finita de  $V$ .

Hallar  $u_h \in V_h$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (P_h) \quad (3.1.2)$$

### 3.1. APROXIMACIÓN VARIACIONAL ABSTRACTA

---

**Teorema** El problema aproximado  $(P_h)$  tiene solución única.

Demostración:  $a(.,.)$  es bilineal, continua y elíptica sobre  $V_h$  y  $L(.)$  es lineal y continua en  $V_h$ . ■

#### Resolución Práctica

Sea  $[\varphi_1, \dots, \varphi_N]$  una base de  $V_h$ .  $(P_h)$  se escribe

Hallar  $u_h = \sum_{j=1}^N u_h^j \varphi_j$  tal que

$$\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) u_h^j = L(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.3)$$

Es decir, un sistema algebraico lineal de ecuaciones.

#### **Teorema de aproximación: lema de Céa**

Existe una constante  $C > 0$  independiente de  $V_h$  tal que

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (3.1.4)$$

#### Demostración:

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

tomando en la primera  $v = v_h \in V_h$  y restando

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

de donde

$$\alpha \|u - u_h\| \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \cdot \|u - v_h\|$$

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h$$

y finalmente

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

■

Comentarios:

1. Si  $a(., .)$  es simétrica, se puede mejorar el resultado anterior. En efecto, para todo  $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u - v_h, u - v_h) &= a(u - u_h + u_h - v_h, u - u_h + u_h - v_h) = \\ &= a(u - u_h, u - u_h) + 2a(u - u_h, u_h - v_h) + a(u_h - v_h, u_h - v_h) \end{aligned}$$

En el segundo miembro, el segundo término es nulo y el tercero es mayor o igual que cero. De donde

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - v_h, u - v_h) \leq M \|u - v_h\|^2$$

y finalmente

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h$$

es decir

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

2. Si  $a(., .)$  es simétrica la solución obtenida es la mejor posible en el sentido de la norma

$$\|v\|_A = a(v, v)^{1/2}$$

En efecto:

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\|u - u_h\|_A^2 = a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq \|u - u_h\|_A \cdot \|u - v_h\|_A$$

y finalmente

$$\|u - u_h\|_A = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_A$$

Interpretación geométrica:  $u_h$  es la mejor aproximación de  $u$  en el espacio  $V_h$ , con respecto a la norma  $\|\cdot\|_A$ .

### 3.2. EL M.E.F. PARA EL PROBLEMA MODELO DE DIMENSIÓN 1 CON FUNCIONES LINEALES A TROZOS

---

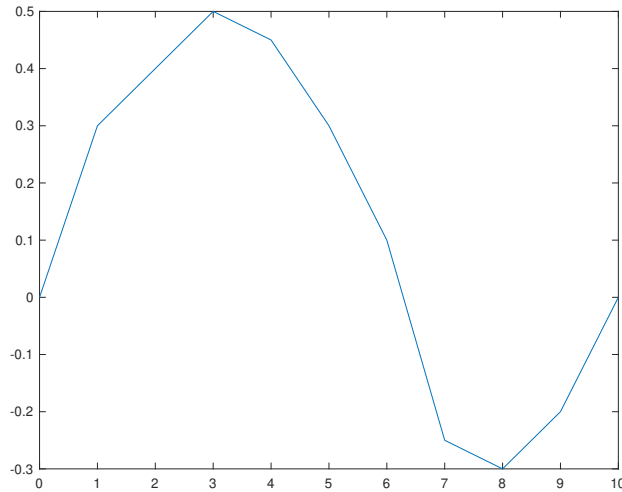


Figura 3.1: Ejemplo de una función  $v_h \in V_h$ , 10 subintervalos.

## 3.2. El M.E.F. para el problema modelo de dimensión 1 con funciones lineales a trozos

Vamos a construir una aproximación del problema (2.2.5) mediante un método de elementos finitos. El espacio  $H_0^1(I)$  en el que está formulado (2.2.5) es un espacio de dimensión infinita. La idea del M.E.F. es buscar soluciones de 2.2.5 en un subespacio de  $H_0^1(I)$ , más sencillo de manejar, en particular en un subespacio de dimensión finita. Esto nos permitirá representar cualquier función de este subespacio como combinación lineal de elementos de una base. En primer lugar construiremos un subespacio  $V_h$  de  $H_0^1(I)$ . Para ello sea  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$ , una partición del intervalo  $(0,1)$  en subintervalos  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$  de longitud  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N + 1$  y sea  $h = \max h_i$ . La cantidad  $h$  es una medida de lo fina que es la partición. Consideremos ahora el conjunto de funciones  $v_h$  lineales en cada subintervalo  $I_i$ , y continuas en  $[0,1]$  y tales que  $v(0) = v(1) = 0$ , como en el ejemplo de la siguiente figura: Una base de este espacio está constituida por el siguiente

3.2. EL M.E.F. PARA EL PROBLEMA MODELO DE DIMENSIÓN 1  
CON FUNCIONES LINEALES A TROZOS

---

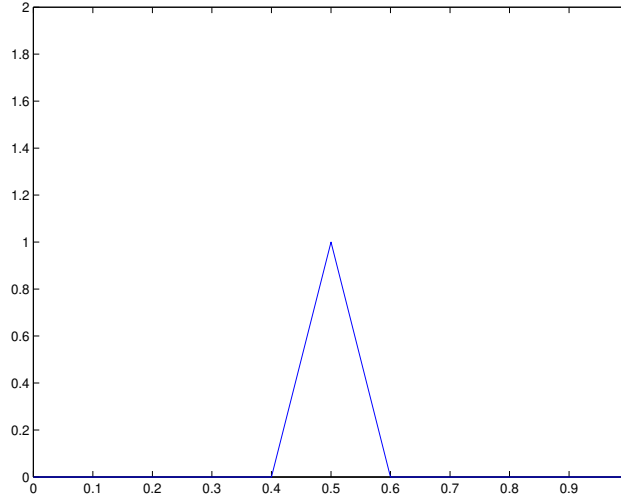


Figura 3.2: Ejemplo de una función de la base de  $V_h$ , 10 subintervalos.

conjunto de funciones  $\varphi_j \in V_h$ ,  $i = 1, \dots, N$ , definidas por:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

es decir,  $\varphi_i$  es continua y lineal a trozos y toma el valor 1 en el nodo  $x_i$  y el valor 0 en los otros nodos. De forma más precisa:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{if } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{if } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{if } x_{i+1} < x \end{cases}$$

Una función  $v_h \in V_h$  se escribe de forma única como combinación lineal de funciones de la base  $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ ,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^M v_h(x_i) \varphi_i(x) \quad x \in [0, 1]$$

El método de elementos finitos para el problema de contorno (2.2.1)-(2.2.2)-(2.2.3) se formula de la siguiente manera:

3.2. EL M.E.F. PARA EL PROBLEMA MODELO DE DIMENSIÓN 1  
CON FUNCIONES LINEALES A TROZOS

---

Hallar  $u_h \in V_h$  tal que para todo  $v_h \in V_h$  verifique:

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x)v_h(x) dx \quad (3.2.1)$$

Este problema, como hemos visto es equivalente a resolver un sistema algebraico lineal, en efecto:

Para que se verifique 3.2.1 para cualquier  $v_h$  es necesario y suficiente que se verifique para cualquier función de la base, Por otra parte la solución  $u_h$  se expresa en función de los elementos de la base  $\{\varphi_i\}_{i=1}^M u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$ , donde  $u_j = u_h(x_j)$  resulta que el problema a resolver es:

Hallar  $\mathbf{u} = \{u_j\}_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$  solución de

$$\sum_{j=1}^N \left( \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x) dx \right) u_j = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x) dx \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.2)$$

En forma matricial el sistema se puede escribir

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

donde la matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^M$ ,  $a_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x) dx$  y el segundo miembro  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^N$  viene dado por  $b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x) dx$

Los elementos  $a_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{A}$  se calculan fácilmente. Observemos primero que si  $|i - j| > 1$  entonces  $a_{ij} = 0$  pues en este caso para todo  $x \in [0, 1]$ ,  $\varphi_i(x)$  o  $\varphi_j(x)$  es igual a cero. Por tanto la matriz  $\mathbf{A}$  es tridiagonal, es decir, únicamente los elementos de la diagonal principal y los elementos de las dos diagonales adyacentes pueden ser diferentes de cero. Tenemos para  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_i'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}^2} dx = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}$$

y para  $i = 2, \dots, N$ ,

$$\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} dx = -\frac{1}{h_i}$$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

Observamos además que la matriz es simétrica y definida positiva, en efecto,  $a_{ij} = a_{ji}$  y por otra parte para cualquier  $(v_i)_{i=1}^M$ , vector de  $\mathbb{R}^N$ , distinto del vector nulo, sea  $v_h = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i$ , entonces

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} v_j v_i = \int_0^1 v_h'(x) v_h'(x) dx > 0$$

En el caso especial en el que los subintervalos  $I_i$  tengan todos la misma longitud  $h = \frac{1}{N+1}$  el sistema tiene la forma

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

que dividiendo por  $h$  se interpreta como un esquema en diferencias finitas para resolver el problema (2.2.1)-(2.2.2)-(2.2.3)

## 3.3. Construcción de espacios de Elementos Finitos

El método de Elementos Finitos consiste en elegir un subespacio  $V_h$  de dimensión finita y más precisamente una base de este subespacio en el que la funciones de dicha base son de pequeño soporte.

### 3.3.1. Generalidades

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , un abierto poliédrico de  $\mathbb{R}^d$  (un polígono si estamos en  $\mathbb{R}^2$ ) de frontera  $\Gamma$ .

Vamos a considerar una descomposición finita de  $\Omega$ :

$$\bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

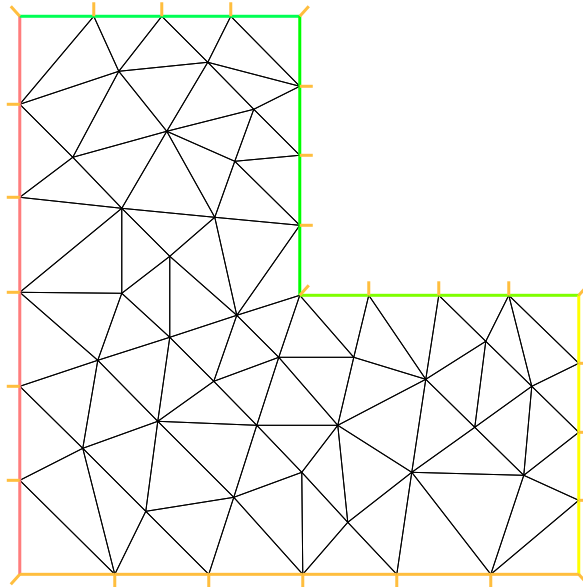


Figura 3.3: Ejemplo de triangulación

tal que:

1. Cada elemento  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  es un poliedro de  $\mathbb{R}^d$  de interior no vacío.
2. Los interiores de dos poliedros distintos de  $\mathcal{T}_h$  son disjuntos.
3. Toda cara de un poliedro  $T_1 \in \mathcal{T}_h$  es o bien una cara de otro poliedro  $T_2$ , en cuyo caso  $T_1$  y  $T_2$  son adyacentes, o bien una parte de la frontera  $\Gamma$  de  $\Omega$

**Definición:** Toda descomposición de  $\overline{\Omega}$  verificando las propiedades anteriores se llama triangulación de  $\overline{\Omega}$ . En la figura 3.3 se muestra un ejemplo.

Notación:  $\mathcal{T}_h$  designará en general una triangulación de  $\overline{\Omega}$  tal que  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$  donde  $h_T$  es el diámetro del poliedro  $T$ .

Un subespacio de  $V_h$  de dimensión finita de  $H^1(\Omega)$  se puede construir, como se verá más adelante, tomando por ejemplo,

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}); v|_T \in P_k \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$



donde  $P_k$  designa un espacio de polinomios de grado  $k$  en el poliedro  $T$ .

### 3.3.2. Concepto de Elemento Finito

Un Elemento Finito es una terna  $(T, P, \Sigma)$  donde

1.  $T$  es una parte compacta de  $\mathbb{R}^d$  conexa de interior no vacío.
2.  $P$  es un espacio vectorial de dimensión finita  $N$  cuyos elementos son funciones de  $T$  en  $\mathbb{R}$ .
3.  $\Sigma$  es una base del espacio dual de  $P$ , es decir,  $N$  funciones lineales de  $P$  en  $\mathbb{R}$  linealmente independientes.

#### Base asociada a un elemento finito

La base dual de  $\Sigma$  en  $P$  es la base asociada, es decir si  $\Sigma = \{\mathcal{L}_i\}_{i=1}^N$ , la base asociada al elemento finito  $(T, P, \Sigma)$  será el conjunto  $\{p_j\}_{j=1}^N \subset P$  tal que  $\mathcal{L}_i(p_j) = \delta_{ij}$ .

#### Elementos Finitos de Lagrange

**Definición:** Se dice que el conjunto  $\{a_j\}_{j=1}^N$  es  $P$ -unisolvente si y solo si, dados  $N$  escalares reales cualesquiera  $\alpha_j \quad 1 \leq j \leq N$ , existe una función  $p$  del espacio  $P$  y una sola tal que

$$p(a_j) = \alpha_j \quad 1 \leq j \leq N$$

Un Elemento Finito de Lagrange es entonces un Elemento Finito  $(T, P, \Sigma)$  en el que  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$  y donde  $\{a_i\}_{i=1}^N$  es un conjunto de puntos de  $T$ ,  $P$ -unisolvente.

Interpretemos la definición: Los puntos  $\{a_i\}_{i=1}^N$  se pueden considerar como formas lineales del dual de  $P$ , en efecto

$$\begin{aligned} a_i : P &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow a_i(p) = p(a_i) \end{aligned}$$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

Un Elemento Finito de Lagrange es entonces una terna  $(T, P, \Sigma)$  donde

1.  $T$  es una parte compacta de  $\mathbb{R}^d$  conexa de interior no vacío.
2.  $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$  es un conjunto finito de  $N$  puntos  $P$ -unisolvente de  $T$
3.  $P$  es un espacio vectorial de dimensión finita y compuesto por funciones definidas sobre  $T$  a valores reales.

Dado un elemento finito  $(T, P, \Sigma)$  se llaman funciones de base a la base dual de  $\Sigma$ , es decir, a las  $N$  funciones  $p_i \quad 1 \leq i \leq N$  definidas por

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq N$$

**Comentario:** Una condición necesaria para que el conjunto  $\Sigma$  sea  $P$ -unisolvente es que la dimensión de  $P$  sea igual al cardinal de  $\Sigma = N$ . Una vez verificada esta condición, tenemos dos criterios sencillos que aseguran la  $P$ -unisolvencia de  $\Sigma$ .

1. Basta verificar que la única función  $p \in P$  que se anula en  $\Sigma$  es la función nula. En efecto, cuando esta propiedad se satisface, la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow (p(a_j))_{j=1}^N \end{aligned}$$

es inyectiva y por lo tanto biyectiva pues  $P$  es de dimensión  $N$

2. Basta hallar las funciones  $\{p_i\}_{i=1}^N$  del espacio  $P$  verificando  $p_i(a_j) = \delta_{ij}$  para probar la  $P$ -unisolvencia. En efecto, si estas funciones existen, a todo conjunto de  $N$  escalares reales  $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq N}$  le asociamos la función

$$p = \sum \alpha_j p_j$$

Esta función es una función de  $P$  tal que  $p(a_j) = \alpha_j \quad 1 \leq j \leq N$ . Esto prueba que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow (p(a_j))_{j=1}^N \end{aligned}$$

es sobreyectiva y por tanto biyectiva.

**Definición:** Operador de  $P$ -interpolación sobre  $T$ .

Se llama operador de  $P$ -interpolación de Lagrange sobre  $T$  al operador que a toda función  $v$  definida en  $T$  le asocia la función  $\Pi_T v$  definida por  $\Pi_T v = \sum v(a_i)p_i$ .  $\Pi_T v$  se llama la función interpolada de  $v$ .

La función  $\Pi_T v$  verifica

$$\Pi_T v(a_j) = \sum v(a_i)p_i(a_j) = \sum v(a_i)\delta_{ij} = v(a_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

Es pues la única función  $p$  de  $P$  verificando  $p(a_j) = v(a_j)$ .

### 3.3.3. Elementos Finitos de Lagrange en un $d$ -simplex

Vamos a construir una clase de elementos finitos de Lagrange  $(T, P, \Sigma)$  donde  $T$  será un  $d$ -simplex de  $\mathbb{R}^d$ . Recordemos la noción de  $d$ -simplex:

Consideremos  $d+1$  puntos  $a_j = (a_{ij})_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d \quad 1 \leq j \leq d+1$  no situados en un mismo hiperplano de  $\mathbb{R}^d$ , es decir, que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

sea no singular.

Se llama  $d$ -simplex  $T$  de vértices  $a_j$  a la envolvente convexa de los puntos  $a_j$ . Si  $d = 2$  se llaman triángulos y si  $d = 3$  tetraedros.

Coordenadas baricéntricas: Todo punto  $x$  de  $\mathbb{R}^d$  de coordenadas cartesianas  $x_i \quad 1 \leq i \leq d$ , está caracterizado dando  $d+1$  escalares  $\lambda_j = \lambda_j(x) \quad 1 \leq$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

$j \leq d + 1$  definidos como solución del sistema lineal

$$\sum_{j=1}^{d+1} a_{ij} \lambda_j = x_i$$
$$\sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1$$

cuya matriz es precisamente la matriz regular  $A$ .

Los escalares  $\lambda_j(x)$   $1 \leq j \leq d+1$  se llaman las coordenadas baricéntricas del punto  $x$  con respecto a los puntos  $a_j$ . Cada una de estas funciones es una función afin de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}$  y se tiene para todo  $x \in \mathbb{R}^d$

$$x = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j(x) a_j$$

El  $d$ -simplex  $T$  definido por los vértices  $a_j$  está caracterizado por

$$T = \{x \in \mathbb{R}^d; \quad x = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j(x) a_j \quad 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, \quad 1 \leq j \leq d+1\}$$

Observemos que  $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$  para  $1 \leq i, j \leq d+1$ .

#### Ejemplos

1. Tria-p1-c:

$T$ : Triángulo.

$P$ : Polinomios de grado 1.

$\Sigma$ : Los tres vértices del triángulo.

Es el ejemplo que hemos estudiado. Las funciones de la base local son

$p_i = \lambda_i$ .

2. Tria-p2-c:

$T$ : Triángulo.

$P$ : Polinomios de grado 2.

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

$\Sigma$ : Los tres vértices y los puntos medios de las aristas.

Las funciones de  $P$  son pues funciones de la forma  $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$ .  $P$  es un espacio de dimensión seis. La base asociada de  $P$  estará formada por las seis funciones  $p_i$  verificando  $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ . Para hallar las seis funciones de la base, podemos proceder de la manera siguiente: Llamemos  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  los tres vértices y  $a_i$ ,  $i = 4, 5, 6$  los tres puntos medios de las aristas (ver figura 3.4). Para hallar  $p_1$ , es decir una función que verifique

$$p(a_1) = 1 \quad p(a_j) = 0 \quad j \neq 1$$

Observemos que  $\lambda_1$  la coordenada baricéntrica que vale 1 en el nodo  $a_1$  y cero en  $a_2, a_3, a_4$  no se anula en  $a_5, a_6$  donde vale  $\lambda_1(a_5) = \lambda_1(a_6) = 1/2$ . Por tanto si tomamos

$$p_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

verifica las propiedades requeridas. Análogamente las otras dos funciones asociadas a los vértices serán

$$p_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$$

$$p_3 = \lambda_3(2\lambda_3 - 1)$$

Busquemos ahora  $p_4, p_5$  y  $p_6$ , las funciones asociadas a los puntos medios de los lados. Basta observar que la función  $\lambda_2$  se anula en la recta  $a_1 - a_5 - a_3$ , y  $\lambda_3$  se anula en la recta  $a_1 - a_6 - a_2$ , por lo tanto  $\lambda_2\lambda_3$  se anula en todos los puntos de  $\Sigma$  salvo en  $a_4$  donde vale  $\lambda_2(a_4)\lambda_3(a_4) = 1/2, 1/2 = 1/4$ , de donde finalmente la función

$$p_4 = 4\lambda_2\lambda_3$$

será la función base asociada al nodo  $a_4$ . Análogamente obtenemos

$$p_5 = 4\lambda_1\lambda_3$$

$$p_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

En las figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 se representan las gráficas de las funciones de la base  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  en el triángulo de referencia de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

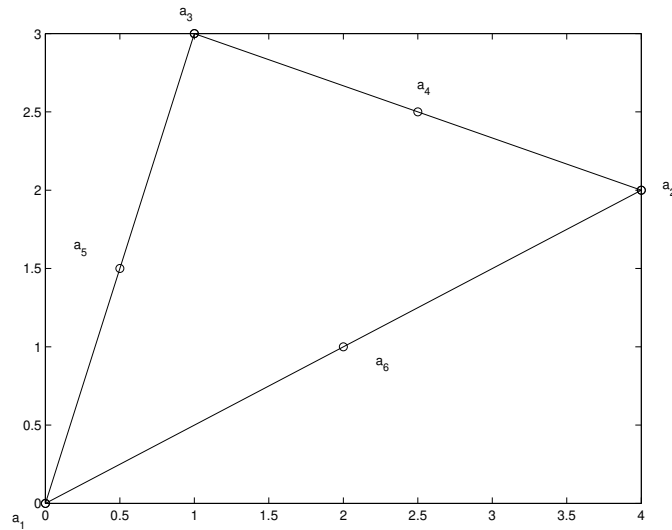


Figura 3.4: triángulo de seis nodos

#### 3. Tetra-p1-c:

$T$ : Tetraedro.

$P$ : Polinomios de grado 1 de tres variables.

$\Sigma$ : Los cuatro vértices del tetraedro.

Las funciones de la base local son  $p_i = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

#### 3.3.4. Un método general para construir a partir de un elemento finito $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ toda una familia de elementos finitos $(T, P, \Sigma)$

Consideremos un conjunto compacto  $\hat{T}$  de  $\mathbb{R}^d$ , convexo y de interior no vacío.  $F$  una aplicación de  $\hat{T}$  en  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que  $T = F(\hat{T})$  es una parte compacta, conexa y de interior no vacía (por ejemplo exigiendo que  $F$  sea biyectiva y bicontinua de  $\hat{T}$  en  $T$ ).

**Teorema:** Supongamos que la aplicación  $F$  es biyectiva. Entonces si  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  es un elemento finito de Lagrange, la terna  $(T, P, \Sigma)$  donde  $T = F(\hat{T})$  y donde  $P = \{p : T \rightarrow \mathbb{R} \mid p \circ F \in \hat{P}\}$  y  $\Sigma = F(\hat{\Sigma})$  es un elemento

3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

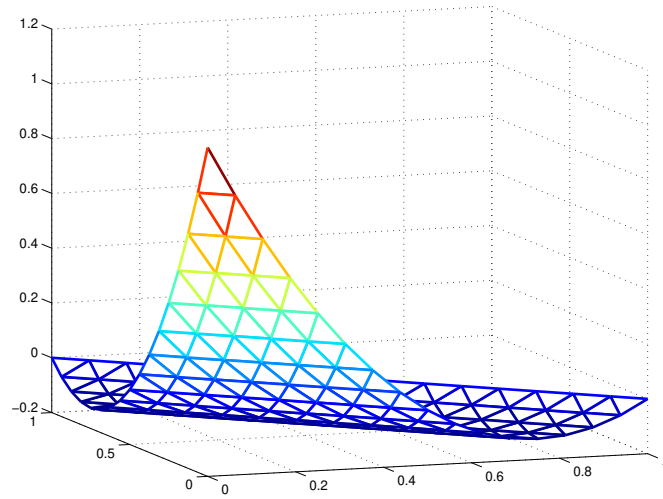


Figura 3.5: función  $p_1$

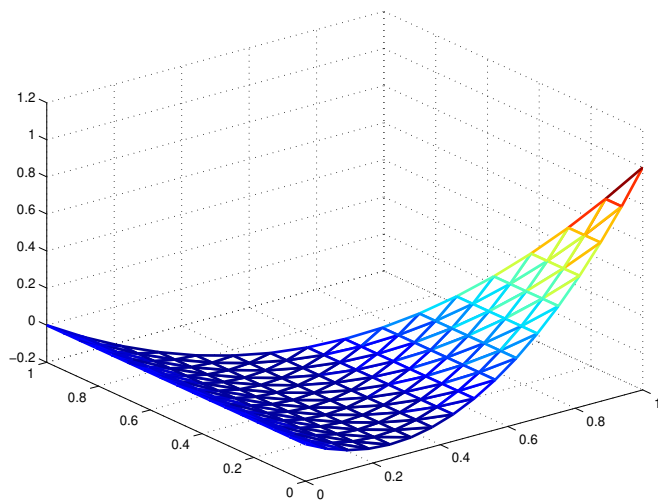


Figura 3.6: función  $p_2$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

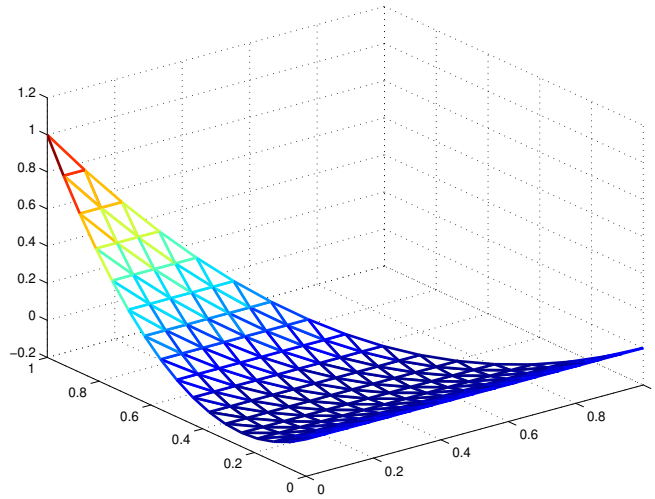


Figura 3.7: función  $p_3$

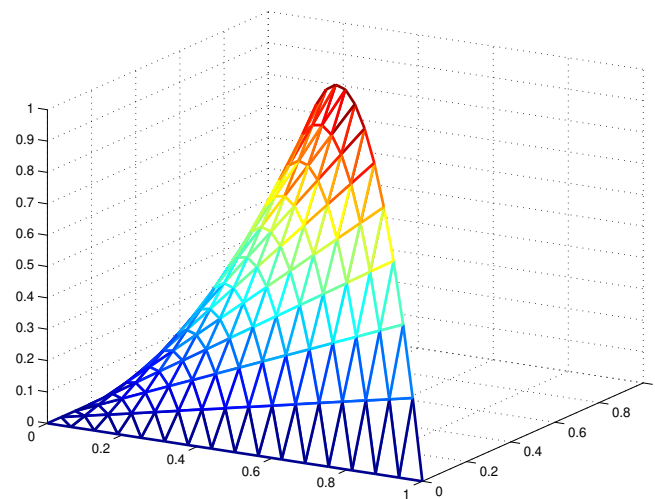


Figura 3.8: función  $p_4$



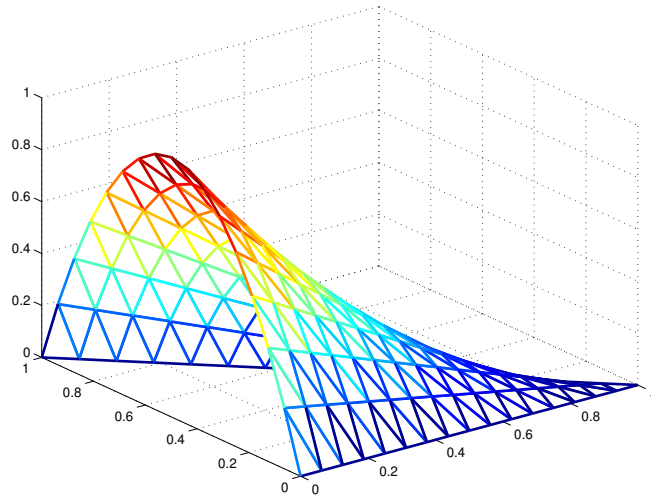


Figura 3.9: función  $p_5$

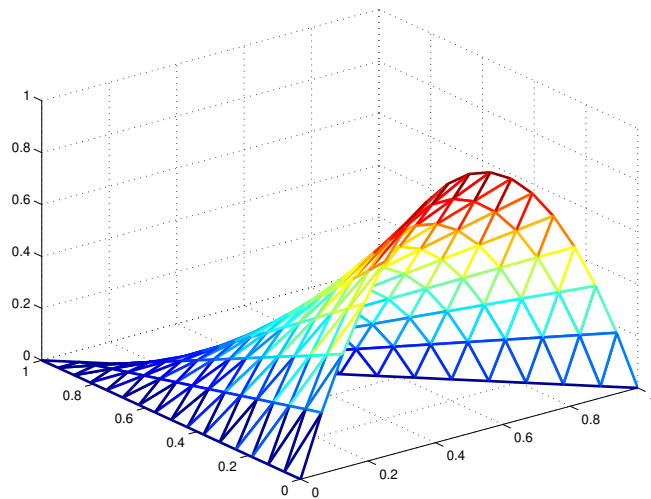


Figura 3.10: función  $p_6$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

finito de Lagrange.

Demostración: Sea  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  un elemento finito donde  $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_j\}_{j=1}^N$  es un conjunto de  $N$  puntos distintos de  $\hat{T}$ .

Pongamos  $a_j = F(\hat{a}_j) \quad 1 \leq j \leq N$

Entonces  $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N \quad 1 \leq j \leq N$

Puesto que  $F$  es biyectiva de  $\hat{T}$  en  $T = F(\hat{T})$

$$\text{card}(\Sigma) = \text{card}(\hat{\Sigma}) = \dim(\hat{P}) = \dim(P)$$

para demostrar que  $\Sigma$  es  $P$ -unisolvente basta obtener las funciones de base correspondientes a  $(T, P, \Sigma)$ .

Sean  $\hat{p}_i \quad i = 1, \dots, N$  las funciones de base correspondientes a  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ , entonces

$$p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1} \quad i = 1, \dots, N$$

son las funciones de base correspondientes a  $P$ , en efecto  $p_i \in P$  pues

$$p_i \circ F = \hat{p}_i \circ F^{-1} \circ F = \hat{p}_i \in \hat{P}$$

y además si  $a_i \in \Sigma$

$$p_i(a_j) = (\hat{p}_i \circ F^{-1})(a_j) = \hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$$

■

**Definición:** Dos elementos finitos de Lagrange  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  y  $(T, P, \Sigma)$  se dice que son equivalentes si existe una aplicación  $F$  biyectiva de  $\hat{T}$  en  $T$  verificando:

$$P = \{p : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{p} = p \circ F \in \hat{P}\}$$

$$\Sigma = F(\hat{\Sigma})$$

Cuando se puede elegir como aplicación  $F$  una aplicación afín, los elementos finitos se llaman afín equivalentes.

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

**Teorema:** Sean  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  y  $(T, P, \Sigma)$  dos elementos de Lagrange equivalentes y  $F$  una biyección de  $\hat{T}$  en  $T$  verificando la condición de equivalencia.

Si  $\hat{\Pi}$  es el operador de  $\hat{P}$ -interpolación sobre  $\hat{\Sigma}$ , el operador  $\Pi$  de  $P$ -interpolación sobre  $\Sigma$  está caracterizado por

$$(\Pi v) \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F)$$

para toda función  $v$  definida en  $T$ .

#### Ejemplo 1

Veamos como podemos construir una familia de elementos finitos  $(T, P, \Sigma)$  afín equivalentes al elemento finito  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  siguiente:

$\hat{T}$ : Triángulo de  $\mathbb{R}^2$  de vértices  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

$\hat{P}$ : Polinomios de grado 2 en  $\hat{T}$ .

$\hat{\Sigma}$ :  $\{\hat{a}_i\}_{i=1}^6$ , donde  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  son los tres vértices de  $\hat{T}$ , y  $\hat{a}_4, \hat{a}_5, \hat{a}_6$  son los puntos medios de las aristas de  $\hat{T}$ .

Consideremos la aplicación afín  $F$  que lleva los vértices de  $\hat{T}$ ,  $\{\hat{a}_i\}_{i=1,2,3}$  a los vértices  $\{a_i\}_{i=1,2,3}$  de  $T$  respectivamente. Esta aplicación es fácil de construir. Observemos que

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= 1 - \hat{x} - \hat{y} \\ \hat{\lambda}_2 &= \hat{x} \\ \hat{\lambda}_3 &= \hat{y}\end{aligned}$$

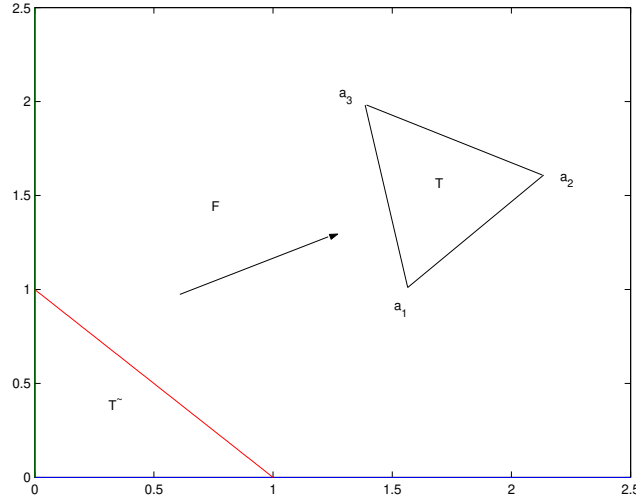
Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \hat{\lambda}_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = (1 - \hat{x} - \hat{y}) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \hat{x} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \hat{y} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

$$= \mathbf{b} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} = F(\hat{\mathbf{x}})$$



La aplicación  $F$  es afín y lleva los vértices a los vértices. Por otra parte si definimos sobre  $T$  las funciones  $p_i = \hat{\lambda}_i \circ F^{-1}$ , para  $i = 1, 2, 3$  son polinomios de grado 1. Resulta

$$p_i(a_j) = (\hat{\lambda}_i \circ F^{-1})(a_j) = \hat{\lambda}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$$

Por lo tanto  $p_i = \lambda_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Tenemos pues que  $\lambda_i(x) = \hat{\lambda}_i(\hat{x})$  donde  $x = F(\hat{x})$ . Es decir  $T = F(\hat{T})$  y los puntos medios de las aristas van a parar a los puntos medios de las aristas. Es inmediato ver que  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  y la familia  $(T, P, \Sigma)$  compuesta por  $T$ , triángulos,  $P$ , polinomios de grado 2 en  $T$  y  $\Sigma$  la unión de vértices y puntos medios de las aristas son afín-equivalentes.

#### **Ejemplo 2: Familias equivalentes a elementos finitos paralelótopos**

Consideremos el cubo unidad  $\hat{T} = [-1, +1]^d$ . Construiremos elementos finitos sobre  $\hat{T}$ ,  $(\hat{T}, \hat{Q}, \hat{\Sigma})$ . Un elemento finito paralelótopo será un elemento finito afín-equivalente a  $(\hat{T}, \hat{Q}, \hat{\Sigma})$ .

**Ejemplo 2.1**

$$\hat{T} = [-1, +1]^2$$

$$\hat{Q} = \{\hat{p} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{x}\hat{y}\}$$

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^4, \text{ los cuatro v\u00e9rtices de } \hat{T}.$$

Veamos cu\u00e1les son las funciones de la base de  $\hat{Q}$  (dual de  $\hat{\Sigma}$ ):

Tenemos  $\dim(\hat{Q}) = \text{card}(\hat{\Sigma}) = 4$ . Observando que la ecuaci\u00f3n de la recta  $\hat{a}_3\hat{a}_4$  es  $\hat{y} = -1$  y de la recta  $\hat{a}_3\hat{a}_2$  es  $\hat{x} = -1$  resulta,

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y})$$

y an\u00e1logamente

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})$$

$$\hat{p}_3 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})$$

$$\hat{p}_4 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})$$

**Ejemplo 2.2**

$$\hat{T} = [-1, +1]^2$$

$$\hat{Q} = \hat{Q}_2 =$$

$$\{\hat{p} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{x}\hat{y} + e\hat{x}^2 + f\hat{y}^2 + g\hat{x}^2\hat{y} + h\hat{x}\hat{y}^2 + k\hat{x}^2\hat{y}^2\}$$

$\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^9$ , donde  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_4$  son los cuatro v\u00e9rtices de  $\hat{T}$  y  $\hat{a}_5, \dots, \hat{a}_8$  son los puntos medios de los lados, y  $\hat{a}_9$  es el centro del cuadrado. Tenemos pues que  $\hat{P}_2 \subset \hat{Q}_2 \subset \hat{P}_4$

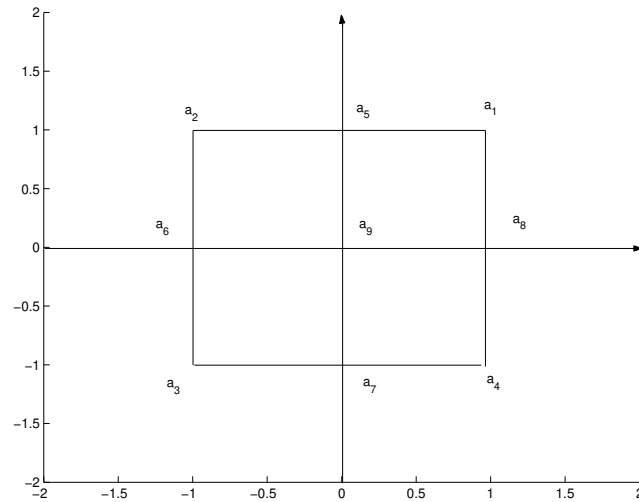
La base ser\u00e1:

- $\hat{p}_1 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y})\hat{x}\hat{y}$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

- $\hat{p}_2 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})\hat{x}\hat{y}$
- $\hat{p}_3 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})\hat{x}\hat{y}$
- $\hat{p}_4 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})\hat{x}\hat{y}$
- $\hat{p}_5 = \frac{1}{2}(1 + \hat{x})(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})\hat{y}$
- $\hat{p}_6 = \frac{1}{2}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})(1 - \hat{y})\hat{x}$
- $\hat{p}_7 = \frac{1}{2}(1 - \hat{x})(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})\hat{y}$
- $\hat{p}_8 = \frac{1}{2}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y})(1 - \hat{y})\hat{x}$
- $\hat{p}_9 = (1 + \hat{x})(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})(1 - \hat{y})$



#### 3.3.5. Construcción de subespacios de $H^1$

En primer lugar veremos como se pueden construir funciones de  $H^1(\Omega)$  a partir de funciones definidas a trozos sobre subconjuntos de  $\Omega$ .

**Teorema:**

Sea  $\bar{\Omega} = \cup_{r=1}^N \bar{\Omega}_r$  una descomposición de  $\bar{\Omega}$  tal que

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

1.  $\Omega_r$  es un abierto de  $\mathbb{R}^d$  contenido en  $\Omega$  de frontera  $\Gamma_r \in C^1$  a trozos para todo  $r = 1, \dots, N$ .
2.  $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$  para  $r \neq s$

Sea  $v$  una función continua en  $\bar{\Omega}$  tal que la restricción  $v|_{\Omega_r}$  pertenece a  $H^1(\Omega_r)$ , para todo  $r = 1, \dots, N$ . Entonces  $v \in H^1(\Omega)$ .

**Demostración:** Sea  $v$  continua en  $\bar{\Omega}$  tal que  $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$ ; Evidentemente  $v \in L^2(\Omega)$ . Hemos de ver que  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, d$

Para ello veamos que  $\frac{\partial v}{\partial x_i} = v_i \in L^2(\Omega)$  donde  $v_i|_{\Omega_r} = \frac{\partial(v|_{\Omega_r})}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_r)$ . En efecto, para toda función  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , tendremos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^N \left( \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi - \int_{\partial \Omega_r} v \varphi \nu_i \right) = \\ &= \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi - \sum_{r=1}^N \int_{\partial \Omega_r} v \varphi \nu_i = \\ &= \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi = \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v_i \varphi = \langle v_i, \varphi \rangle \end{aligned}$$

pues  $v$  es continua. ■

Vamos ahora a construir subespacios de  $H^1(\Omega)$  de dimensión finita.

Sea  $\Omega$  un abierto poliédrico (para simplificar) de  $\mathbb{R}^d$ .

$\bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ , siendo  $\mathcal{T}_h$  una triangulación de  $\Omega$

Suponemos además que cada poliedro  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  está asociado a un elemento finito de Lagrange  $(T, P_T, \Sigma_T)$  tal que  $P_T \subset H^1(T)$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

Definimos el espacio de dimensión finita

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v|_T \in P_T\}$$

Así en virtud del teorema anterior  $V_h$  es un subespacio de  $H^1(\Omega)$ .

Sin hipótesis suplementarias sobre los elementos finitos  $(T, P_T, \Sigma_T)$  no es en modo alguno evidente la determinación de una base de  $V_h$  (pues  $V_h$  es isomorfo a un subespacio propio de  $\Pi_{T \in \mathcal{T}_h} P_T$ ). Por otra parte resulta natural introducir el operador de interpolación  $\Pi_h$  que a toda función continua definida en  $\bar{\Omega}$  le hace corresponder la función  $\Pi_h v$  de  $L^2(\Omega)$  definida por

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall x \in T \quad \Pi_h v(x) = \Pi_T v(x)$$

donde  $\Pi_T$  es el operador de  $P_T$ -interpolación sobre  $\Sigma_T$ . En general sin hipótesis suplementarias sobre el elemento finito  $(T, P_T, \Sigma_T)$ , la función  $\Pi_h v$  no es en general continua sobre  $\bar{\Omega}$  y no pertenece a  $V_h$ . Para evitar esta situación se introduce una *hipótesis de compatibilidad* entre dos elementos finitos:

Supondremos que para todo par  $\{T_1, T_2\}$  de poliedros adyacentes de  $\mathcal{T}_h$ , de cara común  $T' = T_1 \cap T_2$ , tenemos

1.  $P_{T_1}|_{T'} = P_{T_2}|_{T'}$
2.  $\Sigma_{T_1} \cap T' = \Sigma_{T_2} \cap T'$

Además necesitaremos la definición siguiente:

**Definición:** Sea  $T$  un poliedro de  $\mathbb{R}^d$ ; Un elemento finito  $(T, P, \Sigma)$  se llama de clase  $C^0$  si las dos condiciones siguientes se satisfacen:

1.  $P \subset C^0(T)$
2. Para toda cara  $T'$  de  $T$ , el conjunto  $\Sigma' = \Sigma \cap T'$  es  $P'$ -unisolvante donde  $P' = \{p|_{T'}; \quad p \in P\}$ .



### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

**Teorema:** Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación de  $\bar{\Omega}$  y sea  $(T, P_T, \Sigma_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$  una familia de elementos finitos asociada. Suponemos que las condiciones de compatibilidad (1) y (2) anteriores se satisfacen y que para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $(T, P_T, \Sigma_T)$  es un elemento finito de clase  $C^0$  y  $P_T$  es un subespacio de  $H^1(T)$ . Entonces el operador de interpolación  $\Pi_h$ , definido por

$$\Pi_h v(x) = \Pi_T v(x) \quad \forall x \in T \quad T \in \mathcal{T}_h$$

de  $C^0$  en  $L^2(\Omega)$  tiene su imagen en  $C^0(\bar{\Omega})$ . Dicho de otro modo y de manera más precisa

$$V_h = \{\Pi_h v; \quad v \in C^0(\bar{\Omega})\}$$

**Demostración:** Sea  $v$  una función continua definida en  $\bar{\Omega}$ ; la restricción a un elemento cualquiera  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  de la función  $\Pi_h v$  pertenece al espacio  $P_T$ , subespacio de  $C^0(T)$ . Para demostrar que  $\Pi_h v$  pertenece a  $V_h$  basta verificar que  $\Pi_h v$  es continua sobre toda cara  $T'$  común a dos elementos adyacentes  $T_1$  y  $T_2$  de  $\mathcal{T}_h$ , es decir, que tenemos

$$\Pi_{T_1} v|_{T'} = \Pi_{T_2} v|_{T'}$$

Como la función  $w = \Pi_{T_1} v|_{T'} - \Pi_{T_2} v|_{T'}$  es una función del espacio  $P' = P_{T_1}|_{T'} = P_{T_2}|_{T'}$  tal que  $\forall a \in \Sigma' \quad w(a) = 0$  donde  $\Sigma' = \Sigma_{T_1 \cap T'} = \Sigma_{T_2 \cap T'}$ , los elementos finitos son de clase  $C^0$  y  $\Sigma'$  es  $P'$ -unisolvante, deducimos  $w = 0$ . En consecuencia  $\Pi_h v$  es continua sobre  $\bar{\Omega}$ , es decir  $\{\Pi_h v; \quad v \in C^0(\bar{\Omega})\} \subset V_h$ .

Recíprocamente, sea  $v \in V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \quad v|_T \in P_T\}$ , tenemos  $v|_T \in P_T$ , entonces  $v|_T = \Pi_T v$  así pues  $v = \Pi_h v$  y  $v$  es continua pues  $v \in V_h$ . ■

#### Construcción de una base de $V_h$

Introduzcamos el conjunto de nodos de los elementos finitos

$$\Sigma_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T = \{a_i\}_{1 \leq i \leq I} \quad \text{card}(\Sigma_h) = I$$

Para todo entero  $i \quad 1 \leq i \leq I$ , designamos  $\varphi_i$  la función de  $V_h$  tal que

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq I$$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS

---

Si  $v$  es una función continua sobre  $\bar{\Omega}$ , tenemos evidentemente

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^I v(a_i) \varphi_i$$

**Corolario:** Con las hipótesis anteriores el conjunto de funciones  $\{\varphi_i\}_{i=1}^I$  constituyen una base de  $V_h$  y toda función  $v$  de  $V_h$  se escribe

$$v = \sum_{i=1}^I v(a_i) \varphi_i$$

**Definición:** Los escalares  $\{v(a_i)\}_{i=1}^I$  se llaman grados de libertad de una función  $v$  de  $V_h$ .

Observemos que las funciones  $\varphi_i$  tienen pequeño soporte. Más precisamente, el soporte de  $\varphi_i$  es el conjunto de elementos  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  que contienen al nodo  $a_i$ . Además la restricción de  $\varphi_i$  a cada uno de estos elementos  $T$  es una función de la base del elemento finito  $(T, P_T, \Sigma_T)$ .

#### Ejemplos

1.  $\mathcal{T}_h$ , triangulación de  $\bar{\Omega}$  construida mediante  $d$ -simplex. Dado un entero  $k \geq 1$ , se asocia a todo  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  el  $d$ -simplex de tipo  $(k)$ ,  $(T, P_k, \Sigma_k)$ .  $P_k$  es el espacio de polinomios de grado  $k$  en  $T$ . Entonces todo  $(T, P_k, \Sigma_k)$  es de clase  $C^0$  y se verifican las condiciones de compatibilidad siendo aplicable el teorema anterior.
2. Análogo al anterior construyendo  $\mathcal{T}_h$  mediante paralelótopos y elementos finitos del tipo  $(T, Q_k, \Sigma_k)$ , siendo  $Q_k$  el espacio de polinomios de grado  $k$  obtenido mediante producto tensorial del espacio de polinomios de grado  $k$  en cada variable.
3. Mezclando los dos anteriores de manera que en una cara común a un triángulo y a un paralelótopo se cumplan las condiciones de compatibilidad.

# Capítulo 4

## Análisis numérico del Método de Elementos Finitos

### 4.1. Resultados generales de aproximación en espacios de Sobolev

Si  $(T, P, \Sigma)$  es un elemento finito de Lagrange, a toda función  $v$  definida en  $T$ , le hemos asociado una función  $\Pi v$ , función  $P$ -interpolada de Lagrange de  $v$  sobre  $\Sigma$ . Vamos a estudiar en este apartado el error de interpolación  $v - \Pi v$ . Para los problemas elípticos de orden 2, estaremos especialmente interesados en una mayoración de este error en la norma de  $H^1(T)$ ,  $\|v - \Pi v\|_{1,T}$ .

Empezamos por dar algunos resultados generales de aproximación en los espacios de Sobolev. Sea  $T$  una parte compacta de  $\mathbb{R}^d$ , conexa y de interior no vacía. Para simplificar denotamos  $H^m(T)$  al espacio  $H^m(\dot{T})$ , donde  $\dot{T}$  es el interior de  $T$ . Si  $E$  es un subespacio de  $H^m(T)$ , el espacio cociente  $H^m(T)/E$  es el conjunto de clases de equivalencia  $\dot{v}$  de funciones de  $H^m(T)$  módulo la relación de equivalencia

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in E$$

Cuando  $E$  es un subespacio cerrado de  $H^m(T)$ , el espacio  $H^m(T)/E$  provisto

#### 4.1. RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

---

de la norma cociente

$$\|\dot{v}\|_{H^m(T)/E} = \inf_{v \in \dot{v}} \|v\|_{m,T}$$

es un espacio de Hilbert (Dem: ejercicio). En particular, para todo entero,  $k \geq 0$ , el espacio  $P_k$  de los polinomios de grado menor o igual que  $k$  sobre  $T$  es un subespacio de dimensión finita de  $H^{k+1}(T)$ , de manera que podemos introducir el espacio cociente  $H^{k+1}(T)/P_k$ ; vamos a dotar a este espacio de una norma más manejable que la norma cociente. Para ello, habrá que suponer además que la inyección canónica de  $H^1(T)$  en  $L^2(T)$  es compacta; puesto que  $T$  es un acotado de  $\mathbb{R}^d$ , esta propiedad se verifica siempre que la frontera  $\partial T$  es de clase  $C^1$  a trozos.

**Teorema 4.1.** : Sea  $T$  una parte compacta de  $\mathbb{R}^d$ , de frontera  $C^1$  a trozos. Entonces para todo entero  $k \geq 0$  la aplicación

$$\dot{v} \rightarrow |\dot{v}|_{k+1,T} = |v|_{k+1,T} = \left( \sum_{|\alpha|=k+1} \int_T |\partial^\alpha v|^2 \right)^{1/2}$$

donde  $v$  es un representante cualquiera de la clase  $\dot{v}$  en  $H^{k+1}(T)$ , es una norma sobre  $H^{k+1}(T)/P_k$  equivalente a la norma cociente.

**Demostración:**

- Sea  $\dot{v}$  una clase de equivalencia de  $H^{k+1}(T)/P_k$  y sea  $v \in \dot{v}$ . El valor de  $|\dot{v}|_{k+1,T}$  no depende del representante elegido. En efecto,

$$\forall p \in P_k \quad |v|_{k+1,T} = |v + p|_{k+1,T}$$

- Tenemos evidentemente

$$|\dot{v}|_{k+1,T} \leq \|\dot{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k}$$

en efecto, para todo  $v \in \dot{v}$

$$|\dot{v}|_{k+1,T} = |v|_{k+1,T} \leq \|v\|_{k+1,T}$$

y tomando el ínf para todo  $v \in \dot{v}$  obtenemos el resultado.

- Para obtener la equivalencia de normas resta establecer la existencia de una constante  $C$  tal que

$$\|\dot{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k} \leq C|\dot{v}|_{k+1,T}$$

para todo elemento  $\dot{v}$  de  $H^{k+1}(T)/P_k$ . Empezamos por demostrar la existencia de una constante  $C$  tal que

$$\|v\|_{k+1,T} \leq C\{ |v|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} (\int_T \partial^\alpha v dx)^2 \}^{1/2}$$

para toda función  $v \in H^{k+1}(T)$ . Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que para todo entero positivo  $n$  existe una función  $\tilde{v}_n$  tal que

$$|\tilde{v}_n|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} (\int_T \partial^\alpha \tilde{v}_n dx)^2 < \frac{1}{n^2} \|\tilde{v}_n\|_{k+1,T}^2$$

poniendo

$$v_n = \frac{\tilde{v}_n}{\|\tilde{v}_n\|_{k+1,T}}$$

obtenemos una sucesión  $\{v_n\}$  verificando

$$\|v_n\|_{k+1,T} = 1 \tag{4.1.1}$$

$$|v_n|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} (\int_T \partial^\alpha v_n)^2 < \frac{1}{n^2} \tag{4.1.2}$$

Si la inyección de  $H^1(T)$  en  $L^2$  es compacta, también la inyección de  $H^{k+1}(T)$  en  $H^k(T)$  es compacta. Entonces de (4.1.1), deducimos la existencia de una subsucesión  $v_\mu$  convergente en  $H^k(T)$ . Por una parte de (4.1.2) resulta

$$|v_\mu|_{k+1,T} < \frac{1}{\mu}$$

de modo que

$$v_\mu \rightarrow v \quad \text{en} \quad H^k(T)$$

4.1. RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

---

$$\forall \alpha, \quad |\alpha| = k + 1 \quad \partial^\alpha v_\mu \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad L^2(T)$$

por la continuidad de la derivación en el sentido de las distribuciones también

$$\partial^\alpha v_\mu \rightarrow \partial^\alpha v$$

para todo  $\alpha$ ,  $|\alpha| = k + 1$ . De modo que  $\partial^\alpha v = 0$  para  $|\alpha| = k + 1$  y  $v \in H^{k+1}(T)$ . Por otra parte

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| \leq k \quad \left| \int_T \partial^\alpha v_\mu \right| < \frac{1}{\mu}$$

pasando al límite cuando  $\mu \rightarrow \infty$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| \leq k \quad \int_T \partial^\alpha v = 0$$

como  $T$  es una parte conexa de  $\mathbb{R}^d$ , las relaciones

$$\partial^\alpha v = 0 \quad \forall \alpha \quad |\alpha| = k + 1$$

implican que  $v$  es un polinomio de grado  $k$  sobre  $T$ . Y de las relaciones

$$\int_T \partial^\alpha v = 0 \quad \forall \alpha \quad |\alpha| \leq k$$

deducimos  $v = 0$ . Pero esto contardice la elección  $\|v_n\|_{k+1,T} = 1$ .

Finalmente consideremos  $\dot{v} \in H^{k+1}(T)/P_k$  y sea  $\bar{v}$  un representante cualquiera de  $\dot{v}$  en  $H^{k+1}(T)$ . A esta función  $\bar{v}$  le podemos asociar el polinomio  $p \in P_k$  definido de manera única por las relaciones

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad |\alpha| \leq k, \quad \int_T \partial^\alpha p = - \int_T \partial^\alpha \bar{v}$$

Entonces  $v = \bar{v} + p$  es el representante de  $\dot{v}$  tal que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad |\alpha| \leq k \quad \int_T \partial^\alpha v = 0$$

Para este  $v$  tendremos

$$\|v\|_{k+1,T} \leq C \left\{ \|v\|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} \left( \int_T \partial^\alpha v \right)^2 \right\}^{1/2} = C \|v\|_{k+1,T}$$

y deducimos

$$\|\dot{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k} \leq \|v\|_{k+1,T} \leq C|v|_{k+1,T} = C|\dot{v}|_{k+1,T}$$

lo que termina la demostración. ■

A partir del teorema anterior obtenemos el siguiente teorema general de aproximación en los espacios de Sobolev.

**Teorema 4.2.** de Aproximación I: Sea  $T$  una parte compacta y conexa de  $\mathbb{R}^d$  de interior no vacío de frontera  $C^1$  a trozos y sea  $\Pi$  un operador lineal continuo de  $H^{k+1}(T)$  en  $H^m(T)$ ,  $0 \leq m \leq k+1$ , tal que

$$\forall p \in P_k, \quad \Pi p = p$$

Entonces existe una constante  $c = c(T, \Pi)$  tal que

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \quad \|v - \Pi v\|_{m,T} \leq c|v|_{k+1,T}$$

**Demostración:** Sea  $v \in H^{k+1}(T)$ , de la hipótesis hecha sobre  $\Pi$ , para todo  $p \in P_k$

$$v - \Pi v = v + p - \Pi p - \Pi v = (I - \Pi)(v + p)$$

de donde

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq \|I - \Pi\|_* \|v + p\|_{k+1,T}$$

donde  $\|\cdot\|_*$  designa la norma en el espacio  $\mathcal{L}(H^{k+1}(T), H^m(T))$ . Resulta

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq C_1 \inf_{p \in P_k} \|v + p\|_{k+1,T} = C_1 \|\dot{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k}$$

con  $C_1 = \|I - \Pi\|_*$ . Finalmente gracias al teorema anterior

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq C_1 C |v|_{k+1,T} \quad \forall v \in H^{k+1}(T)$$

El teorema queda demostrado tomando  $c = C_1 C$ . ■

El siguiente paso consiste en poner en forma explícita la dependencia de la constante  $c$  en función de las características geométricas de  $T$ . Para ello vamos a introducir una parte compacta  $\hat{T}$  de  $\mathbb{R}^d$ , conexa y de frontera  $C^1$  a

#### 4.1. RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

---

trozos, que nos va a servir de dominio de referencia. Suponemos que existe una transformación afín invertible

$$x = F(\hat{x}) = \mathbf{B}\hat{x} + \mathbf{b}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{B}, \text{ matriz } d \times d$$

tal que  $T = F(\hat{T})$ .

Adoptamos las siguientes definiciones:

- A toda función  $v$  definida sobre  $T$ , le asociamos biunívocamente la función  $\hat{v}$  definida sobre  $\hat{T}$  por las relaciones

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x) \quad \forall \hat{x} \in \hat{T}$$

es decir,  $\hat{v} = v \circ F$ .

- Introducimos las siguientes características geométricas
  - $h_T =$  diámetro de  $T$  (resp.  $\hat{h} =$  diámetro de  $\hat{T}$ ).
  - $\rho_T =$  diámetro máximo de las esferas (círculos si  $d = 2$ ) contenidas en  $T$  (resp.  $\hat{\rho}$  diámetro máximo de las esferas contenidas en  $\hat{T}$ ).

Podemos estimar las normas espectrales  $\|B\|$  y  $\|B^{-1}\|$  en función de las características geométricas de  $T$  y  $\hat{T}$ ; recordemos que la norma de una matriz  $B$  está definida por

$$\|\mathbf{B}\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, \xi \neq 0} \frac{|\mathbf{B}\xi|}{|\xi|} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| \leq 1} |\mathbf{B}\xi| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi|=1} |\mathbf{B}\xi|$$

donde  $|\xi|$  designa la norma euclídea del vector  $\xi$  de  $\mathbb{R}^d$ .

**Lema:** Se verifican las siguientes mayoraciones

- $\|\mathbf{B}\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}}$
- $\|\mathbf{B}^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_T}$



**Demostración:** Podemos escribir

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{|\xi|=\hat{\rho}} |\mathbf{B}\xi|$$

Sea  $\xi$  un vector de  $\mathbb{R}^d$  tal que  $|\xi| = \hat{\rho}$ ; por definición de  $\hat{\rho}$ , diámetro máximo de las esferas contenidas en  $\hat{T}$ , existen dos puntos  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  de  $\hat{T}$  tales que  $\xi = \hat{y} - \hat{z}$ . Entonces

$$\mathbf{B}\xi = \mathbf{B}\hat{y} - \mathbf{B}\hat{z} = F(\hat{y}) - F(\hat{z}) = y - z$$

donde los puntos  $y$  y  $z$  pertenecen a  $T$ ; por definición de  $h_T$  resulta

$$|\mathbf{B}\xi| = |y - z| \leq h_T$$

Esta desigualdad es válida para todo  $\xi$  con  $|\xi| = \hat{\rho}$ , por tanto, tomando el supremo y dividiendo por  $\hat{\rho}$

$$\|\mathbf{B}\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}}$$

Lo que prueba la primera desigualdad. Intercambiando los papeles de  $T$  y  $\hat{T}$  se obtiene la otra desigualdad.

**Teorema 4.3.** de Aproximación II: Sea  $\hat{T}$  una parte compacta y conexa de  $\mathbb{R}^d$  de frontera  $C^1$  a trozos y sea  $\hat{\Pi}$  un operador lineal continuo de  $H^{k+1}(\hat{T})$  en  $H^m(\hat{T})$ ,  $0 \leq m \leq k+1$  tal que

$$\forall \hat{p} \in P_k \quad \hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}$$

Si  $T$  es una parte de  $\mathbb{R}^d$  tal que existe una transformación afín invertible  $F$  de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}^d$  para la cual  $T = F(\hat{T})$  y el operador  $\Pi$  está definido por

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \quad \widehat{\Pi}v = \hat{\Pi}\hat{v}$$

Entonces existe una constante  $C$  independiente de  $F$  tal que

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \quad |v - \Pi v|_{m,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}$$

#### 4.1. RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

---

La constante  $C$  depende de  $\hat{T}$  y por tanto de  $d$ , de  $\hat{\Pi}$  y por tanto de  $k$  y de  $m$ ; la novedad reside en que la constante  $C$  es independiente de  $F$  y por tanto de las características geométricas de  $T$ . Para la demostración será útil utilizar la noción de diferencial de Fréchet de una función.

Recordemos, si  $v$  es una función definida en un entorno de un punto  $x \in \mathbb{R}^d$  y diferenciable (en sentido clásico)  $l$  veces, se denota  $D^l v(x)$  a su diferencial de orden  $l$  que es una forma  $l$ -multilineal simétrica sobre  $\mathbb{R}^d$

$$D^l v(x) : \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D^l(v(x))(\xi_1, \dots, \xi_l) \in \mathbb{R} \quad \xi_i \in \mathbb{R}^d \quad i = 1, \dots, l$$

$$\|D^l v(x)\| = \sup_{\xi_1, \dots, \xi_l \in \mathbb{R}^d, \xi_1, \dots, \xi_l \neq 0} \frac{|D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l)|}{|\xi_1| \dots |\xi_l|}$$

donde  $|\xi|$  designa la norma euclídea de  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

Por otra parte recordemos la notación  $l = |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ , y

$$\partial^\alpha v(x) = D^l v(x)(e_1, \dots, e_1, \dots, e_d, \dots, e_d)$$

donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . Demostraremos primeramente el siguiente

**Lema:** Existen dos constantes  $\gamma_1 = \gamma_1(l, d)$  y  $\gamma_2 = \gamma_2(l, d)$  mayores que cero tales que

$$\forall v \in \mathcal{D}(T) \quad \gamma_1 |v|_{l,T} \leq \left( \int_T \|D^l v(x)\|^2 dx \right)^{1/2} \leq \gamma_2 |v|_{l,T}$$

**Demostración:** Sea  $\alpha$  un multientero y  $|\alpha| = l$ , se tiene

$$|\partial^\alpha v(x)| \leq \|D^l v(x)\| |e_1|^{\alpha_1} \dots |e_d|^{\alpha_d} = \|D^l v(x)\|$$

de modo que

$$\left( \sum_{|\alpha|=l} \int_T |\partial^\alpha v(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{|\alpha|=l} \int_T \|D^l v(x)\|^2 \right)^{1/2}$$

4.1. RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

---

de donde

$$\left(\sum_{|\alpha|=l} \int_T |\partial^\alpha v(x)|^2\right)^{1/2} \leq C \left(\int_T \|D^l v(x)\|^2\right)^{1/2}$$

donde  $C = \sqrt{\text{card}\{\alpha; |\alpha| = l\}}$  y  $\gamma_1 = \frac{1}{C}$ . Por otra parte

$$\|D^l v(x)\| = \sup_{\xi_1, \dots, \xi_l \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\xi_1| = \dots = |\xi_l| = 1} |D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l)|$$

poniendo  $\xi_i = \sum_{k=1}^d \xi_i^k e_k \quad i = 1, \dots, l$

$$D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l) = \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} D^l v(x)(e_{k_1}, \dots, e_{k_l}) = \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \partial^\alpha v(x)$$

donde  $\partial^\alpha v(x)$  designa una de las derivadas parciales de  $v$  de orden  $|\alpha| = l$ .

$$|D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l)| = \left| \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \partial^\alpha v(x) \right| \leq \left| \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \right| \max_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha v(x)|$$

ahora bien, como los vectores  $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^d) \in \mathbb{R}^d \quad i = 1, \dots, l$  son de norma unidad, es decir,  $\sum_{k=1}^d (\xi_i^k)^2 = 1$  resulta  $|\xi_i^k| \leq 1$  para  $k = 1, \dots, d$  e  $i = 1, \dots, l$ , de modo que

$$\left| \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \right| \leq \sum_{k_1, \dots, k_l} |\xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l}| \leq \sum_{k_1, \dots, k_l} 1 = \gamma_2(l, d) = d^l$$

así pues:

$$\|D^l v(x)\| \leq \gamma_2(l, d) \max_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha v(x)|$$

de donde

$$\left(\int_T \|D^l v(x)\|^2\right)^{1/2} \leq \gamma_2(l, d) \left(\int_T \left(\max_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha v(x)|\right)^2\right)^{1/2} \leq \gamma_2(l, d) \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_T |\partial^\alpha v(x)|^2\right)^{1/2}$$

■

4.1. RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

---

**Demostración** del teorema: Sea  $v \in \mathcal{D}(T)$  y  $\hat{v} = v \circ F$  donde  $F$  es una aplicación afín invertible, es decir,  $x = F(\hat{x}) = \mathbf{B}\hat{x} + \mathbf{b}$ , siendo  $\mathbf{B}$  una matriz invertible de orden  $d \times d$ . Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} D^l \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_l) &= D^l(v \circ F)(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_l) \\ &= D^l(v(F(\hat{x})))(\mathbf{B}\xi_1, \dots, \mathbf{B}\xi_l) = D^l v(x)(\mathbf{B}\xi_1, \dots, \mathbf{B}\xi_l) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\| &= \sup_{|\xi_1|=\dots=|\xi_l|=1} |D^l \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_l)| = \sup_{|\xi_1|=\dots=|\xi_l|=1} |D^l v(x)(\mathbf{B}\xi_1, \dots, \mathbf{B}\xi_l)| \\ &\leq \|D^l v(x)\| \|\mathbf{B}\|^l \end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_{\hat{T}} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x} \leq \|\mathbf{B}\|^{2l} \int_{\hat{T}} \|D^l(v \circ F)(\hat{x})\|^2 d\hat{x}$$

utilizando la fórmula del cambio de variable bajo el signo integral

$$\int_{\hat{T}} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x} \leq \|\mathbf{B}\|^{2l} |\det \mathbf{B}|^{-1} \int_T \|D^l v(x)\|^2 dx$$

Obtenemos así, aplicando el lema anterior

$$\forall v \in \mathcal{D}(T) \quad |\hat{v}|_{l, \hat{T}} \leq \gamma \|\mathbf{B}\|^l |\det \mathbf{B}|^{-1/2} |v|_{l, T}$$

donde  $\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} > 0$ ,  $\gamma = \gamma(l, d)$ .

Como  $\mathcal{D}(T)$  es denso en  $H^l(T)$ , deducimos

$$\forall v \in H^l(T) \quad |\hat{v}|_{l, \hat{T}} \leq \gamma \|\mathbf{B}\|^l |\det \mathbf{B}|^{-1/2} |v|_{l, T}$$

intercambiando los papeles de  $T$  y de  $\hat{T}$ , obtenemos análogamente

$$\forall \hat{v} \in H^l(\hat{T}) \quad |v|_{l, T} \leq \gamma \|\mathbf{B}^{-1}\|^l |\det \mathbf{B}|^{1/2} |\hat{v}|_{l, \hat{T}}$$

Sea finalmente una función  $v \in H^{k+1}(T)$ , aplicando el último resultado a  $v - \Pi v$

$$|v - \Pi v|_{m, T} \leq \gamma(m, d) \|\mathbf{B}^{-1}\|^m |\det \mathbf{B}|^{1/2} |\hat{v} - \widehat{\Pi v}|_{m, \hat{T}}$$

4.1. RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

---

por el teorema de aproximación y como  $\widehat{\Pi}v = \hat{\Pi}\hat{v}$

$$|\hat{v} - \widehat{\Pi}v|_{m,\hat{T}} = |\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{T}} \leq C|\hat{v}|_{k+1,\hat{T}}$$

donde  $C = C(\hat{\Pi}, \hat{T})$ . Como

$$|\hat{v}|_{k+1,\hat{T}} \leq \gamma(k+1, d) \|\mathbf{B}\|^{k+1} |\det \mathbf{B}|^{-1/2} |v|_{k+1,T}$$

resulta

$$|v - \Pi v|_{m,T} \leq C(\hat{\Pi}, \hat{T}) \gamma(m, d) \gamma(k+1, d) \|\mathbf{B}^{-1}\|^m \|\mathbf{B}\|^{k+1} |v|_{k+1,T}$$

y como  $\|\mathbf{B}\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}}$ ,  $\|\mathbf{B}^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_T}$

$$|v - \Pi v|_{m,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}$$

donde  $C = C(\hat{\Pi}, \hat{T}) \gamma(m, d) \gamma(k+1, d) \frac{\hat{h}^m}{\hat{\rho}^{k+1}}$ . ■

**Corolario:** Consideremos ahora todos los valores  $l$ ,  $0 \leq l \leq m$  y los operadores  $\Pi_l = I \circ \Pi$  definidos por

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_l : & H^{k+1}(T) & \longrightarrow & H^m(T) & \longrightarrow & H^l(T) \\ & v & \longrightarrow & \Pi v & \longrightarrow & \Pi v \end{array}$$

entonces

$$|v - \Pi v|_{l,T} = |v - \Pi_l v|_{l,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^l} |v|_{k+1,T} \quad \forall v \in H^{k+1}(T) \quad \forall l, \quad 0 \leq l \leq m$$

$$l = 0 \quad |v - \Pi v|_{0,T} \leq C_0 \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^0} |v|_{k+1,T}$$

$$l = 1 \quad |v - \Pi v|_{1,T} \leq C_1 \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T} |v|_{k+1,T}$$

...

$$l = m \quad |v - \Pi v|_{m,T} \leq C_m \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}$$

elevando al cuadrado, sumando y sacando la raíz cuadrada

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq C_* \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}$$

donde  $C_* = (\sum_{l=0}^m C_l^2 \rho_T^{2(m-l)})^{1/2}$ . La constante  $C_*$  se puede mayorar por una constante independiente de las características geométricas de  $T$ , si consideramos solo elementos  $T$  suficientemente pequeños, por ejemplo de diámetro inferior a 1, para los cuales evidentemente el diámetro de la circunferencia inscrita será menor que 1. ■

## 4.2. Aplicación al análisis numérico del M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden

Consideraremos el caso de  $\Omega$  un abierto poliédrico de  $\mathbb{R}^d$ .

- $\{\mathcal{T}_h\}$ , triangulaciones de  $\Omega$ , según se ha definido en el Capítulo 3 subsección 3.2.1.
- $(T, P_T, \Sigma_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$  una familia de elementos finitos asociada a cada  $\mathcal{T}_h$ , afín equivalentes a un elemento finito de referencia  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ .
- $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$  para cada  $\mathcal{T}_h$ .
- $\{\mathcal{T}_h\}$  será una familia regular de triangulaciones, es decir, existe una constante  $\sigma \geq 1$  tal que

$$\forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\} \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$$

**Comentario:** En dimensión  $d = 2$  si  $\hat{T}$  es un triángulo la última propiedad es equivalente a la existencia de un ángulo  $\theta_0 > 0$  tal que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \quad \theta_T \geq \theta_0$$

4.2. APLICACIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO DEL M.E.F. EN  
PROBLEMAS ELÍPTICOS DE SEGUNDO ORDEN

---

donde  $\theta_T$  es el ángulo menor del elemento  $T$ .

**Comentario:** El operador  $\hat{\Pi}$  de  $\hat{P}$ -interpolación sobre  $\hat{\Sigma}$  es lineal continuo de  $H^{k+1}(\hat{T})$  en  $H^m(\hat{T})$  si  $k \geq 1$ ,  $d \leq 3$ ,  $m \leq k + 1$  y  $\hat{P} \subset H^m(\hat{T})$ . En efecto, si  $d \leq 3$  la aplicación

$$\begin{array}{ccc} H^{k+1}(\hat{T}) & \longrightarrow & C^0(\hat{T}) \\ v & \longrightarrow & v \end{array}$$

es continua y  $\|v\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq C\|v\|_{k+1,\hat{T}}$ . Además para todo  $v \in H^{k+1}(\hat{T})$  tenemos  $\hat{\Pi}v \in \hat{P} \subset H^m(\hat{T})$ . En consecuencia

$$\|\hat{\Pi}v\|_{m,\hat{T}} = \left\| \sum v(a_i)\phi_i \right\|_{m,\hat{T}} \leq \sum |v(a_i)| \cdot \|\phi_i\|_{m,\hat{T}} \leq C\|v\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq C\|v\|_{k+1,\hat{T}}$$

Observemos que si  $\hat{P}$  es un espacio de polinomios se verifica que  $\hat{P} \subset H^m(\hat{T})$ .

Consideremos un problema modelo  $\mathcal{P}$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} a(u, v) = l(v) & \forall v \in V \\ u \in V \end{array}$$

donde supondremos que  $V = H^1(\Omega)$  o  $V = H_0^1(\Omega)$  o un espacio intermedio entre los dos. Con las hipótesis sobre  $a(\cdot, \cdot)$  y  $l(\cdot)$  del teorema de Lax-Milgram. El problema aproximado  $\mathcal{P}_h$  será

$$\begin{array}{ccc} a(u_h, v_h) = l(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h \end{array}$$

donde

$$V_h = X_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \quad v|_T \in P_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

o bien

$$V_h = X_h \cap H_0^1(\Omega)$$

o bien

$$V_h = X_h \cap V$$

en caso de que  $V$  sea un espacio intermedio entre  $H^1(\Omega)$  y  $H_0^1(\Omega)$ .

4.2. APLICACIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO DEL M.E.F. EN  
PROBLEMAS ELÍPTICOS DE SEGUNDO ORDEN

---

El objetivo es estimar el error  $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ . Sabemos  $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}$ . Como  $\Pi_h u \in V_h$  tenemos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}$$

donde  $\Pi_h$  es el operador de interpolación definido sobre  $\Sigma = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T$ . Esto es factible si podemos construir  $\Pi_h u$ . Para ello necesitamos cierta regularidad de  $u$ .

**Teorema 4.4.** : sea  $\Omega$  un abierto poliédrico de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \leq 3$ . Sea  $\{\mathcal{T}_h\}$  una familia regular de triangulaciones de  $\bar{\Omega}$  asociada a un elemento finito de referencia  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  de clase  $C^0$ . Supongamos que existe un entero  $k \geq 1$  para el cual tenemos

$$P_k \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{T})$$

Entonces el Método de Elementos Finitos es convergente, es decir, la solución  $u_h$  del problema aproximado converge hacia la solución  $u$  del problema  $(\mathcal{P})$  en la norma de  $H^1(\Omega)$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$$

Además, si la solución  $u$  de  $(\mathcal{P})$  pertenece al espacio de Sobolev  $H^{k+1}(\Omega)$  tenemos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Se dice entonces que el método es de orden  $k$ .

**Demostración:** Empezamos demostrando el caso en que  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ . Si  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  entonces  $u \in C(\bar{\Omega})$  para  $k \geq 1$ ,  $d \leq 3$ . Entonces podemos construir el operador de interpolación  $\Pi_h$ . Tenemos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}$$

con  $C_1 = \frac{M}{\alpha}$ . Considerando la restricción  $\Pi_h u|_T = \Pi_T u$  para todo  $T \in \mathcal{T}_h$  tenemos

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_T u\|_{1,T}^2 \right)^{1/2}$$



4.2. APLICACIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO DEL M.E.F. EN  
PROBLEMAS ELÍPTICOS DE SEGUNDO ORDEN

---

Por el teorema de aproximación II, existen dos constantes  $C_2$  y  $C_3$  que dependen únicamente del elemento de referencia  $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  tales que

$$|u - \Pi_T u|_{1,T} \leq C_2 \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T} |u|_{k+1,T}$$

$$\|u - \Pi_T u\|_{0,T} \leq C_3 \frac{h_T^{k+1}}{\rho^0} |u|_{k+1,T} = C_3 h_T^{k+1} |u|_{k+1,T}$$

Como la triangulación  $\mathcal{T}_h$  es regular  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$ , es decir  $\frac{1}{\rho_T} \leq \frac{\sigma}{h_T}$ , de donde

$$|u - \Pi_T u|_{1,T} \leq C_2 \sigma h_T^k |u|_{k+1,T}$$

$$\|u - \Pi_T u\|_{0,T} \leq C_3 \text{diam}(\bar{\Omega}) h_T^k |u|_{k+1,T}$$

y

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_T u\|_{1,T}^2 &= |u - \Pi_T u|_{1,T}^2 + \|u - \Pi_T u\|_{0,T}^2 \\ &\leq (C_2^2 \sigma^2 + C_3^2 (\text{diam}(\bar{\Omega}))^2) h_T^{2k} |u|_{k+1,T}^2 \end{aligned}$$

$$\|u - \Pi_T u\|_{1,T} \leq C_4 h_T^k |u|_{k+1,T}$$

donde  $C_4 = (C_2^2 \sigma^2 + C_3^2 (\text{diam}(\bar{\Omega}))^2)^{1/2}$  Finalmente

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leq C_4 h^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Para demostrar que el método converge aunque la función  $u$  no sea regular, tomemos  $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  si  $V = H^1(\Omega)$  o intermedio entre  $H^1(\Omega)$  y  $H_0^1(\Omega)$ . Tomamos  $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)$  si  $V = H_0^1(\Omega)$ . Entonces  $\mathcal{V}$  es denso en  $V$  y  $\Pi_h$  está definido en  $\mathcal{V}$ ,  $\Pi_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$ . Tenemos por la primera parte de la demostración

$$\forall v \in \mathcal{V} \quad \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch |v|_{2,\Omega}$$

es decir  $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} = 0$ . Por otra parte como  $\mathcal{V}$  es denso en  $V$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe un elemento  $v \in \mathcal{V}$  tal que

$$\|u - v\|_{1,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

y para este  $v$ , existe un número  $h(\varepsilon) > 0$  tal que  $\forall h \leq h(\varepsilon) \quad \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$ . Entonces para  $h$  suficientemente pequeño

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C (\|u - v\|_{1,\Omega} + \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega}) \leq C \left( \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \right) = \varepsilon$$

■

# Capítulo 5

## Aspectos prácticos y programación del M.E.F.

### 5.1. Un Método de Elementos Finitos para el problema de Poisson

Consideraremos el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \quad (5.1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad (5.1.2)$$

donde  $f$  es una función dada, definida en  $\Omega$ .

Un gran número de problemas en física y mecánica se modelan mediante esta ecuación.  $u$  puede representar por ejemplo la temperatura de un cuerpo, el potencial electromagnético, el desplazamiento de una membrana elástica fija en su contorno y sometida a una fuerza.

Siguiendo los pasos en el tratamiento del problema modelo unidimensional del capítulo 1, introduciremos una formulación débil del problema (5.1.1-5.1.2). Para ello introducimos un espacio de funciones definidas en  $\Omega$  y para las cuales tengan sentido las operaciones que vamos a realizar, en este caso,  $V = H_0^1(\Omega)$ .

5.1. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

---

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (5.1.1) por una función  $v \in V$  cualquiera e integrando aplicando la fórmula de Green resulta teniendo en cuenta que  $v = 0$  en  $\Gamma$  que  $u$  es solución del siguiente problema:

Hallar  $u \in V$  tal que verifique,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v \, dx_1 dx_2 \quad (5.1.3)$$

para toda función  $v \in V$

Evidentemente toda solución del problema (5.1.1-5.1.2) será solución de (5.1.3). Recíprocamente si  $u$  es solución del problema (5.1.3) entonces  $u$  será solución del problema de partida (5.1.1-5.1.2), interpretando las derivadas en el sentido de las distribuciones. Vamos a construir un método numérico para calcular en la práctica una aproximación de la solución de (5.1.3). Empezamos introduciendo un subespacio de  $V$  que sea de dimensión finita y elegiremos una base de este espacio de modo que las funciones del mismo sean fáciles de manejar. Para simplificar supondremos que la frontera  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  es poligonal. Construyamos una triangulación  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , subdividiendo  $\Omega$  en un conjunto de triángulos  $\mathcal{T}_h = \{T_e\}_{e=1,\dots,E}$  de modo que  $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1,\dots,E} T_e$ , que los triángulos no se superpongan, y que las aristas de cada triángulo sea bien la arista de otro triángulo o una parte de la frontera poligonal  $\Gamma$ . Ver un ejemplo en la figura 5.1. A cada mallado o triangulación  $\mathcal{T}_h$  le asociamos el parámetro  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$ , donde  $\text{diam}(T) =$  diámetro de  $T =$  lado mayor de  $T$ .

Definimos ahora  $V_h$  como sigue:

$$V_h = \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas; } v_h|_T \in P_1(x_1, x_2); v_h = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

donde  $P_1(x_1, x_2)$  designa el conjunto de polinomios de grado 1 de dos variables. El espacio  $V_h$  consiste en todas las funciones continuas que son lineales en cada triángulo de la triangulación  $\mathcal{T}_h$  y que se anulan en la frontera  $\Gamma$ . Observemos que  $V_h \in V$ . Como parámetros para describir una función  $v_h$  de  $V_h$  elegimos los valores  $v_h(p_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$  de  $v_h$  en los puntos  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , vértices de la triangulación  $\mathcal{T}_h$ , excluyendo los vértices situados en la frontera  $\Gamma$ , puesto que  $v_h = 0$  sobre  $\Gamma$ . Las correspondientes funciones de la base

5.1. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

---

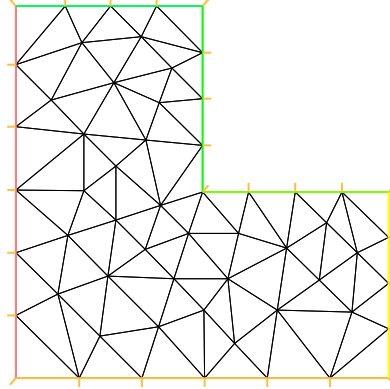


Figura 5.1: Ejemplo de triangulación

$\varphi_j \in V_h, j = 1, \dots, M$ , están definidas por

$$\varphi_j(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Una función típica de la base se representa en la figura 5.2

Estamos en disposición de formular el correspondiente problema aproximado del problema(5.1.3): Hallar  $u_h \in V_h$  tal que verifique,

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v_h \, dx_1 dx_2 \quad (5.1.4)$$

para toda función  $v_h \in V_h$ .

En la práctica el problema (5.1.4) se reduce a resolver el siguiente sistema lineal algebraico de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (5.1.5)$$

donde  $\mathbf{A}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i \, dx_1 dx_2$ ,  $b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx_1 dx_2$  y el vector solución  $\mathbf{u} = (u_j)_{j=1, \dots, M}$ , donde  $u_j = u_h(p_j)$  son los coeficientes de la combinación lineal de elementos de la base de  $V_h$  representando  $u_h$ , es decir,  $u_h(x_1, x_2) = \sum_{j=1, \dots, M} u_h(p_j) \varphi_j(x_1, x_2)$ , siendo  $p_j, j = 1, \dots, M$  los vértices de la triangulación que no están en la frontera  $\Gamma$ .

5.1. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

---

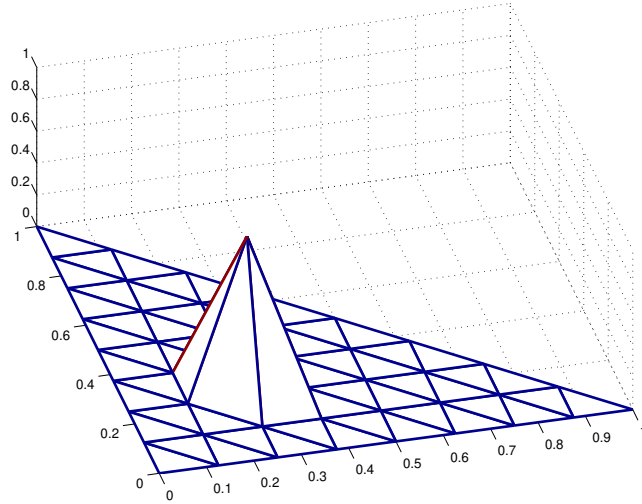


Figura 5.2: Ejemplo de una función base

El cálculo de los términos de la matriz  $\mathbf{A}$  y del segundo miembro  $\mathbf{b}$  se realiza sumando las contribuciones de la integral en cada elemento  $T$  de la triangulación, así:

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{A}_{ij}^T$$

donde

$$\mathbf{A}_{ij}^T = \int_T \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i \, dx_1 dx_2$$

y

$$\mathbf{b}_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{b}_i^T$$

donde

$$\mathbf{b}_i^T = \int_T f \varphi_i \, dx_1 dx_2$$

Los pasos a dar en la resolución de un problema mediante el método de elementos finitos con la ayuda de un ordenador son:

1. Entrada de datos  $f$ ,  $\Omega$ , etc.

### 5.1. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

---

2. Construcción y representación de la triangulación o mallado.
3. Cálculo de las matrices elementales  $\mathbf{A}^T$  y de los vectores segundo miembro  $\mathbf{b}^T$
4. Ensamblaje de la matriz global del sistema  $\mathbf{A}$  por suma de las matrices elementales  $\mathbf{A}^T$  y del vector segundo miembro  $\mathbf{b}$  por suma de los vectores elementales  $\mathbf{b}^T$ .
5. Resolución del sistema algebraico  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ .
6. Presentación y visualización de resultados.

Vamos a precisar con algo más de detalle el paso 3 y el 4. En primer lugar para calcular las integrales  $\mathbf{A}_{ij}^T$  necesitaremos la expresión explícita de las funciones de la base  $\varphi_i$ , o más concretamente, la restricción a  $T$  de las funciones  $\varphi_i$ . Observemos primero que sólo un número reducido de las funciones de la base son distintas de cero en cada triángulo  $T$ , en efecto, la función  $\varphi_i$  será distinta de cero en el triángulo  $T$  si y sólo si  $p_i$  es un vértice de  $T$ . Para fijar las ideas, consideremos un triángulo genérico  $T$  de vértices  $a_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (para no manejar un excesivo número de índices utilizaré aquí la notación  $(x, y)$  para designar las coordenadas cartesianas en  $\mathbb{R}^2$ ). Sólo hay tres funciones de la base de  $V_h$  cuya restricción a  $T$  sea distinta de cero. Son las funciones  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , polinomios de dos variables de grado 1 en  $T$  y que verifican (figuras 5.3, 5.4, 5.5)

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

La función  $\lambda_1 = a + bx + cy$  se puede determinar resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cy_1 &= 1 \\ a + bx_2 + cy_2 &= 0 \\ a + bx_3 + cy_3 &= 0 \end{aligned}$$

5.1. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

---

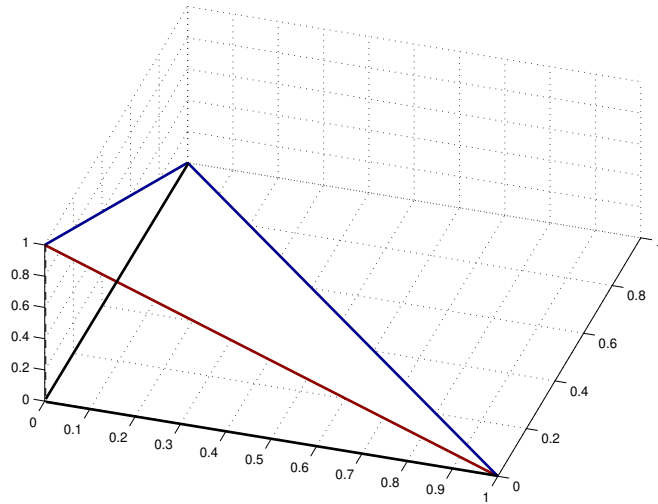


Figura 5.3: función  $\lambda_1$

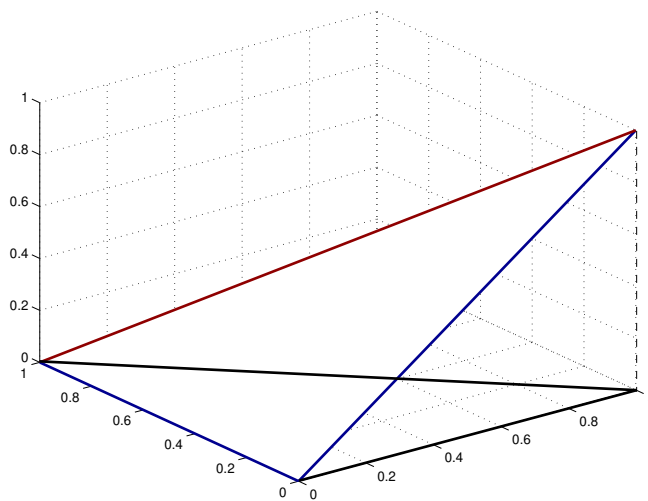


Figura 5.4: función  $\lambda_2$

## 5.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

---

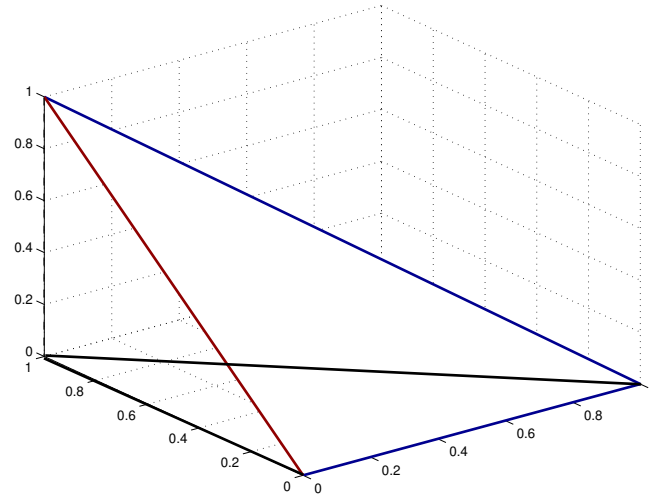


Figura 5.5: función  $\lambda_3$

y análogamente para las funciones  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ . Observemos que si  $K$  es el triángulo de vértices  $a_1 = (0, 0)$ ,  $a_2 = (1, 0)$  y  $a_3 = (0, 1)$ , entonces las funciones  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  tienen una expresión muy sencilla, pues,  $\lambda_1 = 1 - x - y$ ,  $\lambda_2 = x$  y  $\lambda_3 = y$ . Las funciones  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  asociadas a un triángulo  $T$ , se llaman coordenadas baricéntricas y toman valores entre 0 y 1 en los puntos interiores de  $T$  y mayores que 1 o menores que 0 en los exteriores, y el valor 0 o 1 en los puntos frontera. Se tiene además  $\sum_{i=1,2,3} \lambda_i(x, y) = 1$  en todo punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

## 5.2. Cálculo de la matriz del sistema de ecuaciones y del segundo miembro: Un ejemplo

Vamos a calcular explícitamente el sistema (5.1.5) en el caso sencillo correspondiente al problema (5.1.4) en un dominio cuadrado con la triangulación de la figura 5.6. Calcularemos la  $i$ -ésima ecuación del sistema (en las figuras, la ecuación número 41 que es la que corresponde al centro del cuadrado). En la figura 5.7 se han dibujado las curvas de nivel de la co-



5.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y  
DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

---

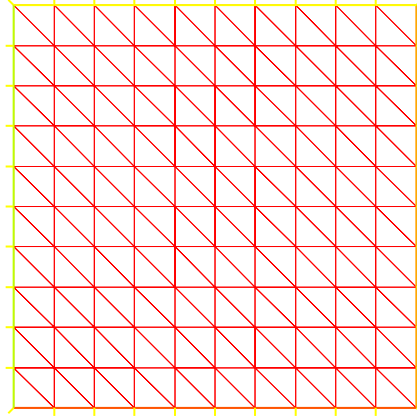


Figura 5.6: Triangulación del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$

respondiente función base  $\varphi_{41}$  y en la figura 5.8 se ha resaltado el soporte de dicha función. Empecemos calculando los términos de la matriz. La fila 41 de dicha matriz solo tendrá algunos términos no nulos, concretamente y “a priori los términos  $\mathbf{A}_{ij}$  correspondientes a los valores de índices  $i = 41$  y  $j = 32, 33, 40, 41, 42, 49, 50$ , pues solo para estos valores de los índices los soportes de las funciones  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  tendrán intersección no vacía (ver la figura 5.9).

Vamos a calcular los términos  $\mathbf{A}_{ij}^T$  para cada triángulo  $T$  de la figura 5.9. De hecho bastará hacerlo para uno de ellos (por ejemplo el de vértices  $a_{41} = (0.5, 0.5)$ ,  $a_{42} = (0.6, 0.5)$ ,  $a_{50} = (0.5, 0.6)$ ) y por permutación de sus términos obtendremos el resultado para los otros triángulos. De forma algo más general consideremos un triángulo de vértices (y utilizando numeración local para simplificar la escritura, es decir, utilizando valores para los 3 índices 1,2 y 3, en lugar de 41,42 y 50)  $a_1(x_1, y_1)$ ,  $a_2(x_2 = x_1 + h, y_2)$   $a_3 = (x_3 = x_1, y_3 = y_1 + h)$ , la restricción de las funciones base a este triángulo serán

$$\lambda_1 = 1 - \frac{x - x_1}{h} - \frac{y - y_1}{h},$$

$$\lambda_2 = \frac{x - x_1}{h},$$

5.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

---

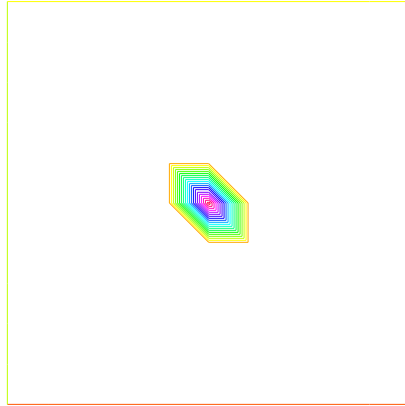


Figura 5.7: Curvas de nivel de la función  $\varphi_{41}$

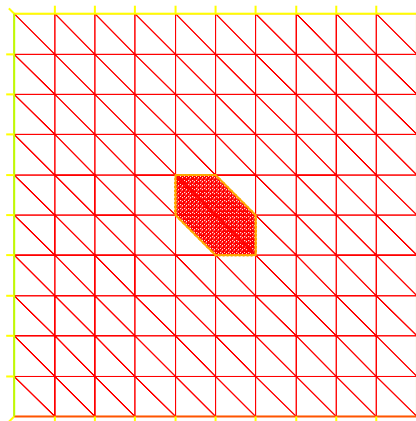


Figura 5.8: Soporte de la función  $\varphi_{41}$

5.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

---

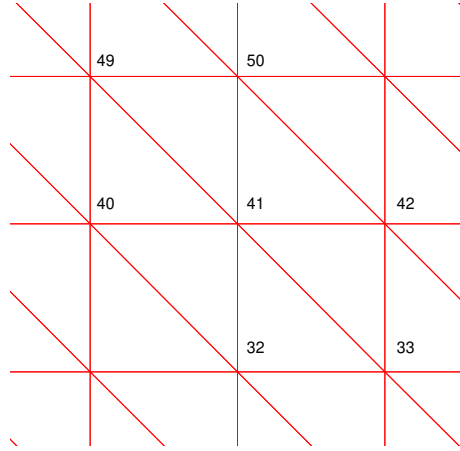


Figura 5.9: Estrella asociada a la ecuación 41

$$\lambda_3 = \frac{y - y_1}{h}.$$

En efecto, las anteriores funciones verifican  $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ . Los gradientes respectivos son:

$$\nabla\lambda_1 = [-1/h, -1/h]^t,$$

$$\nabla\lambda_2 = [1/h, 0]^t,$$

$$\nabla\lambda_3 = [0, 1/h]^t.$$

De donde, los correspondiente productos:

$$\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_1 = 2/h^2 \quad \nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2 = -1/h^2 \quad \nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_3 = -1/h^2$$

$$\nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_1 = -1/h^2 \quad \nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_2 = 1/h^2 \quad \nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_3 = 0$$

$$\nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_1 = -1/h^2 \quad \nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_2 = 0 \quad \nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_3 = 1/h^2$$

Integrando en el triángulo  $T$ , teniendo en cuenta que son términos constantes y que  $\text{área}(T) = h^2/2$  resulta,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

## 5.2. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

---

y análogamente para los otros triángulos del soporte de  $\varphi_{41}$ . Para construir la matriz global  $\mathbf{A}$  estas contribuciones se han de sumar adecuadamente en la posición fila-columna correspondiente, así el término  $\mathbf{A}_{1,1}^T$  irá a sumarse en la posición  $\mathbf{A}_{41,41}$  de la matriz global, el término  $\mathbf{A}_{1,2}^T$ , se sumará en la posición  $\mathbf{A}_{41,42}$ , el término  $\mathbf{A}_{1,3}^T$ , se sumará en la posición  $\mathbf{A}_{41,50}$  y así sucesivamente. Los términos de  $\mathbf{A}$ , distintos de cero, correspondiente a la ecuación número 41 serán (fila 41 de la matriz) :

$$\mathbf{A}_{41,32} = \mathbf{A}_{41,40} = \mathbf{A}_{41,42} = \mathbf{A}_{41,50} = -1$$

$$\mathbf{A}_{41,33} = \mathbf{A}_{41,49} = 0$$

$$\mathbf{A}_{41,41} = 4$$

Calculemos el segundo miembro. El término de la ecuación 41 es:  $b_{41} = \int_{\Omega} f\varphi_{41} dx_1 dx_2$ , la integral la calcularemos utilizando integración numérica. La fórmula siguiente de Newton-Cotes que integra exactamente polinomios de grado 1, es suficiente:

$$\int_T f(x, y) dx dy \approx \frac{\text{área}(T)}{3} \sum_{i=1,2,3} f(a_i)$$

donde  $a_i$   $i = 1, 2, 3$  son los 3 vértices del triángulo. En nuestro caso, la función a integrar es  $f\varphi_{41}$ , que vale 1 en el vértice 41 y 0 en los otros. Por tanto,

$$\int_T f\varphi_{41} dx dy \approx \frac{\text{área}(T)}{3} f(a_{41})$$

sumando las contribuciones de los seis triángulos de la estrella (ver la figura 5.9) y teniendo en cuenta que el área de cada triángulo es igual a  $h^2/2$ , resulta

$$\int_T f\varphi_{41} dx dy \approx h^2 f(a_{41})$$

La ecuación 41 del sistema se escribe:

$$-u_{32} - u_{40} + 4u_{41} - u_{42} - u_{50} = h^2 f(a_{41}) \quad (5.2.1)$$

que coincide con el método clásico de diferencias finitas. Naturalmente el método de elementos finitos es mucho más general pues se aplica sin dificultad a dominios mucho más generales, con triangulaciones no tan estructuradas como la del ejemplo anterior. Veremos también como se puede, sin grandes dificultades, utilizar polinomios de grado más alto, lo que permite en la práctica mejorar la precisión del método.

### 5.3. Un método general para el cálculo de matrices y vectores elementales

Vamos a desarrollar un método de cálculo de las matrices y vectores elementales que se pueda aplicar a situaciones más generales que la correspondiente al caso anterior. Por ejemplo en mallados más generales de dominios cualesquiera, con elementos finitos de orden mayor que 1, y en problemas elípticos más generales como los que veremos en el capítulo siguiente. Desarrollaremos con detalle el ejemplo correspondiente al cálculo de términos:

$$A_{ij}^T = \sum_{kl} \int_T D_{kl} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_d \quad (5.3.1)$$

donde  $D_{kl}$   $k, l = 1, \dots, d$  son funciones reales definidas en  $\Omega$ . Con notación matricial se escribe:

$$A_{ij}^T = \int_T \nabla^t \varphi_i D \nabla \varphi_j dx_1 \dots dx_d \quad (5.3.2)$$

El cálculo de estos términos se hace generalmente pasando a un elemento de referencia y utilizando integración numérica. Supongamos para fijar las ideas que  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , es decir  $d = 2$  y consideremos un triángulo genérico  $T$  de vértices  $a_1 = (x_1, y_1)$ ,  $a_2 = (x_2, y_2)$  y  $a_3 = (x_3, y_3)$  definido en un plano ordinario de ejes  $x - y$ . Introducimos ahora una transformación afín cuya imagen del triángulo  $\hat{T}$  de vértices  $\hat{a}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{a}_2 = (1, 0)$  y  $\hat{a}_3 = (0, 1)$  en el plano de ejes  $\xi - \eta$  sea precisamente el triángulo dado  $T$ . Dicha transformación afín es fácil de encontrar, en efecto, utilizando las coordenadas baricéntricas del triángulo  $\hat{T}$ ,

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \xi - \eta$$

### 5.3. UN MÉTODO GENERAL PARA EL CÁLCULO DE MATRICES Y VECTORES ELEMENTALES

---

$$\hat{\lambda}_2 = \xi$$

$$\hat{\lambda}_3 = \eta$$

la imagen  $[x, y]^t$  de un punto  $[\xi, \eta]^t$  viene dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} (1 - \xi - \eta) + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \eta$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$x_{21} = x_2 - x_1, \quad x_{31} = x_3 - x_1,$$

$$y_{21} = y_2 - y_1, \quad y_{31} = y_3 - y_1$$

o bien llamando

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

resulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F(\xi, \eta) = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \mathbf{c}$$

La transformación de coordenadas  $F$  induce una transformación de funciones, así, una función  $\varphi$  definida en el plano  $x - y$  induce una función  $\hat{\varphi}$  en el plano  $\xi - \eta$  mediante la composición de funciones

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = (\varphi \circ F)(\xi, \eta) = \varphi(F(\xi, \eta)) = \varphi(x, y)$$

Por otra parte las derivadas se transformarán según la regla de la cadena:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

5.3. UN MÉTODO GENERAL PARA EL CÁLCULO DE MATRICES Y  
VECTORES ELEMENTALES

---

o bien, observando que

$$\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

con notación matricial,

$$\nabla \hat{\varphi} = \mathbf{B}^t \nabla \varphi$$

de donde,

$$\nabla \varphi = \mathbf{B}^{-t} \nabla \hat{\varphi}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\mathbf{B}^{-t} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

aplicando el teorema del cambio de variable bajo el signo integral

$$\begin{aligned} A_{ij}^T &= \int_T \nabla^t \varphi_i D \nabla \varphi_j \, dx dy \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{B}} \int_{\hat{T}} \nabla^t \hat{\varphi}_i \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \nabla \hat{\varphi}_j \, d\xi d\eta \end{aligned}$$

En el caso en que los términos de la matriz  $\mathbf{D}$  sea funciones constantes por elemento, introduciendo la matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

el cálculo de  $\mathbf{A}_{ij}^T$  se simplifica. En efecto, con la notación

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz  $\mathbf{A}^T$  se escribe

$$\mathbf{A}_{ij}^T = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \int_{\hat{T}} \nabla^t \hat{\varphi}_i \mathbf{C} \nabla \hat{\varphi}_j \, d\xi d\eta = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \sum_{k,l=1}^2 c_{kl} \int_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi_k} \, d\xi_1 d\xi_2$$

### 5.3. UN MÉTODO GENERAL PARA EL CÁLCULO DE MATRICES Y VECTORES ELEMENTALES

---

donde hemos utilizado la notación  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \eta$  para poder expresar apropiadamente la suma. La última integral se calcula una sola vez, pues es una integral en el elemento de referencia, que se calcula habitualmente mediante integración exacta o integración numérica exacta para los polinomios correspondientes. Si los términos de la matriz  $\mathbf{D}$  no son constantes, entonces los términos  $c_{kl}$  no pueden salir de la integral, se utiliza entonces integración numérica para calcular la integral intermedia de la expresión anterior.



# Capítulo 6

## El Método Multimalla

### 6.1. Introducción

Consideremos un sistema lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

con matriz  $\mathbf{A}$  simétrica definida positiva y que proviene de la discretización mediante elementos finitos, diferencias finitas o volúmenes finitos de un problema en derivadas parciales (se puede también pensar en un sistema multimalla algebraico).

Si consideramos un método iterativo estándar (p.e. Jacobi, Gauss-Seidel, Gradiente Conjugado) se observa una convergencia rápida en las primeras iteraciones y después una ralentización de la misma. La explicación es sencilla. Veámoslo en el caso de un método iterativo lineal asociado a una matriz auxiliar  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{B}\mathbf{U}^{(i)} + (\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{U}^{(i)})$$

donde  $\mathbf{B}$  viene dada, por ejemplo

- En el método de Jacobi:  $\mathbf{B} = \text{Diag}(\mathbf{A})$
- En el método de Richardson:  $\frac{\omega}{\Lambda}\mathbf{I}$  siendo  $\Lambda$  el mayor valor propio de  $\mathbf{A}$

## 6.1. INTRODUCCIÓN

---

tendremos para los errores  $\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} - \mathbf{U}$

$$\mathbf{B}\mathbf{E}^{(i+1)} = \mathbf{B}\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{A}\mathbf{E}^{(i)}$$

o bien

$$\mathbf{E}^{(i+1)} = \mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}^{(i)} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{E}^{(i)}$$

Si consideramos ahora los valores propios y los vectores propios de  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$  que supondremos siempre  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 1$  y siendo  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  una base de vectores propios, escribiendo

$$\mathbf{E}^{(0)} = \sum_{l=1}^n v_l \psi_l$$

resulta

$$\mathbf{E}^{(i)} = \sum_{l=1}^n (1 - \lambda_l)^i v_l \psi_l$$

es decir las componentes  $v_l$  correspondientes a un valor de  $l$  grande ( $\lambda_l \approx 1$ ) se amortiguan rápidamente.

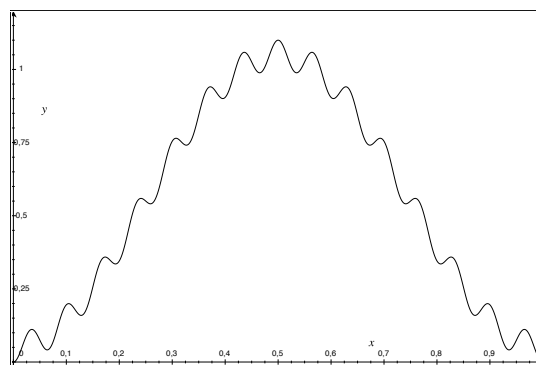


Figura 6.1: Error inicial  $\mathbf{E}^{(0)}$

después de algunas pocas iteraciones  $\nu$  el error  $\mathbf{E}^{(\nu)}$  tiene la forma

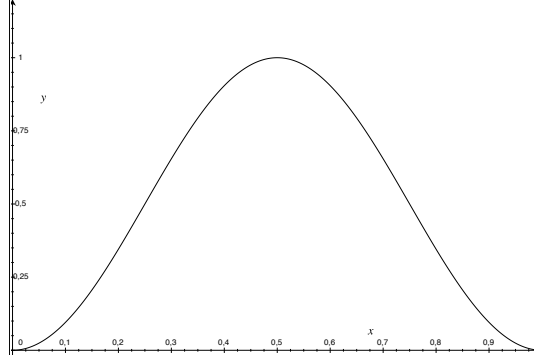


Figura 6.2: Error  $\mathbf{E}^{(\nu)}$  después  $\nu$  iteraciones

este error se puede corregir en mallas menos finas.

En este capítulo se ha desarrollado fundamentalmente a partir del artículo [4] y complementado por los artículos [5], [6], [7], [8], [9].

## 6.2. Definiciones y Algoritmo Multimalla

### 6.2.1. Descripción del problema

Se va a desarrollar la teoría general para sistemas simétricos y definido positivos. Consideraremos el marco de Elementos Finitos conformes:

- Un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- Una conjunto de subespacios de  $\mathcal{H}$  de dimensión finita

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}_k \subseteq \dots \subseteq \mathcal{H}$$

- $a(.,.) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal, continua, elíptica y simétrica. Con estas propiedades  $a(.,.)$  es un producto escalar en  $\mathcal{H}$ . Denotamos  $\|.\|$  la norma asociada, es decir  $\|v\|^2 = a(v, v)$  que es una norma equivalente a la norma en  $\mathcal{H}$ .

- $g(\cdot) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma lineal continua.

El problema a resolver es: Hallar  $u \in \mathcal{H}$  tal que

$$a(u, v) = g(v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (6.2.1)$$

En la práctica queremos encontrar una solución aproximada en un subespacio  $\mathcal{M}_K$  de dimensión finita, es decir, la solución  $u_K \in \mathcal{M}_K$  de

$$a(u_K, v_K) = g(v_K) \quad \forall v_K \in \mathcal{M}_K \quad (6.2.2)$$

### 6.2.2. Descripción del algoritmo multimalla

Para distintos valores de  $k = 0, 1, \dots, K$  consideraremos problemas del tipo

$$a(u_k, v_k) = g_k(v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (6.2.3)$$

donde  $g_k$  será definido en la propia descripción del algoritmo.

Para cada entero  $k$  introducimos una forma bilineal auxiliar

$$b_k(\cdot, \cdot) : \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\max_{v_k \in \mathcal{M}_k} \frac{a(v_k, v_k)}{b(v_k, v_k)} \leq 1 \quad (6.2.4)$$

Se denota  $MG(k, \nu_1, \nu_2, \gamma, p, u_{k,0}, u_{k,p})$  al algoritmo correspondiente a la resolución el nivel  $k$ , con  $\nu_1$  iteraciones de pre-suavizado,  $\nu_2$  iteraciones de post-suavizado,  $\gamma$  es el número de llamadas al algoritmo multimalla de nivel  $k - 1$ ,  $p$  indica el número de iteraciones realizadas en este nivel  $k$ ,  $u_{k,0}$  es el valor inicial,  $u_{k,p}$  es el valor obtenido despues de  $p$  iteraciones.

Vamos a describir una iteración del anterior algoritmo, es decir,  $MG(k, \nu_1, \nu_2, \gamma, 1, u_{k,0}, u_{k,1})$

1. Si  $k = 0$  se resuelve el problema (6.2.3) de forma exacta

2. Si  $k \geq 1$ , entonces

a) Pre-suavizado: Sea  $u_k^{(0)} = u_{k,0}$ . Se realizan  $\nu_1$  iteraciones de

$$b_k(u_k^{(i)} - u_k^{(i-1)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(i-1)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k$$

y se obtiene  $u_k^{(\nu_1)}$

b) Corrección:  $\mathcal{M}_{k-1}$ :

- $g_{k-1}(v_{k-1}) = g(v_{k-1}) - a(u_k^{(\nu_1)}, v_{k-1})$
- $u_{k-1,0} = 0$
- $MG(k-1, \nu_1, \nu_2, \gamma, \gamma, 0, u_{k,\gamma})$
- $u_k^{\nu_1,c} = u_k^{\nu_1} + u_{k-1,\gamma}$

c) Post-suavizado:  $\nu_k^{(\nu_1,c,0)} = u_k^{(\nu_1,c)}$  y realizamos  $\nu_2$  iteraciones de

$$b_k(u_k^{(\nu_1,c,i+1)} - u_k^{(i)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(\nu_1,c,i)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k$$

y se obtiene  $u_{k,1} = u_k^{(\nu_1,c,\nu_2)}$

En el análisis de las secciones siguientes consideraremos el problema generalizado de valores y vectores propios

$$a(\psi_j, v_k) = \lambda_j b_k(\psi_j, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (6.2.5)$$

Bajo la hipótesis (6.2.4) resulta

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq 1$$

y se puede elegir una base  $(\psi_j)_j$  de funciones propias tal que

$$b_k(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} \quad (6.2.6)$$

$$a(\psi_i, \psi_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (6.2.7)$$

Utilizaremos la siguiente escala de normas  $|||v|||_\theta$  : Dada  $v \in \mathcal{M}_k$ , que se puede escribir en función de la base de vectores propios  $v = \sum v_i \psi_i$ , definimos:

$$|||v|||_{\theta}^2 = \sum \lambda_i^{\theta} v_i^2$$

En particular

$$|||v|||_1^2 = \|v\|^2 = a(v, v) \quad \forall v$$

y

$$|||v|||_0^2 = b_k(v, v) \quad \forall v$$

En lo que sigue utilizaremos para la norma  $|||v|||_1$  indistintamente las notaciones  $|||v|||$  y  $\|v\|$ .

Ejemplos:

Consideremos un problema elíptico de segundo orden definido en un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^{d=1,2,3}$  donde el espacio  $\mathcal{H}$  es  $H^1(\Omega)$  o un subespacio del mismo y sea  $(\cdot, \cdot)$  el producto escalar en el espacio  $L^2(\Omega)$ , esto es  $(u, v) = \int_{\Omega} uv$  y la norma correspondiente  $\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)$ . Por otra parte designamos  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  la norma habitual en  $H^1(\Omega)$

El ejemplo más sencillo de algoritmos de suavizado cumpliendo la condición (6.2.4) es el método de Richardson:

Sea  $\Lambda = \max_{v \in \mathcal{M}_k} \frac{a(v,v)}{(v,v)}$ , elegimos

$$b_k(u, v) = \Lambda_k(u, v)$$

$$\Lambda_k(u_k^{(\nu_1, c, i+1)} - u_k^{(i)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(\nu_1, c, i)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (6.2.8)$$

Recordemos también que típicamente en problemas elípticos de segundo orden donde  $\mathcal{M}_k$  representan subespacios de elementos finitos, caracterizados por un tamaño de elementos  $h_k$  se tiene

$$\Lambda_k \leq Ch_k^{-2} \quad \forall k \quad (6.2.9)$$

Tendremos las siguientes relaciones entre normas:

Existe una constante  $C$  independiente de  $k$  tal que

$$C^{-1}|||v|||_1 \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C|||v|||_1 \quad (6.2.10)$$

$$C^{-1}h_k|||v|||_0 \leq \|v\|_{0,\Omega} \leq Ch_k|||v|||_0 \quad (6.2.11)$$

y en general consideraremos que

$$C^{-1}h_k^{1-\theta}|||v|||_\theta^2 \leq \|v\|_{\theta,\Omega} \leq Ch_k^{1-\theta}|||v|||_\theta \quad \forall k \quad (6.2.12)$$

### 6.2.3. Interpretación Matricial

En esta subsección nos restringimos al marco del Método de Elementos Finitos.

Sea  $(\phi_i^{(k)})_i$   $i = 1, \dots, N_k$  la base de  $\mathcal{M}_k$  asociada al Método de Elementos Finitos correspondiente. La matriz asociada a la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  vendrá dada por  $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{ij}^{(k)})$ , con  $A_{ij}^{(k)} = a(\phi_j^{(k)}, \phi_i^{(k)})$ . Respectivamente la matriz asociada a la forma bilineal  $b_k(\cdot, \cdot)$  es  $\mathbf{B}^{(k)} = (B_{ij}^{(k)}) = b_k(\phi_j^{(k)}, \phi_i^{(k)})$ . Naturalmente  $\mathbf{A}^{(k)}$  y  $\mathbf{B}^{(k)}$  dependen de  $k$ . Cuando no sea necesario omitiremos el índice  $k$  para aligerar la notación.

Con notación matricial el problema (6.2.3) se escribe

$$\mathbf{AU} = \mathbf{G}$$

donde  $\mathbf{U} = (U_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$  siendo los términos  $U_i$  los coeficientes del desarrollo de  $u_k \in \mathcal{M}_k$ ,  $u_k = \sum U_i \phi_i$  y  $\mathbf{G} = (G_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$ , con  $G_i = g(\phi_i)$

*Suavizado:*

La iteración de suavizado para un vector de partida  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_k}$  se escribirá

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{W}} - \mathbf{W}) = \mathbf{G} - \mathbf{AW}$$

## 6.2. DEFINICIONES Y ALGORITMO MULTIMALLA

---

Si  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_k}$  es la solución de  $\mathbf{AU} = \mathbf{G}$  y denotamos los errores antes y después de la iteración  $\mathbf{E} = \mathbf{W} - \mathbf{U}$  y  $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{W}} - \mathbf{U}$  respectivamente, tendremos  $\mathbf{B}\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B}\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{E}$ , o bien  $\bar{\mathbf{E}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{E}$ .

*Corrección:*

Para un valor aproximado  $w_k = \sum W_i \phi_i \in \mathcal{M}_k$  del correspondiente problema (6.2.3) y  $\mathbf{W} = (W_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$  el correspondiente vector asociado. La corrección en  $\mathcal{M}_{k-1}$  se escribe

Hallar  $\delta \in \mathcal{M}_{k-1}$  tal que

$$a(\delta, \phi_i^{(k-1)}) = g(\phi_i^{(k-1)}) - a(w_k, \phi_i^{(k-1)}) \quad \forall i = 1, \dots, N_k$$

expresando las funciones de la base  $(\phi_i^{(k-1)})$  de  $\mathcal{M}_{k-1}$  como combinación lineal de las funciones de la base de  $\mathcal{M}_k$

$$\phi_i^{(k-1)} = \sum_{j=1, \dots, N_k} R_{i,j} \phi_j^{(k)} \quad \forall i = 1, \dots, N_{k-1}$$

tenemos  $\mathbf{G}^{(k-1)} = (G_i^{(k-1)}) \in \mathbb{R}^{N_{k-1}}$  con

$$G_i^{(k-1)} = g(\phi_i^{(k-1)}) = \sum_j R_{i,j} g(\phi_j^{(k)}) = \sum_j R_{i,j} G_j^{(k)}$$

denotando  $\mathbf{R} = (R_{i,j})_{i=1, \dots, N_{k-1}; j=1, \dots, N_k}$

$$\mathbf{G}^{(k-1)} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{(k)}$$

Por otra parte, para  $\mathbf{A}^{(k-1)} = (A_{i,j}^{(k-1)})_{i,j=1, \dots, N_{k-1}}$

$$\begin{aligned} A_{i,j}^{(k-1)} &= a(\phi_j^{(k-1)}, \phi_i^{((k-1))}) \\ &= \sum_s \sum_l R_{j,s} R_{i,l} a(\phi_s^{(k)}, \phi_l^{((k))}) \\ &= \sum_s \sum_l R_{j,s} R_{i,l} A_{ls}^{(k)} \\ &= \sum_s \sum_l R_{i,l} A_{ls}^{(k)} R_{s,j}^t \end{aligned}$$



$$\mathbf{A}^{(k-1)} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{R}^t$$

Finalmente denotando  $\Delta = (\delta_i) \in \mathbb{R}^{k-1}$  definido por  $\delta = \sum_i \Delta_i \phi_i^{(k-1)}$  la corrección se escribe con notación matricial

$$\mathbf{A}^{(k-1)}\Delta = (\mathbf{R}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{R}^t)\Delta = \mathbf{R}(\mathbf{G}^{(k)} - \mathbf{A}^{(k)}\mathbf{W})$$

$\mathbf{R}$  es la matriz asociada al operador de restricción y  $\mathbf{R}^t$  su matriz transpuesta es la matriz asociada al operador de prolongación. Finalmente el valor corregido en  $\mathbb{R}^{N_k}$  se escribe

$$\mathbf{W} + \mathbf{R}^t\Delta$$

*Ejemplo:* Para ilustrar los operadores de Prolongación y Restricción consideraremos ahora un ejemplo sencillo en dimensión 1 que ilustra suficientemente el problema. En la figura (6.3) se representan las tres funciones de la base de una malla formada por tres elementos finitos de tipo  $(T, P, \Sigma)$  donde  $T$  es el triángulo,  $P$  es el espacio de polinomios de grado 1 y  $\Sigma$  es un intervalo. En la figura (6.4) se representan las 5 funciones de la base de una malla formada por 4 elementos finitos. La malla se obtiene de la malla gruesa anterior por refinamiento de los intervalos en dos subintervalos iguales.

6.2. DEFINICIONES Y ALGORITMO MULTIMALLA

---

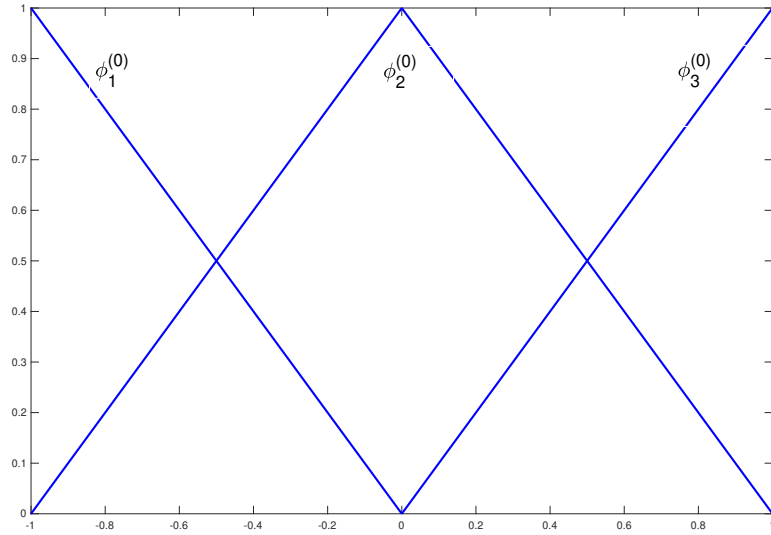


Figura 6.3: Funciones de la base de  $\mathcal{M}_0$

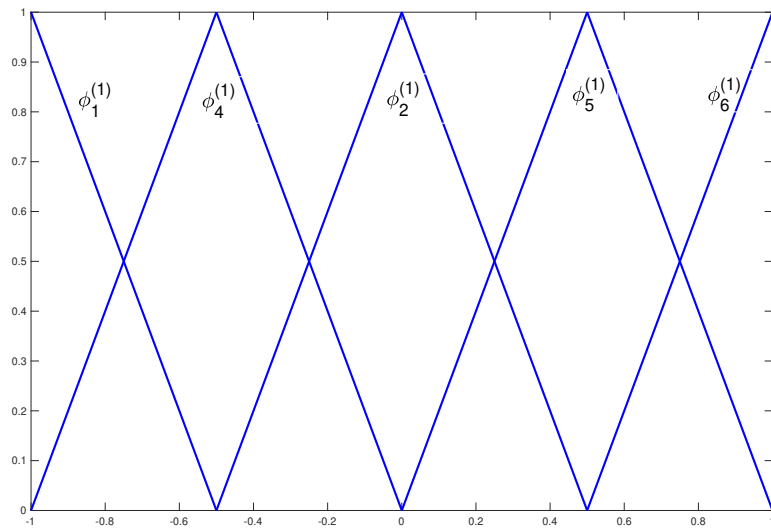


Figura 6.4: Funciones de la base de  $\mathcal{M}_1$

Para construir los operadores de Prolongación y de Restricción basta expresar las funciones de la base de  $\mathcal{M}_0$  en función de las funciones de la base de  $\mathcal{M}_1$ . Tendremos,

$$\phi_1^{(0)} = \phi_1^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_4^{(1)} \quad (6.2.13)$$

$$\phi_2^{(0)} = \phi_2^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_4^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_5^{(1)} \quad (6.2.14)$$

$$\phi_3^{(0)} = \phi_3^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_5^{(1)} \quad (6.2.15)$$

Sea ahora una función  $v \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1$ ,

$$v = v_1^{(0)}\phi_1^{(0)} + v_2^{(0)}\phi_2^{(0)} + v_3^{(0)}\phi_3^{(0)}$$

que se representada por un vector de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{V}^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)})^t$ . Sustituyendo en la expresión de  $v$  anterior las funciones  $\phi_i^{(0)}$   $i = 1, 2, 3$ , en función de la base de  $\mathcal{M}_1$  utilizando (6.2.13), (6.2.14), (6.2.15), resulta

$$v = v_1^{(0)}\phi_1^{(1)} + v_2^{(0)}\phi_2^{(1)} + v_3^{(0)}\phi_3^{(1)} + \frac{v_1^{(0)} + v_2^{(0)}}{2}\phi_4^{(1)} + \frac{v_2^{(0)} + v_3^{(0)}}{2}\phi_5^{(1)}$$

de modo que las componentes de  $v$  en la base de  $\mathcal{M}_1$  son

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= v_1^{(0)} \\ v_2^{(1)} &= v_2^{(0)} \\ v_3^{(1)} &= v_3^{(0)} \\ v_4^{(1)} &= \frac{v_1^{(0)} + v_2^{(0)}}{2} \\ v_5^{(1)} &= \frac{v_2^{(0)} + v_3^{(0)}}{2} \end{aligned}$$

que se representa como un vector de  $\mathbb{R}^5$ ,  $\mathbf{V}^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_4^{(1)}, v_5^{(1)})^t$ . El operador de restricción  $\mathbf{R}$  es entonces

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y el operador de prolongación es  $\mathbf{R}^t$ .

### 6.3. Análisis numérico del método multimalla

Primeramente analizaremos el método de 2 mallas y a continuación el método multimalla como una perturbación del método de dos mallas. En lo que sigue haremos uso de algunos resultados previos.

**Lema 6.1.** En  $\mathcal{M}_k$  se tiene la siguiente desigualdad para valores de  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$a(u, v) \leq \| \|u\| \|_{1+\alpha} \| \|v\| \|_{1-\alpha} \quad \forall u, v \in \mathcal{M}_k \quad (6.3.1)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_i \sum_j u_i v_j a(\psi_i, \psi_j) = \sum_i u_i v_i \lambda_i \\ &= \sum_i u_i \lambda_i^{(1+\alpha)/2} v_i \lambda_i^{(1-\alpha)/2} \\ &= \sqrt{\sum_i (u_i)^2 \lambda_i^{(1+\alpha)}} \sqrt{\sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1-\alpha)}} \\ &= \| \|u\| \|_{1+\alpha} \| \|v\| \|_{1-\alpha} \end{aligned}$$

■

Observar que la propiedad anterior es una propiedad algebraica.

**Lema 6.2.**

- (a)  $f(\alpha, \beta) = \sup_{x \in [0,1]} x^\alpha (1-x)^\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta$
- (b)  $f(\alpha, \beta)^p = f(p\alpha, p\beta)$
- (c)  $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$

**Demostración**

Demostremos (a),  $y = x^\alpha (1-x)^\beta$ , derivando

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} (1-x)^\beta - x^\alpha \beta (1-x)^{\beta-1} = 0$$

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(\alpha(1-x) - \beta x) = 0$$

de donde  $\alpha(1-x) - \beta x = 0$  y el máximo se obtiene para el valor de  $x = x_{max} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ . y el valor del máximo  $y_{max}$  viene dado por

$$y_{max} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta \quad (6.3.2)$$

Las demostraciones de (b) y (c) son inmediatas. ■

**Lema 6.3.** Si existe dos constantes  $\kappa \geq 1$  y  $\alpha > 0$  tales que para  $u \in \mathcal{M}_\kappa$

$$|||u|||_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} |||u|||$$

entonces

$$|||u|||_{1-\beta} \leq \kappa^{\beta/2} |||u||| \quad \forall \beta \quad 0 \leq \beta \leq \alpha$$

Demostración: Utilizar la desigualdad de interpolación (6.5.4) demostrada en la sección (6.5)

$$|||u|||_{1-\beta} \leq |||u|||_{1-\alpha}^{\beta/\alpha} |||u|||^{1-\beta/\alpha}$$

■

### 6.3.1. Método de dos mallas

Sea  $e$  el error inicial. Podemos representar una iteración del algoritmo de dos mallas de la siguiente manera

$$\mathcal{S}^{(\nu_2)} \left( \mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu_1)}(e)) \right)$$

donde

- $\mathcal{S}$  representa una iteración del algoritmo suavizado.
- $\mathcal{C}$  representa la corrección

Elegiremos para simplificar  $\nu_1 = \nu_2 = \nu/2$  y queremos estimar  $\xi$  tal que

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))||| \leq \xi |||e|||$$

Observar que al reiterar las iteraciones la secuencia del algoritmo es

$$\mathcal{S}^{(\nu/2)}\mathcal{C}\dots\mathcal{S}^{(\nu)}\mathcal{C}\mathcal{S}^{(\nu)}\mathcal{C}\mathcal{S}^{(\nu)}\dots\mathcal{C}\mathcal{S}^{(\nu/2)}$$

de modo que  $\nu = 1$  tiene sentido salvo en la primer pre-suavizado y en el último post-suavizado.

**Suavizado,  $\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)$ :**

Sea  $e = \sum v_i \psi_i$  un error de partida y  $\mathcal{S}(e) = \sum s^i \psi_i$  el error después de realizar una iteración del algoritmo de suavizado tomando como valor inicial el correspondiente a  $e$  y que viene definido por

$$b(\mathcal{S}(e), \psi_j) = b(e, \psi_j) - a(e, \psi_j) \quad \forall j \quad (6.3.3)$$

sustituyendo la expresión de  $e$  y de  $\mathcal{S}(e)$  en (6.3.3). Gracias a las propiedades de ortogonalidad (6.2.6) y (6.2.7) de la base de funciones propias  $(\psi_i)_i$  resulta

$$s^j = (1 - \lambda_j)v^j \quad \forall j$$

Observemos las siguientes propiedades de la iteración de suavizado:

**Lema 6.4.** Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$

$$|||\mathcal{S}(e)|||_{\theta} \leq |||e|||_{\theta} \quad (6.3.4)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} |||\mathcal{S}(e)|||_{\theta}^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^2 \lambda_i^{\theta} \\ &\leq \sum v_i^2 \lambda_i^{\theta} = |||e|||_{\theta}^2 \end{aligned}$$

■

**Lema 6.5.** Para valores  $0 < \alpha \leq 1$  tendremos :

$$\begin{aligned} |||S^{(\nu/2)}(e)|||_{1+\alpha}^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i^{1+\alpha} \\ &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i^\alpha \lambda_i \\ &\leq f(\nu, \alpha) |||e|||^2 \end{aligned}$$

de donde finalmente

$$|||S^{(\nu/2)}(e)|||_{1+\alpha} \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||e||| \quad (6.3.5)$$

y también

$$\begin{aligned} |||S^{(\nu/2)}(e)|||^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i \\ &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i^\alpha \lambda_i^{1-\alpha} \\ &\leq f(\nu, \alpha) |||e|||_{1-\alpha}^2 \end{aligned}$$

de donde finalmente

$$|||S^{(\nu/2)}(e)||| \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||e|||_{1-\alpha}^2 \quad (6.3.6)$$

■

Observación:

Observemos ahora que si denotamos la norma en  $L^2(\Omega)$  mediante  $\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)^{1/2}$  tendremos

$$|||v|||_0^2 = b_k(v, v) = \Lambda_k \|v\|_{0,\Omega}^2 \quad (6.3.7)$$

En un problema elíptico de segundo orden utilizando (6.2.9) y la relación (6.2.11), de la estimación (6.3.6) con  $\alpha = 1$  resulta para la iteración de Richardson

$$|||S^{(\nu/2)}(e)||| \leq \frac{C}{\sqrt{1+\nu}} h_k^{-1} \|e\|_{0,\Omega}$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $k$ . Vemos que el factor de reducción del error depende de  $h_k^{-1}$  que es un valor en general muy grande para las mallas más finas por lo que en general se necesitarían muchas iteraciones del algoritmo de suavizado para reducir significativamente el error si permanecemos en el nivel  $k$ . La idea que subyace en el método multimalla es ir a corregir el error en mallas menos finas donde el valor de  $h_k$  es más grande.

**Corrección en la malla inferior,  $\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))$ :**

Sea  $u_k$  la solución exacta en el  $\mathcal{M}_k$  y  $e$  un error inicial correspondiente a una solución aproximada de partida. Sea  $u_k^{(\nu/2)}$  la aproximación obtenida después de realizar  $\nu/2$  iteraciones de suavizado en la malla  $k$ . Sea  $\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e) = e_k^{(\nu/2)} = u_k - u_k^{(\nu/2)}$  el error correspondiente a esta aproximación. La corrección (corrección exacta en el método de 2 mallas) en el nivel  $k - 1$  consiste en resolver el siguiente problema: Hallar  $\delta \in \mathcal{M}_{k-1}$  tal que

$$a(\delta, v_{k-1}) = g(v_{k-1}) - a(u_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) = a(u_k - u_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

o bien,

$$a(\delta, v_{k-1}) = a(u_k - u_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

es decir,

$$a(\delta - e_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) = 0 \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

$\delta$  es la proyección ortogonal del error  $e_k^{(\nu/2)}$  en el subespacio  $\mathcal{M}_{k-1}$  donde la ortogonalidad es en el sentido del producto escalar  $a(., .)$ . El valor corregido es  $u_k^{(\nu/2, c)} = u_k^{(\nu/2)} + \delta$ , por lo tanto el error después del presuavizado y la corrección es

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)) = \mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}) = u_k - u_k^{(\nu/2, c)} = u_k - (u_k^{(\nu/2)} + \delta) = e_k^{(\nu/2)} - \delta \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$$

Podemos considerar que los elementos de  $\mathcal{M}_{k-1}^\perp$  son de variación lenta y los de  $\mathcal{M}_{k-1}$  son de variación rápida. Tenemos ahora que estimar

$$|||e_k^{(\nu/2)} - \delta||| = |||\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})|||$$



**Teorema 6.1.** Supongamos que existe constantes  $\kappa \geq 1$  y  $\alpha > 0$  tales que para todo  $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp \cap \mathcal{M}_k$

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} \|v\| \quad (6.3.8)$$

entonces

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| \leq \xi \|e\| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k \quad (6.3.9)$$

donde

$$\xi = \begin{cases} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)^\nu & \text{si } \nu \leq \frac{\kappa-1}{\alpha} \\ \kappa^\alpha f(\nu, \alpha) & \text{si } \nu > \frac{\kappa-1}{\alpha} \end{cases}$$

Comentario:

Puesto que  $\delta$  es la proyección ortogonal de  $e_k^{(\nu/2)}$ ,

$$\|e_k^{(\nu/2)} - \delta\| = \inf_{v \in \mathcal{M}_{k-1}} \|e_k^{(\nu/2)} - v\|$$

Tenemos para todo  $v \in \mathcal{H}$ ,  $\|v\|^2 = a(v, v)$ . En problemas elípticos de segundo orden donde  $\mathcal{H}$  es  $H^1$  o un subespacio del mismo la norma  $\|\cdot\|$  es equivalente a la norma  $\|\cdot\|_1$  de  $H^1$  con constantes de equivalencia independientes de  $k$ . La dificultad que tenemos a la hora de encontrar una estimación de  $\|e_k^{(\nu/2)} - \delta\|$  es que  $e_k^{(\nu/2)}$  no es en general suficientemente regular para poder utilizar una estimación del tipo  $\|e_k^{(\nu/2)} - v_{k-1}\|_1 \leq Ch_{k-1} \|e_k^{(\nu/2)}\|_2$  para todo  $v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$  puesto que en general  $e_k^{(\nu/2)} \notin H^2$

**Demostración**

*Presuavizado y corrección:*

Tenemos gracias a la ortogonalidad entre  $\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})$  y  $\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}) - e_k^{(\nu/2)}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})\|^2 &= a(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}), \mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})) \\ &= a(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}), e_k^{(\nu/2)}) \\ &\leq \|\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})\|_{1-\alpha} \|e_k^{(\nu/2)}\|_{1+\alpha} \\ &\leq \kappa^{\alpha/2} \|\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})\| \cdot \|e_k^{(\nu/2)}\|_{1+\alpha} \end{aligned}$$

### 6.3. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MÉTODO MULTIMALLA

---

donde se ha utilizado la hipótesis (6.3.8). Simplificando y utilizando la estimación (6.3.5)

$$|||\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})||| \leq \kappa^{\alpha/2} f(\nu/2, \alpha/2) |||e||| \quad (6.3.10)$$

*Postsuavizado:*

Después del postsuavizado, utilizando (6.3.6), resulta

$$|||S^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}))||| \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})|||_{1-\alpha}$$

utilizando de nuevo (6.3.8), la estimación anterior (6.3.10) y las propiedades de la función  $f(.,.)$  se obtiene

$$|||S^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}))||| \leq \kappa^\alpha f(\nu, \alpha) |||e||| \quad (6.3.11)$$

Finalmente sustituimos  $\alpha$  por  $\beta$  con  $0 \leq \beta \leq \alpha$  y minimizamos respecto a  $\beta$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\kappa^\beta f(\nu, \beta)) = \log\left(\frac{\kappa\beta}{\nu + \beta}\right) \kappa^\beta f(\nu, \beta) = 0$$

de donde

$$\frac{\kappa\beta}{\nu + \beta} = 1$$

lo que implica

$$\beta = \frac{\nu}{\kappa - 1}$$

Tenemos dos casos si  $\frac{\nu}{\kappa-1} > \alpha$  entonces el mínimo se alcanza en el extremo  $\beta = \alpha$  y

$$\xi = \kappa^\alpha f(\nu, \alpha)$$

En el caso  $\frac{\nu}{\kappa-1} \leq \alpha$  entonces el mínimo se alcanza para  $\beta = \frac{\nu}{\kappa-1}$  y después de algunas operaciones elementales resulta

$$\xi = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)^\nu$$

■

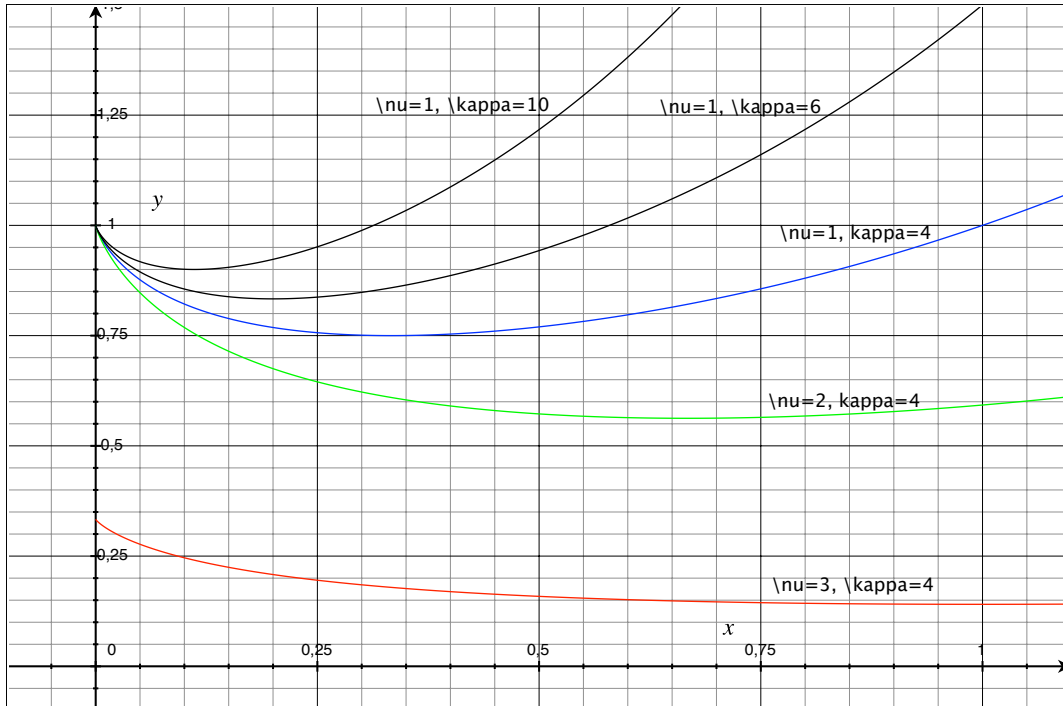


Figura 6.5: Gráfica  $\kappa^\alpha f(\nu, \alpha)$  vs  $\alpha$  después  $\nu$  iteraciones

Comentario:

Hasta aquí la teoría es puramente algebraica pues en la obtención de la estimación (6.3.9) no se hace uso del problema variacional en dimensión infinita de partida del que provienen el sistema de ecuaciones algebraico. El punto clave está en la hipótesis (6.3.8). Si el parámetro  $\kappa$  no depende del nivel  $k$  el factor de reducción del error es independiente de dicho nivel. También la estimación de  $\xi$  será mejor cuanto más pequeño sea el valor de  $\kappa$

Veamos en un problema elíptico de segundo orden como se puede estimar un valor de  $\kappa$  independiente del parámetro de la malla  $h_k$ .

Consideremos un problema elíptico de segundo orden,

$$-\nabla(a\nabla u) + bu = f \quad \text{in } \Omega \tag{6.3.12}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \tag{6.3.13}$$

### 6.3. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MÉTODO MULTIMALLA

---

donde  $\Omega$  es un dominio acotado y poliédrico de  $\mathbb{R}^{d=1,2,3}$  y  $\Gamma$  su frontera que supondremos suficientemente regular. Suponemos  $f \in L^2(\Omega)$  y las funciones  $a \in C^1(\bar{\Omega})$  y  $b \in C^0(\bar{\Omega})$  verificando

$$0 < a_{min} \leq a(x) \leq a_{max} \quad \text{y} \quad 0 \leq b_{min} \leq b(x) \leq b_{max}$$

En este caso tomaremos como espacio  $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$ . La formulación débil del problema es hallar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \nabla v + buv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (6.3.14)$$

Consideraremos la aproximación del problema en una secuencia de espacios de elementos finitos construidos sobre un conjunto de mallas encajadas formadas mediante triangulaciones regulares  $\mathcal{T}_k$  de  $\Omega$  y  $\mathcal{M}_k = \{v_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas}, v_k|_{T_j} \in P_1(T_j)\}$ . Si designamos  $h_k$  el tamaño característico de la malla asociada al nivel  $k$  supondremos la relación  $h_{k-1} = 2h_k$ .

**Teorema 6.2.** Consideraremos en primer lugar el caso más sencillo en el que se tienen las hipótesis de regularidad y aproximación habituales.

#### 1. Hipótesis de regularidad.

Supongamos que la solución  $u$  de (6.3.14) verifica:

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_2 \|f\|_{0,\Omega} \quad (6.3.15)$$

donde  $C_2 = C_2(a, b, \Omega)$

#### 2. Hipótesis de aproximación.

Los espacios  $\mathcal{M}_k$  satisfacen la siguiente propiedad de aproximación: para  $v \in H^2(\Omega)$

$$\inf_{\chi \in \mathcal{M}_k} \|v - \chi\|_{1,\Omega} \leq C_3 h_k \|v\|_{2,\Omega} \quad (6.3.16)$$

donde  $C_3 = C_3(\Omega, \mathcal{T}_k)$

Queremos demostrar que para todo  $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$  existe una constante  $\kappa > 0$  tal que

$$|||v|||_0 \leq \kappa^{1/2} |||v|||_1 \quad (6.3.17)$$

### Demostración

Observemos que la relación (6.2.11) da

$$|||v|||_0 \leq C_4 h_k^{-1} \|v\|_{0,\Omega} \quad (6.3.18)$$

Y tenemos también la equivalencia de normas

$$C_0 |||v||| \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_1 |||v||| \quad (6.3.19)$$

Para estimar  $|||v|||_{0,\Omega}$  utilizaremos un argumento de dualidad estándar. Sea  $\mu \in L^2(\Omega)$  y sea  $z \in \mathcal{H}$  la solución de

$$a(z, w) = (\mu, w) \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Elegimos  $w = v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ . Para todo  $\chi \in \mathcal{M}_{k-1}$  tendremos

$$\begin{aligned} (\mu, v) &= a(z, v) = a(z - \chi, v) \leq \|z - \chi\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_3 h_{k-1} \|z\|_{2,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_2 C_3 h_{k-1} \|\mu\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{(\mu, v)}{|||\mu|||_{0,\Omega}} &\leq C_2 C_3 h_{k-1} \|v\|_{1,\Omega} \\ |||v|||_{0,\Omega} &= \sup_{\mu \in L^2(\Omega)} \frac{(\mu, v)}{|||\mu|||_{0,\Omega}} \leq C_2 C_3 h_{k-1} \|v\|_{1,\Omega} = 2C_2 C_3 h_k |||v|||_{1,\Omega} \end{aligned}$$

y utilizando (6.3.18) y (6.3.19)

$$|||v|||_0 \leq 2C_2 C_3 C_4 |||v|||_{1,\Omega} \leq 2C_1 C_2 C_3 C_4 |||v||| \quad (6.3.20)$$

de donde  $\kappa^{1/2} = 2C_1 C_2 C_3 C_4$ .

**Teorema 6.3.** Consideraremos el caso general con hipótesis de regularidad más débiles.  $\mathcal{H}^s = H^s(\Omega)$  serán los espacios de Sobolev con las normas correspondientes  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  y  $\mathcal{H}^0 = L^2(\Omega)$  y  $\mathcal{H}^1 = H_0^1(\Omega)$ . También  $\mathcal{H}^{-s} = H^{-s}(\Omega)$  es el espacio dual de  $\mathcal{H}^s = H^s(\Omega)$  y designamos mediante  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto de dualidad correspondiente.

1. Hipótesis de regularidad.

Supongamos que la solución  $u$  de (6.3.14) verifica: Para  $0 < \alpha \leq 1$

$$\|u\|_{1+\alpha,\Omega} \leq C_2 \|f\|_{\alpha-1,\Omega} \quad (6.3.21)$$

donde  $C_2 = C_2(a, b, \Omega)$

2. Hipótesis de aproximación.

Los espacios  $\mathcal{M}_k$  satisfacen la siguiente propiedad de aproximación: para  $v \in \mathcal{H}^{1+\alpha}$  y  $0 < \alpha \leq 1$

$$\inf_{\chi \in \mathcal{M}_k} \|v - \chi\|_{1,\Omega} \leq C_3 h_k^\alpha \|v\|_{1+\alpha,\Omega} \quad (6.3.22)$$

donde  $C_3 = C_3(\Omega, \mathcal{T}_1)$

Queremos demostrar que para todo  $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$  existe una constante  $\kappa > 0$  tal que

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} \|v\| \quad (6.3.23)$$

**Demostración**

Observemos que la relación (6.2.12) da

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq C_4 h_k^{-\alpha} \|v\|_{1-\alpha,\Omega} \quad (6.3.24)$$

Y tenemos también la equivalencia de normas

$$C_0 \|v\| \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|v\| \quad (6.3.25)$$

Para estimar  $\|v\|_{1-\alpha,\Omega}$  utilizaremos un argumento de dualidad. Sea  $\mu \in \mathcal{H}^{\alpha-1}$  y sea  $z \in \mathcal{H}$  la solución de

$$a(z, w) = \langle \mu, w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Elegimos  $w = v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ , para todo  $\chi \in \mathcal{M}_{k-1}$  tendremos

$$\begin{aligned} \langle \mu, v \rangle &= a(z, v) = a(z - \chi, v) \leq \|z - \chi\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_3 h_{k-1}^\alpha \|z\|_{1+\alpha,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|\mu\|_{1-\alpha,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|\mu\|_{1-\alpha,\Omega}} &\leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|v\|_{1,\Omega} \\ \|v\|_{1-\alpha,\Omega} &= \sup_{\mu \in \mathcal{H}^{\alpha-1}} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|\mu\|_{\alpha-1,\Omega}} \leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|v\|_{1,\Omega} = 2^\alpha C_2 C_3 h_k^\alpha \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

y utilizando (6.3.24) y (6.3.25)

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq 2^\alpha C_2 C_3 C_4 \|v\|_{1,\Omega} \leq 2^\alpha C_1 C_2 C_3 C_4 \|v\| \quad (6.3.26)$$

de donde  $\kappa^{\alpha/2} = 2^\alpha C_1 C_2 C_3 C_4$ .

### 6.3.2. Convergencia del Método multimalla, ciclo $W$ ( $\gamma = 2$ )

Vamos a considerar el Método multimalla como una perturbación del método de dos mallas, concretamente el llamado ciclo  $W$  que corresponde a un número de llamadas  $\gamma = 2$  del algoritmo multimalla de nivel inferior. En el ciclo  $W$  el error  $e$  inicial se transformará en

$$\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))$$

con  $\tilde{\mathcal{C}}$  en lugar de  $\mathcal{C}$ . Aquí  $\tilde{\mathcal{C}}$  representa 2 llamadas al algoritmo multimalla de nivel inferior  $\mathcal{M}_{k-1}$ . Queremos calcular  $\tilde{\xi}$  tal que

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| \leq \tilde{\xi} \|e\|$$

**Teorema 6.4.** Supongamos

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))||| \leq \xi |||e||| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k$$

donde  $\xi$  está definida en el teorema (6.1). Entonces existe  $0 < \tilde{\xi} < 1$  independiente de  $k$  tal que

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))||| \leq \tilde{\xi} |||e||| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k \quad (6.3.27)$$

### Demostración

Procederemos por inducción. El teorema es cierto para un método de dos mallas,  $k = 2$ . En efecto, en este caso  $\tilde{\mathcal{C}}$  es la solución exacta en la malla inferior  $k = 1$ ,  $\tilde{\xi} = \xi$  y (6.3.27) es cierto como consecuencia del teorema (6.1).

Supongamos ahora que el teorema es cierto para  $k - 1$  mallas. Sea  $\bar{e} = \mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)$  el error en  $\mathcal{M}_k$  después del presuavizado y sea  $\delta$  la corrección exacta en  $\mathcal{M}_{k-1}$ , es decir,  $\delta$  es la proyección ortogonal de  $\bar{e}$  sobre  $\mathcal{M}_{k-1}$  en el sentido del producto escalar  $a(\cdot, \cdot)$ . Sea  $\tilde{\delta}$  la corrección obtenida después de aplicar dos veces el algoritmo multimalla (con  $\gamma = 2$ ) en  $\mathcal{M}_{k-1}$ . Con las mismas notaciones que en el teorema (6.1),  $\bar{e} = \delta + \mathcal{C}(\bar{e})$  y de forma correspondiente  $\bar{e} = \tilde{\delta} + \tilde{\mathcal{C}}(\bar{e})$ . Tendremos por la hipótesis de inducción

$$|||\delta - \tilde{\delta}||| \leq \tilde{\xi}^2 |||\delta|||$$

es decir,

$$|||\bar{e} - \mathcal{C}(\bar{e}) - (\bar{e} - \tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}))||| = |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e})||| \leq \tilde{\xi}^2 |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \bar{e}|||$$

Tenemos  $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e}) \in \mathcal{M}_{k-1}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \bar{e} \in \mathcal{M}_{k-1}$  y también  $\mathcal{C}(\bar{e}) \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ . Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} & |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e}) + \tilde{\xi}^2 \mathcal{C}(\bar{e})|||^2 = \\ & |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e})|||^2 + \tilde{\xi}^4 |||\mathcal{C}(\bar{e})|||^2 \leq \\ & \tilde{\xi}^4 (|||\mathcal{C}(\bar{e}) - \bar{e}|||^2 + |||\mathcal{C}(\bar{e})|||^2) = \tilde{\xi}^4 |||\bar{e}|||^2 \end{aligned}$$



Tomemos ahora en cuenta el presuavizado y el postsuavizado. Teniendo en cuenta la propiedad (6.3.4) para  $\theta = 1$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))\| &= \|(1 - \tilde{\xi}^2)\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))) + \mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \tilde{\xi}^2\mathcal{C})(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))\| \\ &\leq (1 - \tilde{\xi}^2)\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| + \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \tilde{\xi}^2\mathcal{C})(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))\| \\ &\leq ((1 - \tilde{\xi}^2)\xi + \tilde{\xi}^2)\|e\| = \tilde{\xi}\|e\| \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta siempre que

$$\tilde{\xi} = (1 - \tilde{\xi}^2)\xi + \tilde{\xi}^2 = \xi - \xi\tilde{\xi}^2 + \tilde{\xi}^2$$

o bien

$$(1 - \xi)\tilde{\xi}^2 - \tilde{\xi} + \xi = 0$$

Despejando  $\tilde{\xi}$ ,

$$\tilde{\xi} = \frac{1 \pm (2\xi - 1)}{2(1 - \xi)}$$

de las dos soluciones únicamente la solución

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

da un valor de  $\tilde{\xi} \geq 0$  para valores de  $\xi > 0$ . Para obtener valores de  $\tilde{\xi} < 1$  necesitamos tener  $\xi < 0.5$ , pero siempre podemos elegir  $\nu$  de manera que  $\xi < 0.5$ . ■

### 6.3.3. Convergencia del Método multimalla, ciclo $V$ ( $\gamma = 1$ )

Consideramos en esta subsección la convergencia del método multimalla con una sola llamada al algoritmo de multimalla de nivel inferior, es decir, el llamado ciclo  $V$  que corresponde a  $\gamma = 1$ .

El análisis de la convergencia del ciclo  $V$  necesita dos resultados previos acerca del suavizado.

**Lema 6.6.** Sea  $u \in \mathcal{M}_k$  y  $0 < \alpha \leq 1$ . Entonces

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)|||/|||u||| \leq (|||\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)|||^2/|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)|||^2)^{\nu/2} \quad (6.3.28)$$

$$|||u|||_{1+\alpha}/|||u||| \leq (1 - |||\mathcal{S}^{1/2}(u)|||^2/|||u|||^2)^{\alpha/2} \quad (6.3.29)$$

### Demostración

Para demostrar (6.3.28) veamos primero que

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)||| \leq |||\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)|||^{\nu/(\nu+1)} |||u|||^{1/(\nu+1)} \quad (6.3.30)$$

En efecto, mediante inducción sobre  $\nu$ , (6.3.30) es cierta para  $\nu = 1$ , pues

$$\begin{aligned} |||\mathcal{S}^{(1/2)}(u)|||^2 &= a(\mathcal{S}^{(1/2)}(u), \mathcal{S}^{(1/2)}(u)) = a(\mathcal{S}(u), u) \leq |||\mathcal{S}(u)||| \cdot |||u||| \\ |||\mathcal{S}^{(1/2)}(u)||| &\leq |||\mathcal{S}(u)|||^{1/2} \cdot |||u|||^{1/2} \end{aligned}$$

Supongamos ahora cierta la desigualdad (6.3.30) para  $\nu - 1$  y veamos que entonces es cierta para  $\nu$ ,

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)|||^2 = a(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u), \mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)) = a(\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u), \mathcal{S}^{((\nu-1)/2)}(u)) \leq |||\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)||| \cdot |||\mathcal{S}^{((\nu-1)/2)}(u)|||$$

Utilizando ahora la hipótesis de inducción en el segundo factor del último producto

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)|||^2 \leq |||\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)||| \cdot |||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)|||^{(\nu-1)/\nu} \cdot |||u|||^{1/\nu}$$

y como  $2 - (\nu - 1)/\nu = (\nu + 1)/\nu$  resulta simplificando y extrayendo la raíz  $(\nu + 1)/\nu$  en los dos miembros de la desigualdad obtenemos (6.3.30). Finalmente (6.3.28) se obtiene de (6.3.30) elevando los dos miembros a la potencia  $\nu + 1$  y reordenando,

$$\begin{aligned} |||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)|||^{\nu+1} &\leq |||\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)|||^\nu \cdot |||u||| \\ |||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)||| &\leq \frac{|||\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)|||^\nu}{|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)|||^\nu} \cdot |||u||| \end{aligned}$$

dividiendo por  $|||u|||$  se obtiene (6.3.28).

Para demostrar (6.3.29) observemos primero

$$\begin{aligned} |||\mathcal{S}^{(1/2)}(u)|||^2 &= \sum_i u_i^2(1 - \lambda_i)\lambda_i \\ &= \sum_i u_i^2\lambda_i - \sum_i u_i^2\lambda_i^2 = |||u|||^2 - |||u|||_2^2 \end{aligned}$$

de donde

$$|||u|||_2^2 = |||u|||^2 - |||\mathcal{S}^{(1/2)}(u)|||^2 \quad (6.3.31)$$

Ahora utilizando la desigualdad de interpolación (6.5.5) y la observación (6.3.31) tenemos

$$\begin{aligned} |||u|||_{1+\alpha} &\leq |||u|||^{1-\alpha} (|||u|||^2 - |||\mathcal{S}^{(1/2)}(u)|||^2)^{\alpha/2} \\ &= |||u|||^{1-\alpha} (|||u|||^2 (1 - \frac{|||\mathcal{S}^{(1/2)}(u)|||^2}{|||u|||^2}))^{\alpha/2} \\ &= |||u||| \cdot (1 - \frac{|||\mathcal{S}^{(1/2)}(u)|||^2}{|||u|||^2})^{\alpha/2} \end{aligned}$$

Dividiendo por  $|||u|||$  obtenemos (6.3.29). ■

**Teorema 6.5.** Supongamos que existe una constante  $\kappa \geq 1$  independiente del nivel  $k$  tal que para todo  $u \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp \cap \mathcal{M}_k$  tal que

$$|||u|||_0 \leq \kappa^{1/2} |||u||| \quad (6.3.32)$$

Supongamos además que para todo  $v \in \mathcal{M}_k$  se verifica la siguiente hipótesis de inducción

$$|||\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v)||| \leq \hat{\xi} |||\mathcal{C}(v) - v|| \quad (6.3.33)$$

donde  $\hat{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa+\nu}$ . Entonces

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{\nu/2}(v)))||| \leq \hat{\xi} |||v|| \quad (6.3.34)$$

### Demostración

Procederemos por inducción. Observemos primero que al igual que en el ciclo  $W$  la hipótesis (6.3.33) es la hipótesis de inducción correspondiente

a una única llamada al algoritmo multimalla de nivel inferior. El teorema es cierto para un método de dos mallas,  $k = 2$ . En efecto, en este caso  $\hat{\mathcal{C}}$  es la solución exacta en la malla inferior  $k = 1$

Supongamos ahora que el teorema es cierto para  $k - 1$  niveles, es decir, se verifica (6.3.33). Tenemos por una parte, para todo  $v \in \mathcal{M}_k$ , razonando como en el teorema (6.4)  $\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) \in \mathcal{M}_{k-1}$  y  $\hat{\mathcal{C}}(v) - v \in \mathcal{M}_{k-1}$  y también  $\mathcal{C}(v) \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ . Tenemos entonces las siguientes propiedades:

- Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} & |||\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) + \hat{\xi}\mathcal{C}(v)|||^2 = \\ & |||\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v)|||^2 + \hat{\xi}^2 |||\mathcal{C}(v)|||^2 \leq \\ & \hat{\xi}^2 (|||\mathcal{C}(v) - v|||^2 + |||\mathcal{C}(v)|||^2) = \hat{\xi}^2 |||v|||^2 \end{aligned}$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$|||\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) + \hat{\xi}\mathcal{C}(v)||| \leq \hat{\xi} |||v|||$$

- Sea ahora para  $v \in \mathcal{M}_k$

$$y(v) = 1 - |||\mathcal{S}^{(\nu+1)/2}(v)|||^2 / |||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)|||^2$$

y denotemos  $\bar{v} = \mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)$ . Entonces tendremos utilizando (6.3.28) con  $u = v$

$$\begin{aligned} |||\bar{v}||| &= |||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)||| = \frac{|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)|||}{|||v|||} |||v||| \\ &\leq \left( \frac{|||\mathcal{S}^{(\nu+1)/2}(v)|||^2}{|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)|||^2} \right)^{\nu/2} \cdot |||v||| = (1 - y(v))^{\nu/2} |||v||| \end{aligned}$$

- Aplicando (6.3.1) y la ortogonalidad entre  $\mathcal{C}(v)$  y  $v - \mathcal{C}(v)$  para todo  $v \in \mathcal{M}_k$

$$|||\mathcal{C}(v)|||^2 = a(\mathcal{C}(v), \mathcal{C}(v)) = a(\mathcal{C}(v), v) \leq |||\mathcal{C}(v)|||_0 |||v|||_2$$

teniendo en cuenta la hipótesis (6.3.32) y simplificando

$$|||\mathcal{C}(v)||| \leq \kappa^{1/2} |||v|||_2$$

- Utilizando (6.3.29) con  $\alpha = 1$  y  $u = \bar{v}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}(\bar{v})\| &\leq \kappa^{1/2} \|\bar{v}\|_2 \\ &\leq \kappa^{1/2} \left(1 - \frac{\|\mathcal{S}^{1/2}(\bar{v})\|}{\|\bar{v}\|}\right)^{1/2} \|\bar{v}\| \\ &\leq \kappa^{1/2} y^{1/2}(v) \|\bar{v}\| \end{aligned}$$

Ahora, denotemos  $w \in \mathcal{M}_k$  y  $\bar{w} = \mathcal{S}^{(\nu/2)}(w)$ . Como  $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}$ , se tiene

$$a(\mathcal{C}(\bar{v}), \bar{w}) = a(\mathcal{C}^2(\bar{v}), \bar{w}) = a(\mathcal{C}(\bar{v}), \mathcal{C}(\bar{w}))$$

de donde

$$\begin{aligned} a(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v))), w) &= a(\hat{\mathcal{C}}(\bar{v}), \bar{w}) \\ &= (1 - \hat{\xi})a(\mathcal{C}(\bar{v}), \mathcal{C}(\bar{w})) + a((\hat{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \hat{\xi}\mathcal{C})(\bar{v}), \bar{w}) \\ &\leq ((1 - \hat{\xi})\kappa^{1/2}y^{1/2}(v)\kappa^{1/2}y^{1/2}(w) + \hat{\xi})\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| \\ &\leq ((1 - \hat{\xi})\kappa y^{1/2}(v)y^{1/2}(w) + \hat{\xi})((1 - y(v))(1 - y(w)))^{\nu/2} \|v\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

y finalmente observando que  $0 \leq y(v) \leq 1$  para todo  $v \in \mathcal{M}_k$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)))\| &\leq \sup_{x \in [0,1]} ((1 - \hat{\xi})\kappa x + \hat{\xi})(1 - x)^\nu \|v\| \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \sup_{x \in [0,1]} (\nu x + 1)(1 - x)^\nu \|v\| \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \|v\| \end{aligned}$$

donde hemos sustituido el valor de  $\hat{\xi}$  por  $\hat{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa + \nu}$  ■

Observación: En el anterior teorema se ha utilizado la condición de regularidad determinada por  $\alpha = 1$ .

Observación: La demostración anterior también es válida para el ciclo  $W$ . En la demostración se sustituye  $\hat{\xi}$  por  $\hat{\xi}^2$  y se elige  $\hat{\xi}^2 = \frac{\kappa}{\kappa + \nu}$ . De modo que en el caso  $\alpha = 1$  para el ciclo  $W$  tendremos

**Corolario**

Con las hipótesis de los teoremas (6.4) y (6.5) para  $\alpha = 1$  tendremos para el ciclo  $W$

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{\nu/2}(v)))||| \leq \bar{\xi} |||v||| \quad (6.3.35)$$

donde  $\bar{\xi} = \min\{\tilde{\xi}, \hat{\xi}\}$  donde  $\tilde{\xi}$  y  $\hat{\xi}$  están definidos como en los teoremas (6.4) y (6.5) respectivamente. ■

## 6.4. Complejidad Algorítmica del Método Multimalla

En esta sección estudiaremos la complejidad algorítmica del método multimalla, es decir, el número de operaciones necesario para resolver un sistema de ecuaciones con el método multimalla. Estimemos en primer lugar el número de operaciones necesario para realizar una iteración del algoritmo. Sea  $n_k$  el número de incógnitas (ecuaciones) en el nivel  $k$ . Supongamos  $C_H = \sup_{0 \leq k \leq K} \frac{n_{k-1}}{n_k}$ . Llamemos  $\theta = C_H \gamma < 1$ . Sea  $\nu$  el número de suavizados (presuavizados y postsuavizados) en cada iteración. Para un ciclo  $\gamma$  y para todo nivel  $k$  el número de operaciones en cada paso del algoritmo es

- Suavizado,  $\mathcal{S}$ :  $C_S \cdot n_k$
- Restricción,  $\mathcal{R}$ :  $C_R \cdot n_k$
- Prolongación,  $\mathcal{P}$ :  $C_P \cdot n_k$
- Resolución exacta en el nivel  $k = 0$ :  $C_0$

El número de operaciones  $Nop$  en una iteración del algoritmo multimalla del ciclo  $\gamma$  será

$$\begin{aligned} Nop &= (\nu C_S + C_R + C_P)(n_K + \gamma n_{K-1} + \dots + \gamma^{K-1} n_1) + \gamma^{K-1} C_0 \\ &= (\nu C_S + C_R + C_P)(1 + \theta + \dots + \theta^{K-1})n_K + \frac{\theta^{K-1}}{C_H^{K-1}} C_0 \\ &\leq \left( \frac{(\nu C_S + C_R + C_P)}{1 - \theta} + \frac{C_0 \theta^{K-1}}{n_1} \right) n_K \leq C n_K \end{aligned}$$

#### 6.4. COMPLEJIDAD ALGORÍTMICA DEL MÉTODO MULTIMALLA

---

donde se ha tenido en cuenta

$$\begin{aligned} n_{K-1} &\leq C_H n_K \\ n_{K-2} &\leq C_H n_{K-1} \leq C_H^2 n_K \\ &\dots \\ n_1 &\leq C_H^{K-1} n_K \end{aligned}$$

##### Observaciones:

Veamos en que condiciones se cumple la restricción  $\theta < 1$  de modo que el número de operaciones de una iteración del algoritmo multimalla de ciclo  $\gamma$  sea proporcional al número de ecuaciones. Llamando  $h_k$  al diámetro máximo de los elementos de mallado correspondiente al espacio  $\mathcal{M}_k$ , en un refinamiento uniforme tendremos  $\frac{h_{k-1}}{h_k} \approx 2$  y en consecuencia  $\frac{n_{k-1}}{n_k} = \frac{h_{k-1}^{-d}}{h_k^{-d}} \approx 2^{-d} \approx C_H$ . De modo que

$$\theta = C_H \gamma \approx 2^{-d} \gamma < 1$$

lo que implica la condición  $\gamma < 2^d$ . Por tanto en problemas de dimensión  $d = 1$ , se necesita  $\gamma = 1$ . En problemas de dimensión  $d = 2$  la condición es  $\theta = \gamma C_H = \frac{\gamma}{4} < 1$  que se satisface para  $\gamma \leq 3$ . En problemas de dimensión  $d = 3$  la condición es  $\theta = \gamma C_H = \frac{\gamma}{8} < 1$  que se satisface para  $\gamma \leq 7$ . En un refinamiento adaptativo en problemas en dimensión  $d = 2$ , tendremos  $\frac{n_{k-1}}{n_k} \approx 1/2 = C_H$ , necesitamos entonces  $\gamma < 2$ , es decir  $\gamma = 1$ . Para el ciclo  $V$  tenemos siempre  $\theta = C_H < 1$ , la condición es  $\frac{n_{k-1}}{n_k} < 1$  que se satisface siempre.

Evaluemos ahora el número de operaciones necesarias para obtener una solución aproximada del sistema de ecuaciones con un error inferior a una tolerancia prefijada. Sea  $u_K \in \mathcal{M}_K$  la solución exacta en el nivel  $K$ . Sea  $u_K^{(0)} \in \mathcal{M}_K$  el valor aproximado inicial y  $u_K^{(i)} \in \mathcal{M}_k$  el valor obtenido después de  $i$  iteraciones del algoritmo multimalla. Queremos elegir el número de iteraciones  $i$  de manera que

$$\|u_K^{(i)} - u_K\| \leq \varsigma^i \|u_K^{(0)} - u_K\|, \quad \varsigma^i < \epsilon \quad (6.4.1)$$

#### 6.4. COMPLEJIDAD ALGORÍTMICA DEL MÉTODO MULTIMALLA

---

donde  $\varsigma = \tilde{\xi}$  para  $\gamma = 2$  o  $\varsigma = \hat{\xi}$  para  $\gamma = 1$  definido en los teoremas (6.4) y (6.5). La tolerancia  $\epsilon$  está fijada de antemano. En la práctica si estamos resolviendo un sistema de ecuaciones que proviene de la aproximación de un problema de ecuaciones en derivadas parciales mediante el Método de Elementos Finitos ( o Diferencias Finitas o Volúmenes Finitos) queremos obtener una solución aproximada dentro de los márgenes de error del propio método, es decir, si suponemos que el método es de orden  $s$ , el requerimiento será  $\varsigma^i = Ch_K^s$ . De modo que si  $n_K = h_K^{-d}$ ,  $\varsigma^i = Cn_K^{-s/d}$  de donde tomando logaritmos

$$i \log(\varsigma) = \log(C) - \frac{s}{d} \log(n_K)$$

es decir el número de iteraciones a realizar  $i$  es del orden  $i = \mathcal{O}(\log n_K)$  y el número total de operaciones para resolver el problema dentro de la precisión prefijada será

$$\mathcal{O}(n_K \log(n_K))$$

### Método Multimalla Completo: Iteración Anidada

En el algoritmo multimalla considerado anteriormente el punto de partida es el sistema correspondiente a la malla más fina es decir la correspondiente al espacio  $\mathcal{M}_K$ . Consideremos ahora una modificación del algoritmo en la que el punto de partida es el sistema con menor número de ecuaciones, es decir el correspondiente a la malla más gruesa correspondiente al espacio  $\mathcal{M}_0$ . El algoritmo siguiente se conoce como Método Multimalla Completo (en inglés “Full Multigrid Method”) y se basa en la iteración anidada siguiente:

1.  $\tilde{u}_0 = u_0$  solución exacta en  $\mathcal{M}_0$
2. Para  $k = 1, \dots, K$

a)  $u_{k,0} = \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1})$

b)  $MGM(k, \nu_1, \nu_2, \gamma, i, u_{k,0}, u_{k,i})$



#### 6.4. COMPLEJIDAD ALGORÍTMICA DEL MÉTODO MULTIMALLA

---

$$c) \tilde{u}_k = u_{k,i}$$

donde  $\Pi_{k-1,k}$  es el operador de prolongación

$$\begin{aligned} \Pi_{k-1,k} : \mathcal{M}_{k-1} &\rightarrow \mathcal{M}_k \\ v_{k-1} &\rightarrow v_k = v_{k-1} \end{aligned}$$

y además el número de iteraciones  $i$  es el mismo para todos los niveles  $k$ .

Consideremos ahora la resolución mediante el Método de Elementos Finitos del problema (6.2.1) con el algoritmo multimalla completo. Podemos enunciar la siguiente estimación del error,

**Teorema 6.6.** : Estimación del error para la iteración anidada.

Sean  $C_1 \geq 0$ ,  $s > 0$  y  $h_k$  verificando

$$\|u_k - u\| \leq C_1 h_k^s \quad \forall k \quad (6.4.2)$$

y

$$\|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| \leq C_1 h_k^s \quad \forall k \quad (6.4.3)$$

donde  $\|v\|$  es la norma de  $v \in \mathcal{H}$ . Sea  $\varsigma = \tilde{\xi}$  para  $\gamma = 2$  o  $\varsigma = \hat{\xi}$  para  $\gamma = 1$ , definido en los teoremas (6.4) y (6.5), entonces

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq C_3 C_1 h_k^s \quad (6.4.4)$$

con

$$C_3(\varsigma, i) = \frac{\varsigma^i}{1 - C_2 \varsigma^i}$$

donde

$$C_2 = \sup_k \left( \frac{h_{k-1}}{h_k} \right)^s$$

Observación: Observemos que la única condición requerida para el valor de  $i$  es  $C_2 \varsigma^i < 1$ .

**Demostración**

#### 6.4. COMPLEJIDAD ALGORÍTMICA DEL MÉTODO MULTIMALLA

---

Procederemos por recurrencia: Para  $k = 0$  el teorema es cierto. Supongamos cierto el teorema para un nivel  $k - 1$ , es decir,

$$\|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\| \leq C_3 C_1 h_{k-1}^s$$

tendremos para el error en el nivel  $k$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_k - u_k\| &= \|u_k^{(i)} - u_k\| \leq \varsigma^i \|u_k^{(0)} - u_k\| = \varsigma^i \|\Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1}) - u_k\| \\ &= \varsigma^i \|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k + \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1}) - \Pi_{k-1,k}(u_{k-1})\| \\ &\leq \varsigma^i (\|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| + \|\Pi_{k-1,k}\| \cdot \|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\|) \\ &\leq \varsigma^i (C_1 h_k^s + C_3 C_1 h_{k-1}^s) \leq \varsigma^i C_1 h_k^s (1 + C_3 C_2) \\ &= C_3 C_1 h_k^s \end{aligned}$$

donde el último paso es cierto si elegimos  $C_3(\varsigma, i) = \frac{\varsigma^i}{1 - C_2 \varsigma^i}$  ■

Comentario: Hemos utilizado la propiedad  $\|\Pi_{k-1,k}\| \leq 1$ . En efecto si  $\Pi_{k-1,k}$  es el operador de prolongación definido por la inyección de  $\mathcal{M}_{k-1}$  en  $\mathcal{M}_k$ , tenemos  $\|\Pi_{k-1,k}\| = 1$ .

Comentario: La estimación habitual en una aproximación mediante Elementos Finitos del problema (6.2.1) es

$$\|u_k - u\| \leq C h_k^s \quad \forall k$$

donde podemos suponer que la constante  $C$  es independiente del nivel  $k$ .

Utilizando  $C_2 \geq \left(\frac{h_{k-1}}{h_k}\right)^s$

$$\begin{aligned} \|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| &= \|u_{k-1} - u_k\| \leq \|u_{k-1} - u\| + \|u_k - u\| \\ &\leq C h_{k-1}^s + C h_k^s \leq C h_k^s (1 + C_2) \end{aligned}$$

Elijiendo ahora  $C_1 = (1 + C_2)C$  se obtienen las dos propiedades (6.4.2) y (6.4.3) para la misma constante  $C_1$  del enunciado.

Comentario: El teorema asegura que la cota del error en todos los niveles  $k = 0, 1, \dots, K$  difiere respecto al error de discretización  $C_1 h_k^s$  únicamente por factor  $C_3(\varsigma, i)$ .

### Coste de la iteración anidada

Vamos a evaluar el número de operaciones en el nivel  $k$  de la iteración anidada. El coste de una iteración del método multimalla en el nivel  $k$ , despreciado el coste del término  $\frac{\theta^{k-1}}{n_1} \cdot n_k$  correspondiente a la resolución exacta en el nivel  $k = 0$ , es

$$W_k = \frac{(\nu C_S + C_R + C_P)n_k}{1 - \theta}$$

donde  $\theta = C_H \gamma < 1$ . Puesto que tenemos  $n_{k-1} \leq C_H n_k$  tendremos en cada nivel

- $W_{K-1} \leq C_H W_K$
- $W_{K-2} \leq C_H W_{K-1} \leq C_H^2 W_K$
- ...
- $W_k \leq C_H^{K-k} W_K$

El coste de la iteración anidada será

$$\begin{aligned} & iW_1 + iW_2 + \dots + iW_k + \dots + iW_K \\ & \leq i \sum_{k=1}^K C_H^{K-k} W_K < \frac{i}{1 - C_H} W_K \end{aligned}$$

También hemos despreciado el coste de la prolongación  $u_k^{(0)} = \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1})$ .

En consecuencia el número de operaciones para realizar la iteración anidada con  $i$  iteraciones en cada nivel es a lo sumo  $\frac{1}{1 - C_H}$  veces más que  $i$  iteraciones simples en el nivel  $K$ .

### Corolario

En el contexto anterior, el número de operaciones para resolver el sistema de ecuaciones utilizando la iteración anidada es proporcional al número de ecuaciones.

**Demostración**

Basta elegir el número de iteraciones  $i$  a realizar en cada nivel verificando  $C_2\zeta^i < 1$ . ■

## 6.5. Anexo: Desigualdades de Hölder

**Teorema 6.7.** : Desigualdad de Young

Para  $1 \leq p, q$  con  $1/p + 1/q = 1$

$$a, b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall a \geq 0 \quad \forall b \geq 0 \quad (6.5.1)$$

**Demostración**

La función logaritmo es cóncava sobre  $]0, \infty[$ ,

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log(a) + \frac{1}{q}\log(b) = \log\left(\frac{1}{p}a^p \cdot \frac{1}{q}b^q\right)$$

de donde como la función logaritmo es también creciente en  $]0, \infty[$  se obtiene (6.5.1) ■

**Teorema 6.8.** : Desigualdad de Hölder

Sean  $u = (u_1, \dots, u_d)^t, v = (v_1, \dots, v_d)^t \in \mathbb{R}^d$  con producto escalar  $(u, v) = \sum_i u_i v_i$  y las normas  $\|v\|_p = \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{1/p}$  para todo  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p$ . Tenemos para  $p, q \geq 1$  y  $1/p + 1/q = 1$

$$|(u, v)| \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q \quad (6.5.2)$$

**Demostración**

Aplicando la desigualdad de Young (6.5.1) a los productos  $|u_i| \cdot |v_i|$ ,

$$|(u, v)| \leq \sum_i |u_i| \cdot |v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_i |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |v_i|^q = \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q \quad (6.5.3)$$

reemplazando  $u$  por  $\lambda u$  con  $\lambda > 0$

$$\lambda |(u, v)| \leq \frac{\lambda^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q$$

dividiendo por  $\lambda$

$$|(u, v)| \leq \frac{\lambda^{(p-1)}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda q} \|v\|_q^q$$

minimizando el término de la derecha en la anterior desigualdad con respecto a  $\lambda$ , el valor mínimo se alcanza para  $\lambda = \lambda_{min} = \|u\|_p^{-1} \cdot \|v\|_q^{q/p}$  y sustituyendo este valor se obtiene (6.5.2). ■

**Corolario:** Desigualdad de interpolación 1

Para  $0 \leq \beta \leq \alpha$  se tiene la siguiente desigualdad de interpolación

$$\|v\|_{1-\beta} \leq \|v\|_{1-\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}} \|v\|^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \quad (6.5.4)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \|v\|_{1-\beta}^2 &= \sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1-\beta)} \\ &= \sum_i v_i^{2\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)} v_i^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned}$$

llamemos  $a_i = v_i^{2\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}$  y  $b_i = v_i^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{1-\frac{\beta}{\alpha}}$  y apliquemos la siguiente desigualdad de Hölder (6.5.2) para  $p$  y  $q$  con  $1/p + 1/q = 1$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left( \sum_i a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_i b_i^q \right)^{1/q}$$

resultando

$$\|v\|_{1-\beta}^2 = \left( \sum_i v_i^{2p\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{p\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)} \right)^{1/p} \left( \sum_i v_i^{2q(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{q(1-\frac{\beta}{\alpha})} \right)^{1/q}$$

eligiendo  $p$  y  $q$  tales que  $1/p = \beta/\alpha$  y  $1/q = 1 - \beta/\alpha$  resulta

$$|||v|||_{1-\beta}^2 \leq \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i^{1-\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i \right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}} = |||v|||_{1-\alpha}^{2\frac{\beta}{\alpha}} \cdot |||v|||^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})}$$

extrayendo la raíz cuadrada en los dos miembros de la desigualdad se obtiene (6.5.4). ■

**Corolario:** Desigualdad de interpolación 2

Para  $0 < \alpha \leq 1$  se tiene la siguiente desigualdad de interpolación

$$|||v|||_{1+\alpha} \leq |||v|||^{1-\alpha} \cdot |||v|||_2^\alpha \quad (6.5.5)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} |||v|||_{1+\alpha}^2 &= \sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1+\alpha)} \\ &= \sum_i v_i^{2(1-\alpha)} \lambda_i^{(1-\alpha)} v_i^{2\alpha} \lambda_i^{2\alpha} \end{aligned}$$

llamemos  $a_i = v_i^{2(1-\alpha)} \lambda_i^{(1-\alpha)}$  y  $b_i = v_i^{2\alpha} \lambda_i^{2\alpha}$  y apliquemos la siguiente desigualdad de Hölder (6.5.2) para  $p$  y  $q$  con  $1/p + 1/q = 1$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left( \sum_i a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_i b_i^q \right)^{1/q}$$

resultando

$$|||v|||_{1+\alpha}^2 = \left( \sum_i v_i^{2p(1-\alpha)} \lambda_i^{p(1-\alpha)} \right)^{1/p} \left( \sum_i v_i^{2q\alpha} \lambda_i^{2q\alpha} \right)^{1/q}$$

eligiendo  $p$  y  $q$  tales que  $1/p = 1 - \alpha$  y  $1/q = \alpha$  resulta

$$|||v|||_{1+\alpha}^2 \leq \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i \right)^{1-\alpha} \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i^2 \right)^\alpha = |||v|||^{2(1-\alpha)} |||v|||_2^{2\alpha}$$

extrayendo la raíz cuadrada en los dos miembros de la desigualdad se obtiene (6.5.5). ■

# Referencias

- [1] Raviart, P.A., Thomas, J.M.: Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson, Paris (1988)
- [2] Ciarlet, P.G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, New York (1978)
- [3] Duvaut, G., Lions, J.L.: Les inequations en mecanique et en physique. Dunod, País (1972)
- [4] R.E.Bank, C.C. Douglas, *Sharp estimates for multigrid rates of convergence with general smoothing and acceleration*, Siam J. Numer. Anal., No. 4, 617-633 (1985).
- [5] S.F. McCormick, *Multigrid methods for variational problems: General theory for the V-cycle*, Siam J. Numer. Anal., No. 4, 634-643 (1985).
- [6] C.C.Douglas, *Multigrid algoritms with applications to elliptic boundary value problems*, Siam J. Numer. Anal., No. 2, 236-254 (1984).
- [7] S.F. McCormick, *Multigrid methods for variational problems: Further results*, Siam J. Numer. Anal., No. 2, 255-271 (1984).
- [8] D.Braess, W.Hackbush, *A new convergence proof for the multigrid method including the V-cycle*, Siam J. Numer. Anal., No.5, 967-975 (1983).
- [9] S.F.McCormick, J.W.Ruge, *Multigrid methods for variational problems*, SIAM J. Numer. Anal., N0.5, 924-929 (1982).