

# El Método Multimalla

Luis Ferragut Canals

28 de octubre de 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Definiciones y Algoritmo Multimalla</b>	<b>4</b>
2.1. Descripción del problema . . . . .	4
2.2. Descripción del algoritmo multimalla . . . . .	5
2.3. Interpretación Matricial . . . . .	8
<b>3. Análisis numérico del método multimalla</b>	<b>13</b>
3.1. Método de dos mallas . . . . .	14
3.2. Convergencia del Método multimalla, ciclo $W$ ( $\gamma = 2$ ) . . . . .	24
3.3. Convergencia del Método multimalla, ciclo $V$ ( $\gamma = 1$ ) . . . . .	26
<b>4. Complejidad Algorítmica del Método Multimalla</b>	<b>31</b>
<b>5. Anexo: Desigualdades de Hölder</b>	<b>37</b>

## Índice de figuras

1.	Error inicial $\mathbf{E}^{(0)}$ . . . . .	3
2.	Error $\mathbf{E}^{(\nu)}$ después $\nu$ iteraciones . . . . .	4
3.	Funciones de la base de $\mathcal{M}_0$ . . . . .	11
4.	Funciones de la base de $\mathcal{M}_1$ . . . . .	11
5.	Gráfica $\kappa^\alpha f(\nu, \alpha)$ vs $\alpha$ después $\nu$ iteraciones . . . . .	20

## 1. Introducción

Consideremos un sistema lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

con matriz  $\mathbf{A}$  simétrica definida positiva y que proviene de la discretización mediante elementos finitos, diferencias finitas o volúmenes finitos de un problema en derivadas parciales (se puede también pensar en un sistema multimalla algebraico).

Si consideramos un método iterativo estándar (p.e. Jacobi, Gauss-Seidel, Gradiente Conjugado) se observa una convergencia rápida en las primeras iteraciones y después una ralentización de la misma. La explicación es sencilla. Veámoslo en el caso de un método iterativo lineal asociado a una matriz auxiliar  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{B}\mathbf{U}^{(i)} + (\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{U}^{(i)})$$

donde  $\mathbf{B}$  viene dada, por ejemplo

- En el método de Jacobi:  $\mathbf{B} = \text{Diag}(\mathbf{A})$
- En el método de Richardson:  $\frac{\omega}{\Lambda}\mathbf{I}$  siendo  $\Lambda$  el mayor valor propio de  $\mathbf{A}$

---

tendremos para los errores  $\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} - \mathbf{U}$

$$\mathbf{B}\mathbf{E}^{(i+1)} = \mathbf{B}\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{A}\mathbf{E}^{(i)}$$

o bien

$$\mathbf{E}^{(i+1)} = \mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}^{(i)} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{E}^{(i)}$$

Si consideramos ahora los valores propios y los vectores propios de  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$  que supondremos siempre  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 1$  y siendo  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  una base de vectores propios, escribiendo

$$\mathbf{E}^{(0)} = \sum_{l=1}^n v_l \psi_l$$

resulta

$$\mathbf{E}^{(i)} = \sum_{l=1}^n (1 - \lambda_l)^i v_l \psi_l$$

es decir las componentes  $v_l$  correspondientes a un valor de  $l$  grande ( $\lambda_l \approx 1$ ) se amortiguan rápidamente.

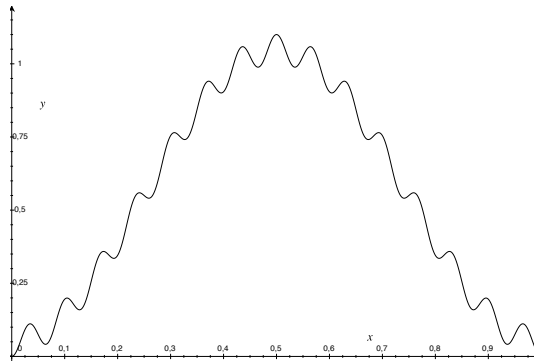


Figura 1: Error inicial  $\mathbf{E}^{(0)}$

después de algunas pocas iteraciones  $\nu$  el error  $\mathbf{E}^{(\nu)}$  tiene la forma

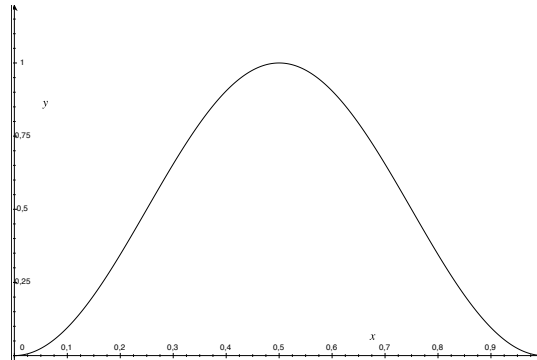


Figura 2: Error  $\mathbf{E}^{(\nu)}$  después  $\nu$  iteraciones

este error se puede corregir en mallas menos finas.

En este capítulo se ha desarrollado fundamentalmente a partir del artículo [1] y complementado por los artículos [2], [3], [4], [5], [6].

## 2. Definiciones y Algoritmo Multimalla

### 2.1. Descripción del problema

Se va a desarrollar la teoría general para sistemas simétricos y definido positivos. Consideraremos el marco de Elementos Finitos conformes:

- Un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- Una conjunto de subespacios de  $\mathcal{H}$  de dimensión finita

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}_k \subseteq \dots \subseteq \mathcal{H}$$

- $a(.,.) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal, continua, elíptica y simétrica. Con estas propiedades  $a(.,.)$  es un producto escalar en  $\mathcal{H}$ . Denotamos  $\|\cdot\|$  la norma asociada, es decir  $\|v\|^2 = a(v, v)$  que es una norma equivalente a la norma en  $\mathcal{H}$ .

- $g(\cdot) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma lineal continua.

El problema a resolver es: Hallar  $u \in \mathcal{H}$  tal que

$$a(u, v) = g(v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (2.1)$$

En la práctica queremos encontrar una solución aproximada en un subespacio  $\mathcal{M}_K$  de dimensión finita, es decir, la solución  $u_K \in \mathcal{M}_K$  de

$$a(u_K, v_K) = g(v_K) \quad \forall v_K \in \mathcal{M}_K \quad (2.2)$$

## 2.2. Descripción del algoritmo multimalla

Para distintos valores de  $k = 0, 1, \dots, K$  consideraremos problemas del tipo

$$a(u_k, v_k) = g_k(v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (2.3)$$

donde  $g_k$  será definido en la propia descripción del algoritmo.

Para cada entero  $k$  introducimos una forma bilineal auxiliar

$$b_k(\cdot, \cdot) : \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\max_{v_k \in \mathcal{M}_k} \frac{a(v_k, v_k)}{b(v_k, v_k)} \leq 1 \quad (2.4)$$

Se denota  $MG(k, \nu_1, \nu_2, \gamma, p, u_{k,0}, u_{k,p})$  al algoritmo correspondiente a la resolución el nivel  $k$ , con  $\nu_1$  iteraciones de pre-suavizado,  $\nu_2$  iteraciones de post-suavizado,  $\gamma$  es el número de llamadas al algoritmo multimalla de nivel  $k - 1$ ,  $p$  indica el número de iteraciones realizadas en este nivel  $k$ ,  $u_{k,0}$  es el valor inicial,  $u_{k,p}$  es el valor obtenido despues de  $p$  iteraciones.

Vamos a describir una iteración del anterior algoritmo, es decir,  $MG(k, \nu_1, \nu_2, \gamma, 1, u_{k,0}, u_k$

1. Si  $k = 0$  se resuelve el problema (2.3) de forma exacta

## 2.2 Descripción del algoritmo multimalla

---

2. Si  $k \geq 1$ , entonces

a) Pre-suavizado: Sea  $u_k^{(0)} = u_{k,0}$ . Se realizan  $\nu_1$  iteraciones de

$$b_k(u_k^{(i)} - u_k^{(i-1)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(i-1)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k$$

y se obtiene  $u_k^{(\nu_1)}$

b) Corrección:  $\mathcal{M}_{k-1}$ :

- $g_{k-1}(v_{k-1}) = g(v_{k-1}) - a(u_k^{(\nu_1)}, v_{k-1})$
- $u_{k-1,0} = 0$
- $MG(k-1, \nu_1, \nu_2, \gamma, \gamma, 0, u_{k,\gamma})$
- $u_k^{\nu_1,c} = u_k^{\nu_1} + u_{k-1,\gamma}$

c) Post-suavizado:  $\nu_k^{(\nu_1,c,0)} = u_k^{(\nu_1,c)}$  y realizamos  $\nu_2$  iteraciones de

$$b_k(u_k^{(\nu_1,c,i+1)} - u_k^{(\nu_1,c,i)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(\nu_1,c,i)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k$$

y se obtiene  $u_{k,1} = u_k^{(\nu_1,c,\nu_2)}$

En el análisis de las secciones siguientes consideraremos el problema generalizado de valores y vectores propios

$$a(\psi_j, v_k) = \lambda_j b_k(\psi_j, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (2.5)$$

Bajo la hipótesis (2.4) resulta

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq 1$$

y se puede elegir una base  $(\psi_j)_j$  de funciones propias tal que

$$b_k(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} \quad (2.6)$$

$$a(\psi_i, \psi_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (2.7)$$

Utilizaremos la siguiente escala de normas  $\|v\|_\theta$ : Dada  $v \in \mathcal{M}_k$ , que se puede escribir en función de la base de vectores propios  $v = \sum v_i \psi_i$ , definimos:

$$|||v|||_{\theta}^2 = \sum \lambda_i^{\theta} v_i^2$$

En particular

$$|||v|||_1^2 = \|v\|^2 = a(v, v) \quad \forall k$$

y

$$|||v|||_0^2 = b_k(v, v) \quad \forall k$$

En lo que sigue utilizaremos para la norma  $|||v|||_1$  indistintamente las notaciones  $|||v|||$  y  $\|v\|$ .

Ejemplos:

Consideremos un problema elíptico de segundo orden definido en un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^{d=1,2,3}$  donde el espacio  $\mathcal{H}$  es  $H^1(\Omega)$  o un subespacio del mismo y sea  $(\cdot, \cdot)$  el producto escalar en el espacio  $L^2(\Omega)$ , esto es  $(u, v) = \int_{\Omega} uv$  y la norma correspondiente  $\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)$ . Por otra parte designamos  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  la norma habitual en  $H^1(\Omega)$

El ejemplo más sencillo de algoritmos de suavizado cumpliendo la condición (2.4) es el método de Richardson:

Sea  $\Lambda = \max_{v \in \mathcal{M}_k} \frac{a(v,v)}{(v,v)}$ , elegimos

$$b_k(u, v) = \Lambda_k(u, v)$$

$$\Lambda_k(u_k^{(\nu_1, c, i+1)} - u_k^{(i)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(\nu_1, c, i)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (2.8)$$

Recordemos también que típicamente en problemas elípticos de segundo orden donde  $\mathcal{M}_k$  representan subespacios de elementos finitos, caracterizados por un tamaño de elementos  $h_k$  se tiene

$$\Lambda_k \leq Ch_k^{-2} \quad \forall k \quad (2.9)$$

### 2.3 Interpretación Matricial

---

Tendremos las siguientes relaciones entre normas:

Existe una constante  $C$  independiente de  $k$  tal que

$$C^{-1}|||v|||_1 \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C|||v|||_1 \quad (2.10)$$

$$C^{-1}h_k|||v|||_0 \leq \|v\|_{0,\Omega} \leq Ch_k|||v|||_0 \quad (2.11)$$

y en general consideraremos que

$$C^{-1}h_k^{1-\theta}|||v|||_\theta^2 \leq \|v\|_{\theta,\Omega} \leq Ch_k^{1-\theta}|||v|||_\theta \quad \forall k \quad (2.12)$$

### 2.3. Interpretación Matricial

En esta subsección nos restringimos al marco del Método de Elementos Finitos.

Sea  $(\phi_i^{(k)})_i$   $i = 1, \dots, N_k$  la base de  $\mathcal{M}_k$  asociada al Método de Elementos Finitos correspondiente. La matriz asociada a la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  vendrá dada por  $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{ij}^{(k)})$ , con  $A_{ij}^{(k)} = a(\phi_j^{(k)}, \phi_i^{(k)})$ . Respectivamente la matriz asociada a la forma bilineal  $b_k(\cdot, \cdot)$  es  $\mathbf{B}^{(k)} = (B_{ij}^{(k)}) = b_k(\phi_j^{(k)}, \phi_i^{(k)})$ . Naturalmente  $\mathbf{A}^{(k)}$  y  $\mathbf{B}^{(k)}$  dependen de  $k$ . Cuando no sea necesario omitiremos el índice  $k$  para aligerar la notación.

Con notación matricial el problema (2.3) se escribe

$$\mathbf{AU} = \mathbf{G}$$

donde  $\mathbf{U} = (U_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$  siendo los términos  $U_i$  los coeficientes del desarrollo de  $u_k \in \mathcal{M}_k$ ,  $u_k = \sum U_i \phi_i$  y  $\mathbf{G} = (G_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$ , con  $G_i = g(\phi_i)$

*Suavizado:*

La iteración de suavizado para un vector de partida  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_k}$  se escribirá

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{W}} - \mathbf{W}) = \mathbf{G} - \mathbf{AW}$$



Si  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_k}$  es la solución de  $\mathbf{AU} = \mathbf{G}$  y denotamos los errores antes y después de la iteración  $\mathbf{E} = \mathbf{W} - \mathbf{U}$  y  $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{W}} - \mathbf{U}$  respectivamente, tendremos  $\mathbf{B}\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B}\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{E}$ , o bien  $\bar{\mathbf{E}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{E}$ .

*Corrección:*

Para un valor aproximado  $w_k = \sum W_i \phi_i \in \mathcal{M}_k$  del correspondiente problema (2.3) y  $\mathbf{W} = (W_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$  el correspondiente vector asociado. La corrección en  $\mathcal{M}_{k-1}$  se escribe

Hallar  $\delta \in \mathcal{M}_{k-1}$  tal que

$$a(\delta, \phi_i^{(k-1)}) = g(\phi_i^{(k-1)}) - a(w_k, \phi_i^{(k-1)}) \quad \forall i = 1, \dots, N_k$$

expresando las funciones de la base  $(\phi_i^{(k-1)})$  de  $\mathcal{M}_{k-1}$  como combinación lineal de las funciones de la base de  $\mathcal{M}_k$

$$\phi_i^{(k-1)} = \sum_{j=1, \dots, N_k} R_{i,j} \phi_j^{(k)} \quad \forall i = 1, \dots, N_{k-1}$$

tenemos  $\mathbf{G}^{(k-1)} = (G_i^{(k-1)}) \in \mathbb{R}^{N_{k-1}}$  con

$$G_i^{(k-1)} = g(\phi_i^{(k-1)}) = \sum_j R_{i,j} g(\phi_j^{(k)}) = \sum_j R_{i,j} G_j^{(k)}$$

denotando  $\mathbf{R} = (R_{i,j})_{i=1, \dots, N_{k-1}; j=1, \dots, N_k}$

$$\mathbf{G}^{(k-1)} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{(k)}$$

Por otra parte, para  $\mathbf{A}^{(k-1)} = (A_{i,j}^{(k-1)})_{i,j=1, \dots, N_{k-1}}$

$$\begin{aligned} A_{i,j}^{(k-1)} &= a(\phi_j^{(k-1)}, \phi_i^{(k-1)}) \\ &= \sum_s \sum_l R_{j,s} R_{i,l} a(\phi_s^{(k)}, \phi_l^{(k)}) \\ &= \sum_s \sum_l R_{j,s} R_{i,l} A_{ls}^{(k)} \\ &= \sum_s \sum_l R_{i,l} A_{ls}^{(k)} R_{s,j}^t \end{aligned}$$

### 2.3 Interpretación Matricial

---

$$\mathbf{A}^{(k-1)} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{R}^t$$

Finalmente denotando  $\Delta = (\delta_i) \in \mathbb{R}^{N_{k-1}}$  definido por  $\delta = \sum_i \delta_i \phi_i^{(k-1)}$  la corrección se escribe con notación matricial

$$\mathbf{A}^{(k-1)}\Delta = (\mathbf{R}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{R}^t)\Delta = \mathbf{R}(\mathbf{G}^{(k)} - \mathbf{A}^{(k)}\mathbf{W})$$

$\mathbf{R}$  es la matriz asociada al operador de restricción y  $\mathbf{R}^t$  su matriz transpuesta es la matriz asociada al operador de prolongación. Finalmente el valor corregido en  $\mathbb{R}^{N_k}$  se escribe

$$\mathbf{W} + \mathbf{R}^t\Delta$$

*Ejemplo:* Para ilustrar los operadores de Prolongación y Restricción consideraremos ahora un ejemplo sencillo en dimensión 1 que ilustra suficientemente el problema. En la figura (3) se representan las tres funciones de la base de una malla formada por tres elementos finitos de tipo  $(T, P, \Sigma)$  donde  $T$  es el triángulo,  $P$  es el espacio de polinomios de grado 1 y  $\Sigma$  es un intervalo. En la figura (4) se representan las 5 funciones de la base de una malla formada por 4 elementos finitos. La malla se obtiene de la malla gruesa anterior por refinamiento de los intervalos en dos subintervalos iguales.

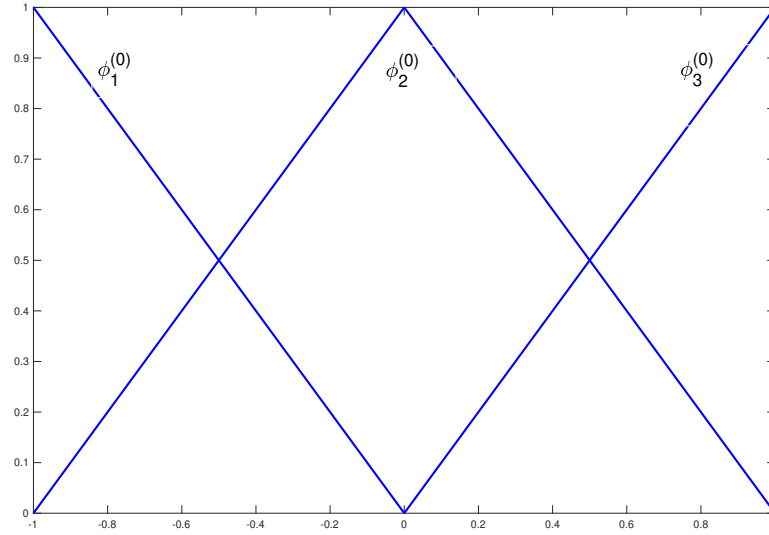


Figura 3: Funciones de la base de  $\mathcal{M}_0$

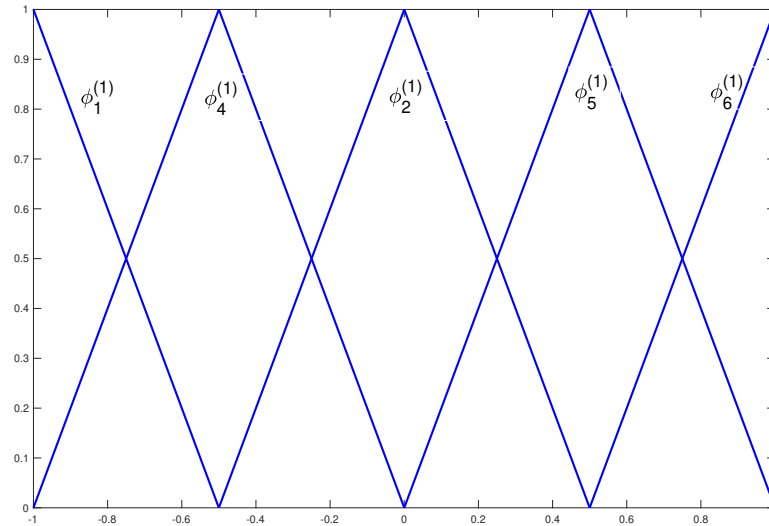


Figura 4: Funciones de la base de  $\mathcal{M}_1$

### 2.3 Interpretación Matricial

---

Para construir los operadores de Prolongación y de Restricción basta expresar las funciones de la base de  $\mathcal{M}_0$  en función de las funciones de la base de  $\mathcal{M}_1$ . Tendremos,

$$\phi_1^{(0)} = \phi_1^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_4^{(1)} \quad (2.13)$$

$$\phi_2^{(0)} = \phi_2^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_4^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_5^{(1)} \quad (2.14)$$

$$\phi_3^{(0)} = \phi_3^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_5^{(1)} \quad (2.15)$$

Sea ahora una función  $v \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1$ ,

$$v = v_1^{(0)}\phi_1^{(0)} + v_2^{(0)}\phi_2^{(0)} + v_3^{(0)}\phi_3^{(0)}$$

que se representada por un vector de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{V}^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)})^t$ . Sustituyendo en la expresión de  $v$  anterior las funciones  $\phi_i^{(0)}$   $i = 1, 2, 3$ , en función de la base de  $\mathcal{M}_1$  utilizando (2.13), (2.14), (2.15), resulta

$$v = v_1^{(0)}\phi_1^{(1)} + v_2^{(0)}\phi_2^{(1)} + v_3^{(0)}\phi_3^{(1)} + \frac{v_1^{(0)} + v_2^{(0)}}{2}\phi_4^{(1)} + \frac{v_2^{(0)} + v_3^{(0)}}{2}\phi_5^{(1)}$$

de modo que las componentes de  $v$  en la base de  $\mathcal{M}_1$  son

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= v_1^{(0)} \\ v_2^{(1)} &= v_2^{(0)} \\ v_3^{(1)} &= v_3^{(0)} \\ v_4^{(1)} &= \frac{v_1^{(0)} + v_2^{(0)}}{2} \\ v_5^{(1)} &= \frac{v_2^{(0)} + v_3^{(0)}}{2} \end{aligned}$$

que se representa como un vector de  $\mathbb{R}^5$ ,  $\mathbf{V}^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_4^{(1)}, v_5^{(1)})^t$ . El operador de restricción  $\mathbf{R}$  es entonces

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y el operador de prolongación es  $\mathbf{R}^t$ .

---

### 3. Análisis numérico del método multimalla

Primeramente analizaremos el método de 2 mallas y a continuación el método multimalla como una perturbación del método de dos mallas. En lo que sigue haremos uso de algunos resultados previos.

**Lema 1.** En  $\mathcal{M}_k$  se tiene la siguiente desigualdad para valores de  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$a(u, v) \leq |||u|||_{1+\alpha} |||v|||_{1-\alpha} \quad \forall u, v \in \mathcal{M}_k \quad (3.1)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_i \sum_j u_i v_j a(\psi_i, \psi_j) = \sum_i u_i v_i \lambda_i \\ &= \sum_i u_i \lambda_i^{(1+\alpha)/2} v_i \lambda_i^{(1-\alpha)/2} \\ &= \sqrt{\sum_i (u_i)^2 \lambda_i^{(1+\alpha)}} \sqrt{\sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1-\alpha)}} \\ &= |||u|||_{1+\alpha} |||v|||_{1-\alpha} \end{aligned}$$

■

Observar que la propiedad anterior es una propiedad algebraica.

**Lema 2.** Sean  $p, \alpha, \beta > 0$  entonces,

- (a)  $f(\alpha, \beta) = \sup_{x \in [0,1]} x^\alpha (1-x)^\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta$
- (b)  $f(\alpha, \beta)^p = f(p\alpha, p\beta)$
- (c)  $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$

*Demostración.* Demostremos (a). Pongamos  $y = x^\alpha (1-x)^\beta$ ; derivando

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} (1-x)^\beta - x^\alpha \beta (1-x)^{\beta-1} = 0$$

### 3.1 Método de dos mallas

---

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(\alpha(1-x) - \beta x) = 0$$

de donde  $\alpha(1-x) - \beta x = 0$  y el máximo se obtiene para el valor de  $x = x_{max} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ . y el valor del máximo  $y_{max}$  viene dado por

$$y_{max} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta \quad (3.2)$$

Las demostraciones de (b) y (c) son inmediatas. ■

**Lema 3.** Si existen dos constantes  $\kappa \geq 1$  y  $\alpha > 0$  tales que para  $u \in \mathcal{M}_k$

$$|||u|||_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} |||u|||$$

entonces

$$|||u|||_{1-\beta} \leq \kappa^{\beta/2} |||u||| \quad \forall \beta \quad 0 \leq \beta \leq \alpha$$

*Demostración.* Utilizar la desigualdad de interpolación (5.4) demostrada en la sección (5)

$$|||u|||_{1-\beta} \leq |||u|||_{1-\alpha}^{\beta/\alpha} |||u|||^{1-\beta/\alpha}$$

■

### 3.1. Método de dos mallas

Sea  $e$  el error inicial. Podemos representar una iteración del algoritmo de dos mallas de la siguiente manera

$$\mathcal{S}^{(\nu_2)} \left( \mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu_1)}(e)) \right)$$

donde

- $\mathcal{S}$  representa una iteración del algoritmo suavizado.
- $\mathcal{C}$  representa la corrección

Elegiremos para simplificar  $\nu_1 = \nu_2 = \nu/2$  y queremos estimar  $\xi$  tal que

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| \leq \xi \|e\|$$

Observar que al reiterar las iteraciones la secuencia del algoritmo es

$$\mathcal{S}^{(\nu/2)}\mathcal{C}\dots\mathcal{S}^{(\nu)}\mathcal{C}\mathcal{S}^{(\nu)}\mathcal{C}\mathcal{S}^{(\nu)}\dots\mathcal{C}\mathcal{S}^{(\nu/2)}$$

de modo que  $\nu = 1$  tiene sentido salvo en la primer pre-suavizado y en el último post-suavizado.

**Suavizado,  $\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)$ :**

Sea  $e = \sum v_i \psi_i$  un error de partida y  $\mathcal{S}(e) = \sum s^i \psi_i$  el error después de realizar una iteración del algoritmo de suavizado tomando como valor inicial el correspondiente a  $e$  y que viene definido por

$$b(\mathcal{S}(e), \psi_j) = b(e, \psi_j) - a(e, \psi_j) \quad \forall j \quad (3.3)$$

sustituyendo la expresión de  $e$  y de  $\mathcal{S}(e)$  en (3.3). Gracias a las propiedades de ortogonalidad (2.6) y (2.7) de la base de funciones propias  $(\psi_i)_i$  resulta

$$s^j = (1 - \lambda_j)v^j \quad \forall j$$

Tenemos las siguientes propiedades de la iteración de suavizado:

**Lema 4.** Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{S}(e)\|_\theta \leq \|e\|_\theta \quad (3.4)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(e)\|_\theta^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^2 \lambda_i^\theta \\ &\leq \sum v_i^2 \lambda_i^\theta = \|e\|_\theta^2 \end{aligned}$$

■

**Lema 5.** Para  $\alpha > 0$  tendremos:

$$|||S^{(\nu/2)}(e)|||_{1+\alpha} \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||e||| \quad (3.5)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} |||S^{(\nu/2)}(e)|||_{1+\alpha}^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i^{1+\alpha} \\ &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i^\alpha \lambda_i \\ &\leq f(\nu, \alpha) |||e|||^2 \end{aligned}$$

de donde finalmente se obtiene (3.5) ■

**Lema 6.** Para  $\alpha > 0$  tendremos:

$$|||S^{(\nu/2)}(e)||| \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||e|||_{1-\alpha}^2 \quad (3.6)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} |||S^{(\nu/2)}(e)|||^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i \\ &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^\nu \lambda_i^\alpha \lambda_i^{1-\alpha} \\ &\leq f(\nu, \alpha) |||e|||_{1-\alpha}^2 \end{aligned}$$

de donde finalmente se obtiene (3.6) ■

Observación:

Observemos ahora que si denotamos la norma en  $L^2(\Omega)$  mediante  $\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)^{1/2}$  tendremos

$$|||v|||_0^2 = b_k(v, v) = \Lambda_k \|v\|_{0,\Omega}^2 \quad (3.7)$$

En un problema elíptico de segundo orden utilizando (2.9) y la relación (2.11), de la estimación (3.6) con  $\alpha = 1$  resulta para la iteración de Richardson

$$|||S^{(\nu/2)}(e)||| \leq \frac{C}{\sqrt{1+\nu}} h_k^{-1} \|e\|_{0,\Omega}$$



donde  $C$  es una constante independiente de  $k$ . Vemos que el factor de reducción del error depende de  $h_k^{-1}$  que es un valor en general muy grande para las mallas más finas por lo que en general se necesitarían muchas iteraciones del algoritmo de suavizado para reducir significativamente el error si permanecemos en el nivel  $k$ . La idea que subyace en el método multimalla es ir a corregir el error en mallas menos finas donde el valor de  $h_k$  es más grande.

**Corrección en la malla inferior,  $\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))$ :**

Sea  $u_k$  la solución exacta en el  $\mathcal{M}_k$  y  $e$  un error inicial correspondiente a una solución aproximada de partida. Sea  $u_k^{(\nu/2)}$  la aproximación obtenida después de realizar  $\nu/2$  iteraciones de suavizado en la malla  $k$ . Sea  $\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e) = e_k^{(\nu/2)} = u_k - u_k^{(\nu/2)}$  el error correspondiente a esta aproximación. La corrección (corrección exacta en el método de 2 mallas) en el nivel  $k - 1$  consiste en resolver el siguiente problema: Hallar  $\delta \in \mathcal{M}_{k-1}$  tal que

$$a(\delta, v_{k-1}) = g(v_{k-1}) - a(u_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) = a(u_k - u_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

o bien,

$$a(\delta, v_{k-1}) = a(u_k - u_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

es decir,

$$a(\delta - e_k^{(\nu/2)}, v_{k-1}) = 0 \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

$\delta$  es la proyección ortogonal del error  $e_k^{(\nu/2)}$  en el subespacio  $\mathcal{M}_{k-1}$  donde la ortogonalidad es en el sentido del producto escalar  $a(.,.)$ . El valor corregido es  $u_k^{(\nu/2,c)} = u_k^{(\nu/2)} + \delta$ , por lo tanto el error después del presuavizado y la corrección es

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)) = \mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}) = u_k - u_k^{(\nu/2,c)} = u_k - (u_k^{(\nu/2)} + \delta) = e_k^{(\nu/2)} - \delta \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$$

Podemos considerar que los elementos de  $\mathcal{M}_{k-1}^\perp$  son de variación lenta y los de  $\mathcal{M}_{k-1}$  son de variación rápida. Tenemos ahora que estimar

$$|||e_k^{(\nu/2)} - \delta||| = |||\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})|||$$

### 3.1 Método de dos mallas

---

**Teorema 1.** *Supongamos que existe constantes  $\kappa \geq 1$  y  $\alpha > 0$  tales que para todo  $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp \cap \mathcal{M}_k$*

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} \|v\| \quad (3.8)$$

entonces

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| \leq \xi \|e\| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k \quad (3.9)$$

donde

$$\xi = \begin{cases} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)^\nu & \text{si } \nu \leq \frac{\kappa-1}{\alpha} \\ \kappa^\alpha f(\nu, \alpha) & \text{si } \nu > \frac{\kappa-1}{\alpha} \end{cases}$$

Comentario:

Puesto que  $\delta$  es la proyección ortogonal de  $e_k^{(\nu/2)}$ ,

$$\|e_k^{(\nu/2)} - \delta\| = \inf_{v \in \mathcal{M}_{k-1}} \|e_k^{(\nu/2)} - v\|$$

Tenemos para todo  $v \in \mathcal{H}$ ,  $\|v\|^2 = a(v, v)$ . En problemas elípticos de segundo orden donde  $\mathcal{H}$  es  $H^1$  o un subespacio del mismo la norma  $\|\cdot\|$  es equivalente a la norma  $\|\cdot\|_1$  de  $H^1$  con constantes de equivalencia independientes de  $k$ . La dificultad que tenemos a la hora de encontrar una estimación de  $\|e_k^{(\nu/2)} - \delta\|$  es que  $e_k^{(\nu/2)}$  no es en general suficientemente regular para poder utilizar una estimación del tipo  $\|e_k^{(\nu/2)} - v_{k-1}\|_1 \leq Ch_{k-1} \|e_k^{(\nu/2)}\|_2$  para todo  $v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$  puesto que en general  $e_k^{(\nu/2)} \notin H^2$

*Demostración. Presuavizado y corrección:*

Tenemos gracias a la ortogonalidad entre  $\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})$  y  $\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}) - e_k^{(\nu/2)}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})\|^2 &= a(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}), \mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})) \\ &= a(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}), e_k^{(\nu/2)}) \\ &\leq \|\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})\|_{1-\alpha} \|e_k^{(\nu/2)}\|_{1+\alpha} \\ &\leq \kappa^{\alpha/2} \|\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})\| \|e_k^{(\nu/2)}\|_{1+\alpha} \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la hipótesis (3.8). Simplificando y utilizando la estimación (3.5)

$$|||\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})||| \leq \kappa^{\alpha/2} f(\nu/2, \alpha/2) |||e||| \quad (3.10)$$

*Postsuavizado:*

Después del postsuavizado, utilizando (3.6), resulta

$$|||S^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}))||| \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)})|||_{1-\alpha}$$

utilizando de nuevo (3.8), la estimación anterior (3.10) y las propiedades de la función  $f(.,.)$  se obtiene

$$|||S^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(e_k^{(\nu/2)}))||| \leq \kappa^\alpha f(\nu, \alpha) |||e||| \quad (3.11)$$

Finalmente sustituimos  $\alpha$  por  $\beta$  con  $0 \leq \beta \leq \alpha$  y minimizamos respecto a  $\beta$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\kappa^\beta f(\nu, \beta)) = \log\left(\frac{\kappa\beta}{\nu + \beta}\right) \kappa^\beta f(\nu, \beta) = 0$$

de donde

$$\frac{\kappa\beta}{\nu + \beta} = 1$$

lo que implica

$$\beta = \frac{\nu}{\kappa - 1}$$

Tenemos dos casos si  $\frac{\nu}{\kappa-1} > \alpha$  entonces el mínimo se alcanza en el extremo  $\beta = \alpha$  y

$$\xi = \kappa^\alpha f(\nu, \alpha)$$

En el caso  $\frac{\nu}{\kappa-1} \leq \alpha$  entonces el mínimo se alcanza para  $\beta = \frac{\nu}{\kappa-1}$  y despues de algunas operaciones elementales resulta

$$\xi = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)^\nu$$

■

### 3.1 Método de dos mallas

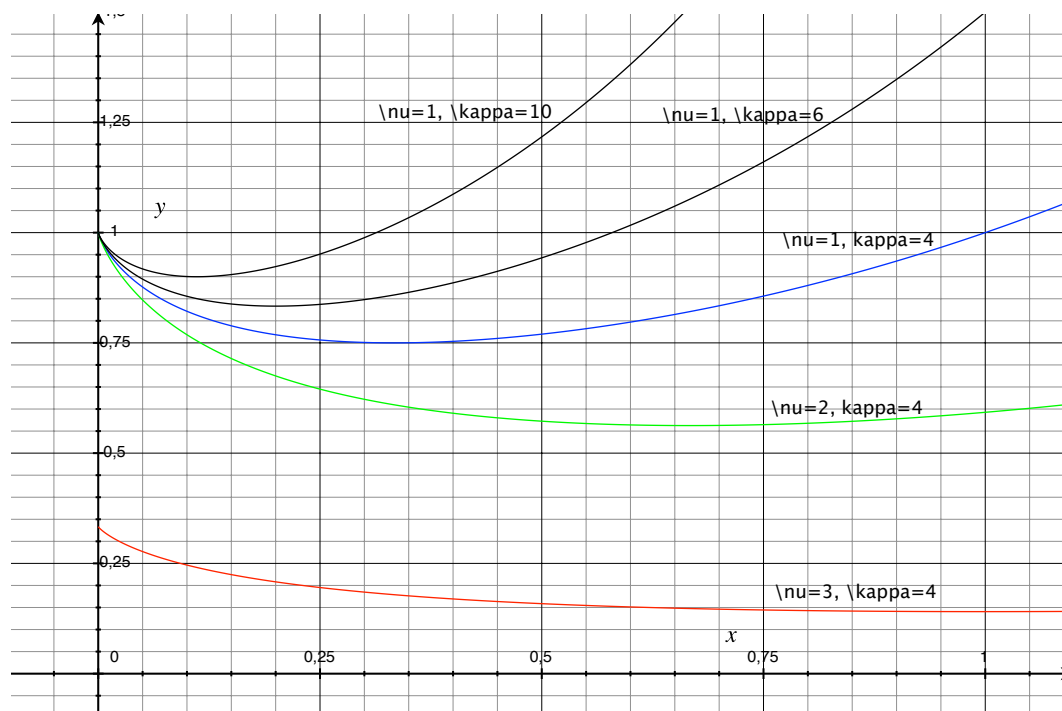


Figura 5: Gráfica  $\kappa^\alpha f(\nu, \alpha)$  vs  $\alpha$  después  $\nu$  iteraciones

#### Comentario:

Hasta aquí la teoría es puramente algebraica pues en la obtención de la estimación (3.9) no se hace uso del problema variacional en dimensión infinita de partida del que provienen el sistema de ecuaciones algebraico. El punto clave está en la hipótesis (3.8). Si el parámetro  $\kappa$  no depende del nivel  $k$  el factor de reducción del error es independiente de dicho nivel. También la estimación de  $\xi$  será mejor cuanto más pequeño sea el valor de  $\kappa$

Veamos en un problema elíptico de segundo orden como se puede estimar un valor de  $\kappa$  independiente del parámetro de la malla  $h_k$ .

Consideremos un problema elíptico de segundo orden,

$$-\nabla(a\nabla u) + bu = f \quad \text{in } \Omega \quad (3.12)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3.13)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado y poliédrico de  $\mathbb{R}^{d=1,2,3}$  y  $\Gamma$  su frontera que supondremos suficientemente regular. Suponemos  $f \in L^2(\Omega)$  y las funciones  $a \in C^1(\bar{\Omega})$  y  $b \in C^0(\bar{\Omega})$  verificando

$$0 < a_{min} \leq a(x) \leq a_{max} \quad y \quad 0 \leq b_{min} \leq b(x) \leq b_{max}$$

En este caso tomaremos como espacio  $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$ . La formulación débil del problema es hallar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \nabla v + buv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.14)$$

Consideraremos la aproximación del problema en una secuencia de espacios de elementos finitos construidos sobre un conjunto de mallas encajadas formadas mediante triangulaciones regulares  $\mathcal{T}_k$  de  $\Omega$  y  $\mathcal{M}_k = \{v_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas}, v_k|_{T_j} \in P_1(T_j)\}$ . Si designamos  $h_k$  el tamaño característico de la malla asociada al nivel  $k$  supondremos la relación  $h_{k-1} = 2h_k$ . Consideraremos en primer lugar el caso más sencillo en el que se tienen las hipótesis de regularidad y aproximación habituales.

**Teorema 2.** *Supongamos que se verifican las siguientes:*

1. *Hipótesis de regularidad.*

*Supongamos que la solución  $u$  de (3.14) verifica:*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_2 \|f\|_{0,\Omega} \quad (3.15)$$

*donde  $C_2 = C_2(a, b, \Omega)$*

2. *Hipótesis de aproximación.*

*Los espacios  $\mathcal{M}_k$  satisfacen la siguiente propiedad de aproximación: para  $v \in H^2(\Omega)$*

$$\inf_{\chi \in \mathcal{M}_k} \|v - \chi\|_{1,\Omega} \leq C_3 h_k \|v\|_{2,\Omega} \quad (3.16)$$

*donde  $C_3 = C_3(\Omega, \mathcal{T}_k)$*

### 3.1 Método de dos mallas

---

Entonces para todo  $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$  existe una constante  $\kappa > 0$  tal que

$$\|v\|_0 \leq \kappa^{1/2} \|v\|_1 \quad (3.17)$$

*Demostración.* Observemos que la relación (2.11) da

$$\|v\|_0 \leq C_4 h_k^{-1} \|v\|_{0,\Omega} \quad (3.18)$$

Y tenemos también la equivalencia de normas

$$C_0 \|v\| \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|v\| \quad (3.19)$$

Para estimar  $\|v\|_{0,\Omega}$  utilizaremos un argumento de dualidad estándar. Sea  $\mu \in L^2(\Omega)$  y sea  $z \in \mathcal{H}$  la solución de

$$a(z, w) = (\mu, w) \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Elegimos  $w = v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ . Para todo  $\chi \in \mathcal{M}_{k-1}$  tendremos

$$\begin{aligned} (\mu, v) &= a(z, v) = a(z - \chi, v) \leq \|z - \chi\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_3 h_{k-1} \|z\|_{2,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_2 C_3 h_{k-1} \|\mu\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{(\mu, v)}{\|\mu\|_{0,\Omega}} &\leq C_2 C_3 h_{k-1} \|v\|_{1,\Omega} \\ \|v\|_{0,\Omega} &= \sup_{\mu \in L^2(\Omega)} \frac{(\mu, v)}{\|\mu\|_{0,\Omega}} \leq C_2 C_3 h_{k-1} \|v\|_{1,\Omega} = 2C_2 C_3 h_k \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

y utilizando (3.18) y (3.19)

$$\|v\|_0 \leq 2C_2 C_3 C_4 \|v\|_{1,\Omega} \leq 2C_1 C_2 C_3 C_4 \|v\| \quad (3.20)$$

de donde  $\kappa^{1/2} = 2C_1 C_2 C_3 C_4$ . ■

Consideraremos ahora el caso más general con hipótesis de regularidad más débiles.

**Teorema 3.** Sean  $\mathcal{H}^s = H^s(\Omega)$  los espacios de Sobolev con las normas correspondientes  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ ,  $\mathcal{H}^0 = L^2(\Omega)$  y  $\mathcal{H}^1 = H_0^1(\Omega)$ . También  $\mathcal{H}^{-s} = H^{-s}(\Omega)$  es el espacio dual de  $\mathcal{H}^s = H^s(\Omega)$  y designamos mediante  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto de dualidad correspondiente.

1. Hipótesis de regularidad.

Supongamos que la solución  $u$  de (3.14) verifica: Para  $0 < \alpha \leq 1$

$$\|u\|_{1+\alpha,\Omega} \leq C_2 \|f\|_{\alpha-1,\Omega} \quad (3.21)$$

donde  $C_2 = C_2(a, b, \Omega)$

2. Hipótesis de aproximación.

Los espacios  $\mathcal{M}_k$  satisfacen la siguiente propiedad de aproximación: para  $v \in \mathcal{H}^{1+\alpha}$  y  $0 < \alpha \leq 1$

$$\inf_{\chi \in \mathcal{M}_k} \|v - \chi\|_{1,\Omega} \leq C_3 h_k^\alpha \|v\|_{1+\alpha,\Omega} \quad (3.22)$$

donde  $C_3 = C_3(\Omega, \mathcal{T}_1)$

Queremos demostrar que para todo  $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$  existe una constante  $\kappa > 0$  tal que

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} \|v\| \quad (3.23)$$

*Demostración.* Observemos que la relación (2.12) da

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq C_4 h_k^{-\alpha} \|v\|_{1-\alpha,\Omega} \quad (3.24)$$

Y tenemos también la equivalencia de normas

$$C_0 \|v\| \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|v\| \quad (3.25)$$

Para estimar  $\|v\|_{1-\alpha,\Omega}$  utilizaremos un argumento de dualidad. Sea  $\mu \in \mathcal{H}^{\alpha-1}$  y sea  $z \in \mathcal{H}$  la solución de

$$a(z, w) = \langle \mu, w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

### 3.2 Convergencia del Método multimalla, ciclo $W$ ( $\gamma = 2$ )

---

Elegimos  $w = v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ , para todo  $\chi \in \mathcal{M}_{k-1}$  tendremos

$$\begin{aligned} \langle \mu, v \rangle &= a(z, v) = a(z - \chi, v) \leq \|z - \chi\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_3 h_{k-1}^\alpha \|z\|_{1+\alpha,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|\mu\|_{1-\alpha,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|\mu\|_{1-\alpha,\Omega}} &\leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|v\|_{1,\Omega} \\ \|v\|_{1-\alpha,\Omega} &= \sup_{\mu \in \mathcal{H}^{\alpha-1}} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|\mu\|_{\alpha-1,\Omega}} \leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|v\|_{1,\Omega} = 2^\alpha C_2 C_3 h_k^\alpha \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

y utilizando (3.24) y (3.25)

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq 2^\alpha C_2 C_3 C_4 \|v\|_{1,\Omega} \leq 2^\alpha C_1 C_2 C_3 C_4 \|v\| \quad (3.26)$$

de donde  $\kappa^{\alpha/2} = 2^\alpha C_1 C_2 C_3 C_4$ . ■

### 3.2. Convergencia del Método multimalla, ciclo $W$ ( $\gamma = 2$ )

Vamos a considerar el Método multimalla como una perturbación del método de dos mallas, concretamente el llamado ciclo  $W$  que corresponde a un número de llamadas  $\gamma = 2$  del algoritmo multimalla de nivel inferior. En el ciclo  $W$  el error  $e$  inicial se transformará en

$$\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))$$

con  $\tilde{\mathcal{C}}$  en lugar de  $\mathcal{C}$ . Aquí  $\tilde{\mathcal{C}}$  representa 2 llamadas al algoritmo multimalla de nivel inferior  $\mathcal{M}_{k-1}$ . Queremos calcular  $\tilde{\xi}$  tal que

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| \leq \tilde{\xi} \|e\|$$

**Teorema 4.** *Supongamos*



$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))||| \leq \xi |||e||| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k$$

donde  $\xi$  está definida en el teorema (1). Entonces existe  $0 < \tilde{\xi} < 1$  independiente de  $k$  tal que

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))||| \leq \tilde{\xi} |||e||| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k \quad (3.27)$$

*Demostración.* Procederemos por inducción. El teorema es cierto para un método de dos mallas,  $k = 2$ . En efecto, en este caso  $\tilde{\mathcal{C}}$  es la solución exacta en la malla inferior  $k = 1$ ,  $\tilde{\xi} = \xi$  y (3.27) es cierto como consecuencia del teorema (1).

Supongamos ahora que el teorema es cierto para  $k - 1$  mallas. Sea  $\bar{e} = \mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)$  el error en  $\mathcal{M}_k$  después del presuavizado y sea  $\delta$  la corrección exacta en  $\mathcal{M}_{k-1}$ , es decir,  $\delta$  es la proyección ortogonal de  $\bar{e}$  sobre  $\mathcal{M}_{k-1}$  en el sentido del producto escalar  $a(.,.)$ . Sea  $\tilde{\delta}$  la corrección obtenida después de aplicar dos veces el algoritmo multimalla (con  $\gamma = 2$ ) en  $\mathcal{M}_{k-1}$ . Con las mismas notaciones que en el teorema (1),  $\bar{e} = \delta + \mathcal{C}(\bar{e})$  y de forma correspondiente  $\bar{e} = \tilde{\delta} + \tilde{\mathcal{C}}(\bar{e})$ . Tendremos por la hipótesis de inducción

$$|||\delta - \tilde{\delta}||| \leq \tilde{\xi}^2 |||\delta|||$$

es decir,

$$|||\bar{e} - \mathcal{C}(\bar{e}) - (\bar{e} - \tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}))||| = |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e})||| \leq \tilde{\xi}^2 |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \bar{e}|||$$

Tenemos  $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e}) \in \mathcal{M}_{k-1}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \bar{e} \in \mathcal{M}_{k-1}$  y también  $\mathcal{C}(\bar{e}) \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ . Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} & |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e}) + \tilde{\xi}^2 \mathcal{C}(\bar{e})|||^2 = \\ & |||\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e})|||^2 + \tilde{\xi}^4 |||\mathcal{C}(\bar{e})|||^2 \leq \\ & \tilde{\xi}^4 (|||\mathcal{C}(\bar{e}) - \bar{e}|||^2 + |||\mathcal{C}(\bar{e})|||^2) = \tilde{\xi}^4 |||\bar{e}|||^2 \end{aligned}$$

### 3.3 Convergencia del Método multimalla, ciclo $V$ ( $\gamma = 1$ )

---

Tomemos ahora en cuenta el presuavizado y el postsuavizado. Teniendo en cuenta la propiedad (3.4) para  $\theta = 1$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))\| &= \|(1 - \tilde{\xi}^2)\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)) + \mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \tilde{\xi}^2\mathcal{C})(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| \\ &\leq (1 - \tilde{\xi}^2)\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e)))\| + \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\tilde{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \tilde{\xi}^2\mathcal{C})(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(e))\| \\ &\leq ((1 - \tilde{\xi}^2)\xi + \tilde{\xi}^2)\|e\| = \tilde{\xi}\|e\| \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta siempre que

$$\tilde{\xi} = (1 - \tilde{\xi}^2)\xi + \tilde{\xi}^2 = \xi - \xi\tilde{\xi}^2 + \tilde{\xi}^2$$

o bien

$$(1 - \xi)\tilde{\xi}^2 - \tilde{\xi} + \xi = 0$$

Despejando  $\tilde{\xi}$ ,

$$\tilde{\xi} = \frac{1 \pm (2\xi - 1)}{2(1 - \xi)}$$

de las dos soluciones únicamente la solución

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

da un valor de  $\tilde{\xi} \geq 0$  para valores de  $\xi > 0$ . Para obtener valores de  $\tilde{\xi} < 1$  necesitamos tener  $\xi < 0.5$ , pero siempre podemos elegir  $\nu$  de manera que  $\xi < 0.5$ . ■

### 3.3. Convergencia del Método multimalla, ciclo $V$ ( $\gamma = 1$ )

Consideramos en esta subsección la convergencia del método multimalla con una sola llamada al algoritmo de multimalla de nivel inferior, es decir, el llamado ciclo  $V$  que corresponde a  $\gamma = 1$ .

El análisis de la convergencia del ciclo  $V$  necesita dos resultados previos acerca del suavizado.

**Lema 7.** Sea  $u \in \mathcal{M}_k$  y  $0 < \alpha \leq 1$ . Entonces

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\| \leq (\|\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)\|^2 / \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\|^2)^{\nu/2} \quad (3.28)$$

$$\|u\|_{1+\alpha} / \|u\| \leq (1 - \|\mathcal{S}^{1/2}(u)\|^2 / \|u\|^2)^{\alpha/2} \quad (3.29)$$

*Demostración.* Para demostrar (3.28) veamos primero que

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\| \leq \|\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)\|^{\nu/(\nu+1)} \|u\|^{1/(\nu+1)} \quad (3.30)$$

En efecto, mediante inducción sobre  $\nu$ , (3.30) es cierta para  $\nu = 1$ , pues

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2 &= a(\mathcal{S}^{(1/2)}(u), \mathcal{S}^{(1/2)}(u)) = a(\mathcal{S}(u), u) \leq \|\mathcal{S}(u)\| \cdot \|u\| \\ \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\| &\leq \|\mathcal{S}(u)\|^{1/2} \cdot \|u\|^{1/2} \end{aligned}$$

Supongamos ahora cierta la desigualdad (3.30) para  $\nu - 1$  y veamos que entonces es cierta para  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\|^2 &= a(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u), \mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)) = a(\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u), \mathcal{S}^{((\nu-1)/2)}(u)) \\ &\leq \|\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)\| \cdot \|\mathcal{S}^{((\nu-1)/2)}(u)\| \end{aligned}$$

Utilizando ahora la hipótesis de inducción en el segundo factor del último producto

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\|^2 \leq \|\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)\| \cdot \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\|^{(\nu-1)/\nu} \cdot \|u\|^{1/\nu}$$

y como  $2 - (\nu - 1)/\nu = (\nu + 1)/\nu$  resulta simplificando y extrayendo la raíz  $(\nu+1)/\nu$  en los dos miembros de la desigualdad obtenemos (3.30). Finalmente (3.28) se obtiene de (3.30) elevando los dos miembros a la potencia  $\nu + 1$  y reordenando,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\|^{\nu+1} &\leq \|\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)\|^\nu \cdot \|u\| \\ \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\| &\leq \frac{\|\mathcal{S}^{((\nu+1)/2)}(u)\|^\nu}{\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(u)\|^\nu} \cdot \|u\| \end{aligned}$$

dividiendo por  $\|u\|$  se obtiene (3.28).

### 3.3 Convergencia del Método multimalla, ciclo V ( $\gamma = 1$ )

---

Para demostrar (3.29) observemos primero

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2 &= \sum_i u_i^2 (1 - \lambda_i) \lambda_i \\ &= \sum_i u_i^2 \lambda_i - \sum_i u_i^2 \lambda_i^2 = \|u\|^2 - \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\|u\|_2^2 = \|u\|^2 - \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2 \quad (3.31)$$

Ahora utilizando la desigualdad de interpolación (5.5) y la observación (3.31) tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{1+\alpha} &\leq \|u\|^{1-\alpha} (\|u\|^2 - \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2)^{\alpha/2} \\ &= \|u\|^{1-\alpha} (\|u\|^2 (1 - \frac{\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2}{\|u\|^2}))^{\alpha/2} \\ &= \|u\| \cdot (1 - \frac{\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2}{\|u\|^2})^{\alpha/2} \end{aligned}$$

Dividiendo por  $\|u\|$  obtenemos (3.29). ■

**Teorema 5.** *Supongamos que existe una constante  $\kappa \geq 1$  independiente del nivel  $k$  tal que para todo  $u \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp \cap \mathcal{M}_k$  tal que*

$$\|u\|_0 \leq \kappa^{1/2} \|u\| \quad (3.32)$$

*Supongamos además que para todo  $v \in \mathcal{M}_k$  se verifica la siguiente hipótesis de inducción*

$$\|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v)\| \leq \hat{\xi} \|\mathcal{C}(v) - v\| \quad (3.33)$$

donde  $\hat{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa + \nu}$ . Entonces

$$\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{\nu/2}(v)))\| \leq \hat{\xi} \|v\| \quad (3.34)$$

*Demostración.* Procederemos por inducción. Observemos primero que al igual que en el ciclo  $W$  la hipótesis (3.33) es la hipótesis de inducción correspondiente a una única llamada al algoritmo multimalla de nivel inferior. El teorema es cierto para un método de dos mallas,  $k = 2$ . En efecto, en este caso  $\hat{\mathcal{C}}$  es la solución exacta en la malla inferior  $k = 1$

Supongamos ahora que el teorema es cierto para  $k - 1$  niveles, es decir, se verifica (3.33). Tenemos por una parte, para todo  $v \in \mathcal{M}_k$ , razonando como en el teorema (4)  $\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) \in \mathcal{M}_{k-1}$  y  $\hat{\mathcal{C}}(v) - v \in \mathcal{M}_{k-1}$  y también  $\mathcal{C}(v) \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ . Tenemos entonces las siguientes propiedades:

- Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} & \|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) + \hat{\xi}\mathcal{C}(v)\|^2 = \\ & \|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v)\|^2 + \hat{\xi}^2\|\mathcal{C}(v)\|^2 \leq \\ & \hat{\xi}^2(\|v - \mathcal{C}(v)\|^2 + \|\mathcal{C}(v)\|^2) = \hat{\xi}^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$\|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) + \hat{\xi}\mathcal{C}(v)\| \leq \hat{\xi}\|v\|$$

- Sea ahora para  $v \in \mathcal{M}_k$

$$y(v) = 1 - \|\mathcal{S}^{(\nu+1)/2}(v)\|^2 / \|\mathcal{S}^{\nu/2}(v)\|^2$$

y denotemos  $\bar{v} = \mathcal{S}^{\nu/2}(v)$ . Entonces tendremos utilizando (3.28) con  $u = v$

$$\begin{aligned} \|\bar{v}\| &= \|\mathcal{S}^{\nu/2}(v)\| = \frac{\|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)\|}{\|v\|} \|v\| \\ &\leq \left( \frac{\|\mathcal{S}^{(\nu+1)/2}(v)\|^2}{\|\mathcal{S}^{\nu/2}(v)\|^2} \right)^{\nu/2} \cdot \|v\| = (1 - y(v))^{\nu/2} \|v\| \end{aligned}$$

- Aplicando (3.1) y la ortogonalidad entre  $\mathcal{C}(v)$  y  $v - \mathcal{C}(v)$  para todo  $v \in \mathcal{M}_k$

$$\|\mathcal{C}(v)\|^2 = a(\mathcal{C}(v), \mathcal{C}(v)) = a(\mathcal{C}(v), v) \leq \|\mathcal{C}(v)\|_0 \|v\|_2$$

teniendo en cuenta la hipótesis (3.32) y simplificando

$$\|\mathcal{C}(v)\| \leq \kappa^{1/2} \|v\|_2$$

### 3.3 Convergencia del Método multimalla, ciclo $V$ ( $\gamma = 1$ )

---

- Utilizando (3.29) con  $\alpha = 1$  y  $u = \bar{v}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}(\bar{v})\| &\leq \kappa^{1/2} \|\bar{v}\|_2 \\ &\leq \kappa^{1/2} \left(1 - \frac{\|\mathcal{S}^{1/2}(\bar{v})\|}{\|\bar{v}\|}\right)^{1/2} \|\bar{v}\| \\ &\leq \kappa^{1/2} y^{1/2}(v) \|\bar{v}\| \end{aligned}$$

Ahora, denotemos  $w \in \mathcal{M}_k$  y  $\bar{w} = \mathcal{S}^{(\nu/2)}(w)$ . Como  $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}$ , se tiene

$$a(\mathcal{C}(\bar{v}), \bar{w}) = a(\mathcal{C}^2(\bar{v}), \bar{w}) = a(\mathcal{C}(\bar{v}), \mathcal{C}(\bar{w}))$$

de donde

$$\begin{aligned} a(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v))), w) &= a(\hat{\mathcal{C}}(\bar{v}), \bar{w}) \\ &= (1 - \hat{\xi})a(\mathcal{C}(\bar{v}), \mathcal{C}(\bar{w})) + a((\hat{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \hat{\xi}\mathcal{C})(\bar{v}), \bar{w}) \\ &\leq ((1 - \hat{\xi})\kappa^{1/2}y^{1/2}(v)\kappa^{1/2}y^{1/2}(w) + \hat{\xi})\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \\ &\leq ((1 - \hat{\xi})\kappa y^{1/2}(v)y^{1/2}(w) + \hat{\xi})((1 - y(v))(1 - y(w)))^{\nu/2}\|v\|\|w\| \end{aligned}$$

y finalmente observando que  $0 \leq y(v) \leq 1$  para todo  $v \in \mathcal{M}_k$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(\nu/2)}(v)))\| &\leq \sup_{x \in [0,1]} ((1 - \hat{\xi})\kappa x + \hat{\xi})(1 - x)^\nu \|v\| \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \sup_{x \in [0,1]} (\nu x + 1)(1 - x)^\nu \|v\| \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \|v\| \end{aligned}$$

donde hemos sustituido el valor de  $\hat{\xi}$  por  $\hat{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa + \nu}$  ■

Observación: En el anterior teorema se ha utilizado la condición de regularidad determinada por  $\alpha = 1$ .

Observación: La demostración anterior también es válida para el ciclo  $W$ . En la demostración se sustituye  $\hat{\xi}$  por  $\hat{\xi}^2$  y se elige  $\hat{\xi}^2 = \frac{\kappa}{\kappa + \nu}$ . De modo que en el caso  $\alpha = 1$  para el ciclo  $W$  tendremos

---

**Corolario 1.** *Con las hipótesis de los teoremas (4) y (5) para  $\alpha = 1$  tendremos para el ciclo  $W$*

$$|||\mathcal{S}^{(\nu/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{\nu/2}(v)))||| \leq \bar{\xi} |||v||| \quad (3.35)$$

donde  $\bar{\xi} = \min\{\tilde{\xi}, \hat{\xi}\}$  donde  $\tilde{\xi}$  y  $\hat{\xi}$  están definidos como en los teoremas (4) y (5) respectivamente.

## 4. Complejidad Algorítmica del Método Multimalla

En esta sección estudiaremos la complejidad algorítmica del método multimalla, es decir, el número de operaciones necesario para resolver un sistema de ecuaciones con el método multimalla. Estimemos en primer lugar el número de operaciones necesario para realizar una iteración del algoritmo. Sea  $n_k$  el número de incógnitas (ecuaciones) en el nivel  $k$ . Supongamos  $C_H = \sup_{0 \leq k \leq K} \frac{n_{k-1}}{n_k}$ . Llamemos  $\theta = C_H \gamma < 1$ . Sea  $\nu$  el número de suavizados (presuavizados y postsuavizados) en cada iteración. Para un ciclo  $\gamma$  y para todo nivel  $k$  el número de operaciones en cada paso del algoritmo es

- Suavizado,  $\mathcal{S}$ :  $C_S \cdot n_k$
- Restricción,  $\mathcal{R}$ :  $C_{\mathcal{R}} \cdot n_k$
- Prolongación,  $\mathcal{P}$ :  $C_{\mathcal{P}} \cdot n_k$
- Resolución exacta en el nivel  $k = 0$ :  $C_0$

El número de operaciones  $Nop$  en una iteración del algoritmo multimalla del ciclo  $\gamma$  será

$$\begin{aligned} Nop &= (\nu C_S + C_{\mathcal{R}} + C_{\mathcal{P}})(n_K + \gamma n_{K-1} + \dots + \gamma^{K-1} n_1) + \gamma^{K-1} C_0 \\ &= (\nu C_S + C_{\mathcal{R}} + C_{\mathcal{P}})(1 + \theta + \dots + \theta^{K-1}) n_K + \frac{\theta^{K-1}}{C_H^{K-1}} C_0 \\ &\leq \left( \frac{(\nu C_S + C_{\mathcal{R}} + C_{\mathcal{P}})}{1 - \theta} + \frac{C_0 \theta^{K-1}}{n_1} \right) n_K \leq C n_K \end{aligned}$$

---

donde se ha tenido en cuenta

$$\begin{aligned}
n_{K-1} &\leq C_H n_K \\
n_{K-2} &\leq C_H n_{K-1} \leq C_H^2 n_K \\
&\dots \\
n_1 &\leq C_H^{K-1} n_K
\end{aligned}$$

Observaciones:

Veamos en que condiciones se cumple la restricción  $\theta < 1$  de modo que el número de operaciones de una iteración del algoritmo multimalla de ciclo  $\gamma$  sea proporcional al número de ecuaciones. Llamando  $h_k$  al diámetro máximo de los elementos de mallado correspondiente al espacio  $\mathcal{M}_k$ , en un refinamiento uniforme tendremos  $\frac{h_{k-1}}{h_k} \approx 2$  y en consecuencia  $\frac{n_{k-1}}{n_k} = \frac{h_{k-1}^{-d}}{h_k^{-d}} \approx 2^{-d} \approx C_H$ .

De modo que

$$\theta = C_H \gamma \approx 2^{-d} \gamma < 1$$

lo que implica la condición  $\gamma < 2^d$ . Por tanto en problemas de dimensión  $d = 1$ , se necesita  $\gamma = 1$ . En problemas de dimensión  $d = 2$  la condición es  $\theta = \gamma C_H = \frac{\gamma}{4} < 1$  que se satisface para  $\gamma \leq 3$ . En problemas de dimensión  $d = 3$  la condición es  $\theta = \gamma C_H = \frac{\gamma}{8} < 1$  que se satisface para  $\gamma \leq 7$ . En un refinamiento adaptativo en problemas en dimensión  $d = 2$ , tendremos  $\frac{n_{k-1}}{n_k} \approx 1/2 = C_H$ , necesitamos entonces  $\gamma < 2$ , es decir  $\gamma = 1$ . Para el ciclo  $V$  tenemos siempre  $\theta = C_H < 1$ , la condición es  $\frac{n_{k-1}}{n_k} < 1$  que se satisface siempre.

Evaluemos ahora el número de operaciones necesarias para obtener una solución aproximada del sistema de ecuaciones con un error inferior a una tolerancia prefijada. Sea  $u_K \in \mathcal{M}_K$  la solución exacta en el nivel  $K$ . Sea  $u_K^{(0)} \in \mathcal{M}_K$  el valor aproximado inicial y  $u_K^{(i)} \in \mathcal{M}_k$  el valor obtenido después de  $i$  iteraciones del algoritmo multimalla. Queremos elegir el número de iteraciones  $i$  de manera que

$$\|u_K^{(i)} - u_K\| \leq \varsigma^i \|u_K^{(0)} - u_K\|, \quad \varsigma^i < \epsilon \quad (4.1)$$



---

donde  $\varsigma = \tilde{\xi}$  para  $\gamma = 2$  o  $\varsigma = \hat{\xi}$  para  $\gamma = 1$  definido en los teoremas (4) y (5). La tolerancia  $\epsilon$  está fijada de antemano. En la práctica si estamos resolviendo un sistema de ecuaciones que proviene de la aproximación de un problema de ecuaciones en derivadas parciales mediante el Método de Elementos Finitos ( o Diferencias Finitas o Volúmenes Finitos) queremos obtener una solución aproximada dentro de los márgenes de error del propio método, es decir, si suponemos que el método es de orden  $s$ , el requerimiento será  $\varsigma^i = Ch_K^s$ . De modo que si  $n_K = h_K^{-d}$ ,  $\varsigma^i = Cn_K^{-s/d}$  de donde tomando logaritmos

$$i \log(\varsigma) = \log(C) - \frac{s}{d} \log(n_K)$$

es decir el número de iteraciones a realizar  $i$  es del orden  $i = \mathcal{O}(\log n_K)$  y el número total de operaciones para resolver el problema dentro de la precisión prefijada será

$$\mathcal{O}(n_K \log(n_K))$$

## Método Multimalla Completo: Iteración Anidada

En el algoritmo multimalla considerado anteriormente el punto de partida es el sistema correspondiente a la malla más fina es decir la correspondiente al espacio  $\mathcal{M}_K$ . Consideremos ahora una modificación del algoritmo en la que el punto de partida es el sistema con menor número de ecuaciones, es decir el correspondiente a la malla más gruesa correspondiente al espacio  $\mathcal{M}_0$ . El algoritmo siguiente se conoce como Método Multimalla Completo (en inglés “Full Multigrid Method”) y se basa en la iteración anidada siguiente:

1.  $\tilde{u}_0 = u_0$  solución exacta en  $\mathcal{M}_0$

2. Para  $k = 1, \dots, K$

a)  $u_{k,0} = \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1})$

b)  $MGM(k, \nu_1, \nu_2, \gamma, i, u_{k,0}, u_{k,i})$

---


$$c) \tilde{u}_k = u_{k,i}$$

donde  $\Pi_{k-1,k}$  es el operador de prolongación

$$\begin{aligned} \Pi_{k-1,k} : \mathcal{M}_{k-1} &\rightarrow \mathcal{M}_k \\ v_{k-1} &\rightarrow v_k = v_{k-1} \end{aligned}$$

y además el número de iteraciones  $i$  es el mismo para todos los niveles  $k$ .

Consideremos ahora la resolución mediante el Método de Elementos Finitos del problema (2.1) con el algoritmo multimalla completo. Podemos enunciar la siguiente estimación del error,

**Teorema 6.** (*Estimación del error para la iteración anidada*) Sean  $C_1 \geq 0$ ,  $s > 0$  y  $h_k$  verificando

$$\|u_k - u\| \leq C_1 h_k^s \quad \forall k \quad (4.2)$$

y

$$\|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| \leq C_1 h_k^s \quad \forall k \quad (4.3)$$

donde  $\|v\|$  es la norma de  $v \in \mathcal{H}$ . Sea  $\varsigma = \tilde{\xi}$  para  $\gamma = 2$  o  $\varsigma = \hat{\xi}$  para  $\gamma = 1$ , definido en los teoremas (4) y (5), entonces

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq C_3 C_1 h_k^s \quad (4.4)$$

con

$$C_3(\varsigma, i) = \frac{\varsigma^i}{1 - C_2 \varsigma^i}$$

donde

$$C_2 = \sup_k \left( \frac{h_{k-1}}{h_k} \right)^s$$

Observación: Observemos que la única condición requerida para el valor de  $i$  es  $C_2 \varsigma^i < 1$ .

*Demostración.* Procederemos por recurrencia: Para  $k = 0$  el teorema es cierto. Supongamos cierto el teorema para un nivel  $k - 1$ , es decir,

$$\|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\| \leq C_3 C_1 h_{k-1}^s$$

---

tendremos para el error en el nivel  $k$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_k - u_k\| &= \|u_k^{(i)} - u_k\| \leq \varsigma^i \|u_k^{(0)} - u_k\| = \varsigma^i \|\Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1}) - u_k\| \\
&= \varsigma^i \|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k + \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1}) - \Pi_{k-1,k}(u_{k-1})\| \\
&\leq \varsigma^i (\|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| + \|\Pi_{k-1,k}\| \cdot \|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\|) \\
&\leq \varsigma^i (C_1 h_k^s + C_3 C_1 h_{k-1}^s) \leq \varsigma^i C_1 h_k^s (1 + C_3 C_2) \\
&= C_3 C_1 h_k^s
\end{aligned}$$

donde el último paso es cierto si elegimos  $C_3(\varsigma, i) = \frac{\varsigma^i}{1 - C_2 \varsigma^i}$  ■

Comentario: Hemos utilizado la propiedad  $\|\Pi_{k-1,k}\| \leq 1$ . En efecto si  $\Pi_{k-1,k}$  es el operador de prolongación definido por la inyección de  $\mathcal{M}_{k-1}$  en  $\mathcal{M}_k$ , tenemos  $\|\Pi_{k-1,k}\| = 1$ .

Comentario: La estimación habitual en una aproximación mediante Elementos Finitos del problema (2.1) es

$$\|u_k - u\| \leq C h_k^s \quad \forall k$$

donde podemos suponer que la constante  $C$  es independiente del nivel  $k$ . Utilizando  $C_2 \geq \left(\frac{h_{k-1}}{h_k}\right)^s$

$$\begin{aligned}
\|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| &= \|u_{k-1} - u_k\| \leq \|u_{k-1} - u\| + \|u_k - u\| \\
&\leq C h_{k-1}^s + C h_k^s \leq C h_k^s (1 + C_2)
\end{aligned}$$

Elegiendo ahora  $C_1 = (1 + C_2)C$  se obtienen las dos propiedades (4.2) y (4.3) para la misma constante  $C_1$  del enunciado.

Comentario: El teorema asegura que la cota del error en todos los niveles  $k = 0, 1, \dots, K$  difiere respecto al error de discretización  $C_1 h_k^s$  únicamente por factor  $C_3(\varsigma, i)$ .

## Coste de la iteración anidada

Vamos a evaluar el número de operaciones en el nivel  $k$  de la iteración anidada. El coste de una iteración del método multimalla en el nivel  $k$ , des-

---

preciado el coste del término  $\frac{\theta^{k-1}}{n_1} \cdot n_k$  correspondiente a la resolución exacta en el nivel  $k = 0$ , es

$$W_k = \frac{(\nu C_S + C_{\mathcal{R}} + C_{\mathcal{P}})n_k}{1 - \theta}$$

donde  $\theta = C_H \gamma < 1$ . Puesto que tenemos  $n_{k-1} \leq C_H n_k$  tendremos en cada nivel

- $W_{K-1} \leq C_H W_K$
- $W_{K-2} \leq C_H W_{K-1} \leq C_H^2 W_K$
- ...
- $W_k \leq C_H^{K-k} W_K$

El coste de la iteración anidada será

$$\begin{aligned} & iW_1 + iW_2 + \dots + iW_k + \dots + iW_K \\ & \leq i \sum_{k=1}^K C_H^{K-k} W_K < \frac{i}{1 - C_H} W_K \end{aligned}$$

También hemos despreciado el coste de la prolongación  $u_k^{(0)} = \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1})$ .

En consecuencia el número de operaciones para realizar la iteración anidada con  $i$  iteraciones en cada nivel es a lo sumo  $\frac{1}{1-C_H}$  veces más que  $i$  iteraciones simples en el nivel  $K$ .

**Corolario 2.** *En el contexto anterior, el número de operaciones para resolver el sistema de ecuaciones utilizando la iteración anidada es proporcional al número de ecuaciones.*

*Demostración.* Basta elegir el número de iteraciones  $i$  a realizar en cada nivel verificando  $C_2 \zeta^i < 1$ . ■

---

## 5. Anexo: Desigualdades de Hölder

**Teorema 7.** (*Desigualdad de Young*)

Para  $1 \leq p, q$  con  $1/p + 1/q = 1$

$$a, b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall a \geq 0 \quad \forall b \geq 0 \quad (5.1)$$

*Demostración.* La función logaritmo es cóncava sobre  $]0, \infty[$ ,

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log(a) + \frac{1}{q}\log(b) = \log(ab)$$

de donde como la función logaritmo es también creciente en  $]0, \infty[$  se obtiene (5.1) ■

**Teorema 8.** (*Desigualdad de Hölder*)

Sean  $u = (u_1, \dots, u_d)^t, v = (v_1, \dots, v_d)^t \in \mathbb{R}^d$  con producto escalar  $(u, v) = \sum_i u_i v_i$  y las normas  $\|v\|_p = (\sum_i |u_i|^p)^{1/p}$  para todo  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p$ . Tenemos para  $p, q \geq 1$  y  $1/p + 1/q = 1$

$$|(u, v)| \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q \quad (5.2)$$

*Demostración.* Aplicando la desigualdad de Young (5.1) a los productos  $|u_i| \cdot |v_i|$ ,

$$|(u, v)| \leq \sum_i |u_i| \cdot |v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_i |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |v_i|^q = \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q \quad (5.3)$$

reemplazando  $u$  por  $\lambda u$  con  $\lambda > 0$

$$\lambda |(u, v)| \leq \frac{\lambda^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q$$

---

dividiendo por  $\lambda$

$$|(u, v)| \leq \frac{\lambda^{(p-1)}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda q} \|v\|_q^q$$

minimizando el término de la derecha en la anterior desigualdad con respecto a  $\lambda$ , el valor mínimo se alcanza para  $\lambda = \lambda_{min} = \|u\|_p^{-1} \cdot \|v\|_q^{q/p}$  y sustituyendo este valor se obtiene (5.2). ■

**Corolario 3.** (*Desigualdad de interpolación 1*)

Para  $0 \leq \beta \leq \alpha$  se tiene la siguiente desigualdad de interpolación

$$\|v\|_{1-\beta} \leq \|v\|_{1-\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}} \|v\|^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \quad (5.4)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \|v\|_{1-\beta}^2 &= \sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1-\beta)} \\ &= \sum_i v_i^{2\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)} v_i^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned}$$

llamemos  $a_i = v_i^{2\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}$  y  $b_i = v_i^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{1-\frac{\beta}{\alpha}}$  y apliquemos la siguiente desigualdad de Hölder (5.2) para  $p$  y  $q$  con  $1/p + 1/q = 1$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left( \sum_i a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_i b_i^q \right)^{1/q}$$

resultando

$$\|v\|_{1-\beta}^2 = \left( \sum_i v_i^{2p\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{p\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)} \right)^{1/p} \left( \sum_i v_i^{2q(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{q(1-\frac{\beta}{\alpha})} \right)^{1/q}$$

eligiendo  $p$  y  $q$  tales que  $1/p = \beta/\alpha$  y  $1/q = 1 - \beta/\alpha$  resulta

$$\|v\|_{1-\beta}^2 \leq \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i^{1-\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i \right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \|v\|_{1-\alpha}^{2\frac{\beta}{\alpha}} \|v\|^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})}$$

extrayendo la raíz cuadrada en los dos miembros de la desigualdad se obtiene (5.4). ■

**Corolario 4.** (*Desigualdad de interpolación 2*)

Para  $0 < \alpha \leq 1$  se tiene la siguiente desigualdad de interpolación

$$|||v|||_{1+\alpha} \leq |||v|||^{1-\alpha} \cdot |||v|||_2^\alpha \quad (5.5)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} |||v|||_{1+\alpha}^2 &= \sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1+\alpha)} \\ &= \sum_i v_i^{2(1-\alpha)} \lambda_i^{(1-\alpha)} v_i^{2\alpha} \lambda_i^{2\alpha} \end{aligned}$$

llamemos  $a_i = v_i^{2(1-\alpha)} \lambda_i^{(1-\alpha)}$  y  $b_i = v_i^{2\alpha} \lambda_i^{2\alpha}$  y apliquemos la siguiente desigualdad de Hölder (5.2) para  $p$  y  $q$  con  $1/p + 1/q = 1$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left( \sum_i a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_i b_i^q \right)^{1/q}$$

resultando

$$|||v|||_{1+\alpha}^2 = \left( \sum_i v_i^{2p(1-\alpha)} \lambda_i^{p(1-\alpha)} \right)^{1/p} \left( \sum_i v_i^{2q\alpha} \lambda_i^{2q\alpha} \right)^{1/q}$$

eligiendo  $p$  y  $q$  tales que  $1/p = 1 - \alpha$  y  $1/q = \alpha$  resulta

$$|||v|||_{1+\alpha}^2 \leq \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i \right)^{1-\alpha} \left( \sum_i v_i^2 \lambda_i^2 \right)^\alpha = |||v|||^{2(1-\alpha)} |||v|||_2^{2\alpha}$$

extrayendo la raíz cuadrada en los dos miembros de la desigualdad se obtiene (5.5) ■

## Referencias

- [1] R.E.Bank, C.C. Douglas, *Sharp estimates for multigrid rates of convergence with general smoothing and acceleration*, Siam J. Numer. Anal., No. 4, 617-633 (1985).

## REFERENCIAS

---

- [2] S.F. McCormick, *Multigrid methods for variational problems: General theory for the V-cycle*, Siam J. Numer. Anal., No. 4, 634-643 (1985).
- [3] C.C.Douglas, *Multigrid algoritms with applications to elliptic boundary value problems*, Siam J. Numer. Anal., No. 2, 236-254 (1984).
- [4] S.F. McCormick, *Multigrid methods for variational problems: Further results*, Siam J. Numer. Anal., No. 2, 255-271 (1984).
- [5] D.Braess, W.Hackbush, *A new convergence proof for the multigrid method including the V-cycle*, Siam J. Numer. Anal., No.5, 967-975 (1983).
- [6] S.F.McCormick, J.W.Ruge, *Multigrid methods for variational problems*, SIAM J. Numer. Anal., N0.5, 924-929 (1982).