

Luis Ferragut Canals

Cálculo vectorial y tensorial

Aplicaciones en mecánica y física



Monografías de Análisis Numérico y Matemática Aplicada
Universidad de Salamanca
<https://hdl.handle.net/10366/169391>
<https://diarium.usal.es/ferragut/actividad-docente/>

*Dedico este libro a Rafael Montenegro, gran
amigo que nos dejó prematuramente el
pasado año 2025.*

Preliminares

En el tiempo en el que los proyectos dan paso a los recuerdos me he animado a recopilar en un libro los apuntes de las enseñanzas que formaban parte de la asignatura Ampliación de Matemáticas que impartí en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas de Madrid en los años 80.

Por aquel entonces la forma de abordar el cálculo diferencial y el cálculo vectorial en las escuelas de ingeniería se orientaba a realizar muchos ejercicios olvidándose muchas veces de definir de forma precisa los conceptos y obviando ciertas demostraciones.

El objetivo de estos apuntes era proporcionar a los alumnos las definiciones precisas de los conceptos y las propiedades de éstos para poder abordar el cálculo vectorial y tensorial. Una vez realizado este trabajo la realización de cálculos es un trabajo mecánico. Con ello se pretende que se comprendan bien expresiones, por ejemplo de la forma $\int_c (F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz)$ y se realicen los cálculos correctamente con conocimiento de su significado. Consideremos otro ejemplo: En la mayoría de los libros de física e ingeniería es habitual llamar diferencial de área a una pequeña parte de una superficie y se razona después con este concepto ambiguo. Lo que aportan las matemáticas es una definición precisa de este concepto definiendo el diferencial de área como una forma de orden 2 de modo que al aplicarla a dos vectores nos da el área del paralelogramo formado por éstos. A su vez las formas de orden 2 se construyen a partir de formas de orden 1 (elementos de un espacio dual) mediante el producto exterior, operación bien definida. El manejo de conceptos y operaciones precisas y bien definidas permite razonar y hacer cálculos sin peligro de cometer errores.

El curso presupone que se tienen los conocimientos básicos de un primer curso de cálculo infinitesimal de una variable real y de álgebra lineal así como algunos conceptos de topología.

El cálculo vectorial es álgebra en el espacio tangente en cada punto de un dominio para luego integrar los resultados en cada punto (en definitiva sumar) cuando recorremos todos los puntos del dominio: La primera parte de este libro se dedica al cálculo diferencial (capítulo 1) y a la integración (capítulo 2) en varias dimensiones donde se generalizan los resultados del cálculo en una variable real. El capítulo 3

está dedicado al álgebra tensorial donde se estudia el concepto de tensor y sus aplicaciones geométricas. En el capítulo 4 se construye el espacio tangente introduciendo la noción de vector tangente como una derivación (como se hace en geometría diferencial), vemos ejemplos de vectores tangentes y aprendemos a realizar cambios de coordenadas. En una segunda sección se introducen las formas diferenciales a partir del espacio dual del espacio tangente. En el capítulo 5 construimos los tensores diferenciales y a partir del espacio tangente y el espacio de tensores diferenciales se introduce la noción de campo vectorial y campos de formas. En particular se estudia la operación de diferenciación exterior de formas. En el capítulo 6 se introduce la noción de cadena y la integración de formas en cadenas. El capítulo 7 está dedicado al teorema general de Stokes en cadenas y sus aplicaciones y se particulariza a los tres teoremas clásicos de Stokes, teorema de Green, teorema de la divergencia y el teorema de Gauss-Ostrogradski que son aquí una consecuencia del teorema general. Finalmente en el capítulo 8 se deducen algunas ecuaciones de la mecánica y más en particular de la mecánica de medios continuos. Más precisamente, obtendremos la variación de los distintos objetos geométricos, es decir funciones, campos, formas y en general tensores por acción de un campo vectorial representando la velocidad de un fluido asociado a un grupo uniparamétrico de transformaciones. La herramienta básica es el concepto de derivada de Lie de la geometría diferencial que introducimos limitándonos aquí a regiones de \mathbb{R}^d .

He completado cada capítulo de estos apuntes con ejercicios cuya solución se da al final del libro con la esperanza de que los estudiantes intenten resolverlos por su cuenta antes de mirar la solución.

Estos apuntes deben mucho a los libros “ Cours de Calcul Différentiel ” de Henri Cartan (Nancy, Francia, 8 de julio de 1904 - París, Francia, 13 de agosto de 2008) y “ Calculus on Manifolds ” de Michael David Spivak (Queens, Nueva York, 25 de mayo de 1940 - Houston, Texas, 1 de octubre de 2020) que me ayudaron a comprender muchos de los conceptos y utilizar con rigor las herramientas del Cálculo Diferencial y Vectorial.

En Cabrerizos (Salamanca) y Palma de Mallorca. Mayo de 2023 - Enero de 2026.

Luis Ferragut Canals

Índice general

1. Elementos de Cálculo Diferencial en Espacios Normados	1
1.1. Espacios Normados	1
1.2. Espacios Euclídeos o Prehilbertianos	7
1.3. Funciones diferenciables y diferencial de una función	9
1.4. Fórmulas de Taylor	17
1.5. Cálculo diferencial en \mathbb{R}^d	31
1.6. Extremos relativos y diferenciabilidad	35
1.7. Teorema de la función inversa	38
2. Integración en \mathbb{R}^d	45
2.1. Definiciones básicas	45
2.1.1. Construcción de la integral de una función acotada	46
2.1.2. Funciones integrables	58
2.2. Teorema de Fubini	66
2.3. Cambio de variables	71
3. Algebra Tensorial	87
3.1. Aplicaciones multilineales	87
3.1.1. Bases en el espacio de tensores	88
3.1.2. Aplicaciones entre espacios de tensores	90
3.1.3. Contracción de tensores	91
3.1.4. Tensores antisimétricos	95
3.1.5. Bases en el espacio de tensores antisimétricos	99
3.1.6. Determinantes	106
3.1.7. Tensores y conceptos geométricos	113
4. Espacio Tangente en \mathbb{R}^d	125
4.1. Vectores tangentes	125
4.1.1. Ejemplos de vectores tangentes	129
4.1.2. Cambios de base	132
4.1.3. Aplicaciones entre espacios tangentes	138

4.2.	Formas diferenciales en \mathbb{R}^d	141
4.2.1.	Noción de forma diferencial	141
4.2.2.	Bases en el espacio de formas diferenciales	142
4.2.3.	Cambios de base en el espacio de formas diferenciales	143
5.	Campos y Formas	151
5.1.	Tensores sobre el espacio tangente y el espacio de formas diferenciales	151
5.2.	Campos vectoriales y tensoriales	156
5.2.1.	Aplicaciones entre campos tangentes y espacios de formas ..	160
5.2.2.	Relación entre campos y formas	165
5.3.	Diferencial exterior	169
5.4.	Formas cerradas y exactas	184
6.	Integración en cadenas	193
6.1.	Cubos singulares y cadenas	193
6.2.	Integración en cadenas	203
6.3.	Ejemplos prácticos de integración en cadenas	209
7.	El teorema de Stokes	221
7.1.	El teorema de Stokes en cadenas	221
7.2.	Aplicaciones del teorema de Stokes	226
8.	Algunas aplicaciones a la mecánica de medios continuos	239
8.1.	Grupos uniparamétrico de transformaciones	239
8.2.	Transformación de tensores y campos tensoriales	242
8.3.	La derivada de Lie	246
8.4.	Cálculo de la derivada de Lie	249
8.4.1.	Derivada de Lie de funciones	249
8.4.2.	Derivada de Lie de un campo vectorial	249
8.4.3.	Derivada de Lie de una 1-forma	251
8.4.4.	Aplicación: Derivada de Lie del elemento de volumen	252
8.4.5.	Derivada de Lie en un abierto espacio temporal	253
8.4.6.	Aplicación: Ecuación de conservación de la masa	254
8.4.7.	Aplicación: Ecuación de conservación de la energía	256
8.4.8.	Derivada de Lie de un campo tensorial	258
	Soluciones de los ejercicios	263
	Referencias	357

Capítulo 1

Elementos de Cálculo Diferencial en Espacios Normados

En este capítulo recogemos las nociones básicas de cálculo diferencial necesarias para entender el resto del libro. Para aprender de una vez para siempre todo lo que se necesita saber sobre cálculo diferencial recomendamos al lector el curso de cálculo diferencial de Henri Cartan [3]. En cuanto a lo concerniente a espacios vectoriales normados se podrán consultar el libro de S.K. Beberian o el libro de H. Brezis [2] aunque lo recogido en este capítulo es suficiente para entender el resto del libro pues fundamentalmente trabajaremos con espacios vectoriales de dimensión finita. En este capítulo algunas secciones se han desarrollado en espacios vectoriales no necesariamente de dimensión finita puesto que no plantea mayores dificultades a la hora de introducir ciertos conceptos y realizar algunas demostraciones. En todo caso en el resto del libro se trabajará siempre en el espacio euclídeo de dimensión finita \mathbb{R}^d .

1.1. Espacios Normados

En esta sección y las siguientes consideraremos espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales.

Definición 1.1. *Un Espacio Normado es un espacio vectorial E en el que se ha definido una aplicación*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathcal{R} \\ v &\longrightarrow \|v\| \end{aligned}$$

verificando las propiedades,

- *N1: $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in E$ y $\|v\| = 0$ solo si $v = 0$.*
- *N2: $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in E$.*
- *N3: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in E$ (Desigualdad Triangular).*

La aplicación $\|\cdot\|$ se llama norma y $\|v\|$ se lee norma del vector v . Todo espacio normado es evidentemente un espacio métrico con la distancia $d(u, v) = \|v - u\|$. Todos los conceptos métricos y topológicos tendrán aquí su significado. Hablaremos pues de conjuntos cerrados y conjuntos abiertos, sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy, conjuntos compactos, etc.

Ejemplos: Sobre el espacio vectorial $E = \mathbb{R}^d$ podemos definir las siguientes normas

1. Norma l_2 : $\|v\|_2 = (\sum v_i^2)^{1/2}$
2. Norma l_1 : $\|v\|_1 = \sum |v_i|$
3. Norma l_∞ : $\|v\|_\infty = \text{máx } |v_i|$
4. Norma l_p , $p \geq 1$: $\|v\|_p = (\sum |v_i|^p)^{1/p}$

En el espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, $E = C[a, b]$

1. Norma L^2 : $\|v\|_{0,2,[a,b]} = (\int_a^b |v(x)|^2 dx)^{1/2}$
2. Norma L^1 : $\|v\|_{0,1,[a,b]} = \int_a^b |v(x)| dx$
3. Norma L^∞ : $\|v\|_{0,\infty,[a,b]} = \text{máx}_{x \in [a,b]} |v(x)|$
4. Norma L^p : $\|v\|_{0,p,[a,b]} = (\int_a^b |v(x)|^p dx)^{1/p} \quad p \geq 1$

Definición 1.2. *Un espacio normado completo se llama espacio de Banach.*

Los espacios normados de dimensión finita son todos completos por lo que son espacios de Banach.

Ejercicios:

1. Verificar que la norma l_1 y la norma l_∞ son efectivamente una norma en \mathbb{R}^d (ejercicio 1.1)
2. Verificar que la norma L^1 y la norma L^∞ son efectivamente una norma en $C[a, b]$ (ejercicio 1.2)

Dejamos para más adelante la verificación de que la norma l_2 y la norma L^2 son efectivamente normas. Recordemos algunas definiciones y propiedades fundamentales.

Nociones de topología en espacios normados

1. Sea E un espacio normado. Una bola (abierta) de centro $a \in E$ y radio $r \in \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\mathcal{B}_r(a) = \{v \in E; \quad \|v - a\| < r\}$$

2. Entorno: Un conjunto es un entorno de un punto $a \in E$ si contiene a una bola de centro a .
3. Abierto: Un abierto es un conjunto que es entorno de todos sus puntos.
4. Cerrado: Un conjunto es cerrado si es complementario de un abierto.

5. Conjunto acotado: Un conjunto en E es acotado si existe una bola que lo contiene.
6. Conjunto compacto: Un conjunto es compacto si de todo recubrimiento abierto se puede obtener un subrecubrimiento finito.

En espacios de dimensión finita (por ejemplo \mathbb{R}^d) los conjuntos compactos coinciden con los conjuntos que son cerrados y acotados.

Definición 1.3. *Noción de límite de una función y continuidad en un punto. Sea $A \subset E$ un abierto de un espacio normado E . Sea un punto $a \in A$. Sea F otro espacio normado y $f : A \rightarrow F$ una función.*

$$\lim_{v \rightarrow a} f(v) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ tal que si } \|v - a\| < \delta \Rightarrow \|f(v) - b\| < \varepsilon$$

Diremos que f es continua en un punto $a \in A$ si verifica

$$\lim_{v \rightarrow a} f(v) = f(a)$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. Sea $f : E \rightarrow F$, f es continua (en todos los puntos) si para todo conjunto abierto $U \subset F$, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto de E .
2. Sea $A \subset E$ un abierto y $f : A \rightarrow F$. f es continua si para todo abierto $U \subset F$ existe algún conjunto abierto $V \subset A$ tal que $f^{-1}(U) = V \cap A$.
3. Sea $K \subset E$ un conjunto compacto y $f : K \rightarrow F$ una función continua entonces $f(K)$ es un conjunto compacto de F .

Definición 1.4. *Norma equivalentes: Sea E un espacio normado en el que hemos definido dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$. Diremos que las dos normas son equivalentes si existen dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que*

$$C_1 \|v\| \leq |||v||| \leq C_2 \|v\| \quad \forall v \in E \quad (1.1)$$

Dos normas equivalentes generan la misma topología. En espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Definición 1.5. *Sean E y F dos espacios vectoriales. Una aplicación $T : E \rightarrow F$ se dice que es lineal si*

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in E \\ T(\lambda v) &= \lambda T(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in E \end{aligned}$$

Para las aplicaciones lineales continuas tenemos la siguiente caracterización:

Teorema 1.1. *: Caracterización de las aplicaciones lineales continuas*

Sean E y F dos espacios normados y $T : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces si T es continua en el origen $u = 0 \in E$ es continua en todo punto si y solo si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|Tv\| \leq M\|v\| \quad \forall v \in E \quad (1.2)$$

Demostración:

Demostremos pues que si T es continua en O es continua en todo punto y se verifica (1.2).

Si T es continua en $O \in E$, para toda sucesión $(u_n)_n \subset E$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = O$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = T(O) = O$

Sea ahora un elemento cualquiera $v \in E$ y $(v_n)_n \subset E$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \in E$. Evidentemente $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - v) = O$. Como T es continua en $O \in E$, resulta $\lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n - v) = O$ y por ser T una aplicación lineal $\lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n) = T(v)$.

Veamos ahora la segunda parte del teorema. Demostremos primero que si $\|u\| \leq 1$ existe $M \geq 0$ tal que $\|T(u)\| \leq M$. En efecto, supongamos por el contrario que el conjunto $\{\|T(u)\|; \|u\| \leq 1\}$ no es acotado. Para cada n podemos elegir un vector u_n tal que $\|u_n\| \leq 1$ y $\|T(u_n)\| \geq n$. Definamos $v_n = \frac{1}{n}u_n$. Resulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\|u_n\| = 0$ pues $\|u_n\| \leq 1$. Es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = O$. Por otra parte $\|T(v_n)\| = \frac{1}{n}\|T(u_n)\| \geq 1$ en contradicción con $\lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n) = T(O) = O$.

Sea finalmente un elemento cualquiera $u \in E$. El elemento $\frac{u}{\|u\|}$ tiene norma 1 y por lo tanto

$$\|T(\frac{u}{\|u\|})\| \leq M$$

es decir (1.2)

El recíproco es trivial. ■

Mientras no de lugar a confusión designaremos las diferentes normas de diferentes espacios normados mediante la misma notación $\|\cdot\|$.

A la más pequeña de las constantes M verificando (1.2) se le designa mediante $\|T\|$ y es efectivamente una norma sobre el espacio de aplicaciones lineales continuas $\mathcal{L}(E; F)$ de E en F . La norma $\|T\|$ está caracterizada por

$$\|T\| = \sup_{v \in E; v \neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \quad (1.3)$$

En espacios de dimensión finita todas las aplicaciones lineales son continuas.

Ejemplos: Dos ejemplos importantes son cuando $F = \mathbb{R}$ y cuando $E = \mathbb{R}$. El primer caso $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ es el espacio dual topológico de E , es decir el espacio de aplicaciones lineales continuas de E en \mathbb{R} . Hay que distinguirlo del espacio dual algebraico de aplicaciones duales de E en \mathbb{R} . Cuando E es de dimensión finita los dos espacios coinciden pues en dimensión finita todas las aplicaciones lineales son continuas. El segundo ejemplo es $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$. Existe una isometría canónica entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ y F dada por

$$T : F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$$

$$x \rightarrow \varphi_x$$

donde $\varphi_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ es la aplicación que a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ le asocia la aplicación $\varphi_x : \lambda \rightarrow \lambda x$. Recíprocamente, dada $\mu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ existe un elemento $x \in F$ tal que $\mu = T(x) = \varphi_x$. En efecto basta hacer $x = \mu(1) \in F$. Véase al respecto el ejercicio 1.3.

Al espacio dual $E'' = (E')'$ del espacio dual de E se le denomina bidual. Todo elemento de E define una forma lineal continua sobre E' , es decir se puede considerar en la práctica un elemento del bidual E'' . En efecto, dado $x \in E$ definimos la aplicación

$$\rho_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow f(x)$$

Es inmediato demostrar que ρ_x es una forma lineal continua sobre E' , es decir es un elemento de E'' .

El siguiente teorema que damos sin demostración (que se puede encontrar por ejemplo en [2]) solo se utilizará puntualmente en una ocasión en este capítulo y no es necesario en el resto del libro.

Teorema 1.2. *La aplicación*

$$T : E \rightarrow E''$$

$$x \rightarrow \rho_x$$

es lineal, continua e inyectiva. De hecho se verifica $\|x\|_E = \|\rho_x\|_{E''}$. Tenemos pues que la aplicación $E \rightarrow T(E) \subset E''$ es una isometría.

Estas propiedades permiten identificar E como un subespacio de E'' .

Definición 1.6. *Un espacio de Banach E en el que $T(E) = E''$ se dice que es reflexivo.*

Definición 1.7. *Aplicaciones bilineales*

Sean E y F espacios vectoriales. Una aplicación bilineal es una aplicación

$$B : E \times E \rightarrow F$$

$$u, v \rightarrow B(u, v)$$

que verifica

$$B(\lambda u + \mu v, w) = \lambda B(u, w) + \mu B(v, w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in E$$

$$B(u, \lambda v + \mu w) = \lambda B(u, v) + \mu B(u, w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in E$$

Si E y F son espacios normados designaremos mediante $\|[u, v]\|$ una norma del vector $[u, v]$ en el espacio vectorial producto $E \times E$. Podemos generar normas en el espacio producto $E \times E$ a partir de cualquier norma en E . Por ejemplo son normas en el espacio producto las siguientes, donde $\|\cdot\|$ designa una norma en E :

- Norma l_2 : $\| [u, v] \|_2 = (\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}$
- Norma l_1 : $\| [u, v] \|_1 = \|u\| + \|v\|$
- Norma l_∞ : $\| [u, v] \|_\infty = \max \|u\|, \|v\|$
- Norma l_p , $p \geq 1$: $\| [u, v] \|_p = (\|u\|^p + \|v\|^p)^{1/p}$

Todas las normas anteriores son equivalentes.

Teorema 1.3. : *Caracterización de las aplicaciones bilineales continuas*

Sean E y F dos espacios normados y $B : E \times E \rightarrow F$ una aplicación bilineal. Entonces si B es continua en el origen $[u, v] = [0, 0] \in E \times E$ es continua en todo punto y existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|B(u, v)\| \leq M \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in E \quad (1.4)$$

Demostración:

La demostración es análoga a la del teorema 1.1

A la más pequeña de las constantes M verificando (1.4) se le designa mediante $\|B\|$ y es efectivamente una norma sobre el espacio de aplicaciones bilineales continuas $\mathcal{B}(E \times E; F)$ de $E \times E$ en F . La norma $\|B\|$ está caracterizada por

$$\|B\| = \sup_{u, v \in E; u, v \neq 0} \frac{\|B(u, v)\|}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad (1.5)$$

En espacios de dimensión finita todas las aplicaciones bilineales son continuas. Más generalmente tenemos

Definición 1.8. *Aplicaciones multilineales*

Sean E_1, \dots, E_n y F espacios vectoriales. Una aplicación multilineal es una aplicación

$$\begin{aligned} T : E_1 \times \dots \times E_n &\rightarrow F \\ [v_1, \dots, v_n] &\rightarrow T(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

tal que para cada $a_i \in E_i$ con $i \neq k$ la aplicación parcial

$$v_k \rightarrow T(a_1, \dots, a_{k-1}, v_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

es una aplicación lineal. Dicho de otro modo T verifica las propiedades: Para $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n T(v_1, \dots, v_n)$$

y para $a_i \in E_i$ con $i \neq k$ y $u_k, v_k \in E_k$

$$T(a_1, \dots, u_k + v_k, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, u_k, \dots, a_n) + T(a_1, \dots, v_k, \dots, a_n)$$

Si E_1, \dots, E_n son espacios normados designaremos mediante $\|[u_1, \dots, u_n]\|$ una norma del vector $[u_1, \dots, u_n]$ en el espacio vectorial producto $E_1 \times \dots \times E_n$. Podemos generar normas en el espacio producto $E_1 \times \dots \times E_n$ a partir de las normas en E_1, E_2, \dots, E_n por ejemplo si $E_i = \mathbb{R}^d$ para $i = 1, \dots, n$ la norma l_1 será

$$\|[u_1, \dots, u_n]\|_1 = \|u_1\|_1 + \dots + \|u_n\|_1$$

En espacios normados las aplicaciones multilineales continuas están caracterizadas por

Teorema 1.4. : *Caracterización de las aplicaciones multilineales continuas*

Sean $E_i, i = 1, \dots, n$ y F espacios normados y $T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ una aplicación multilineal. Entonces si T es continua en el origen $[0, \dots, 0] \in E_1 \times \dots \times E_n$ es continua en todo punto y existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|T(v_1, \dots, v_n)\| \leq M \|v_1\| \cdot \dots \cdot \|v_n\| \quad \forall v_i \in E_i, i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

Demostración:

La demostración sigue el mismo procedimiento que en el teorema 1.1

A la más pequeña de las constantes M verificando (1.6) se le designa mediante $\|T\|$ y es efectivamente una norma sobre el espacio de aplicaciones multilineales continuas de $E_1 \times \dots \times E_n$ en F .

En espacios de dimensión finita todas las aplicaciones multilineales son continuas.

1.2. Espacios Euclídeos o Prehilbertianos

Definición 1.9. *Un Espacio Euclídeo es un espacio vectorial en el que se ha definido una aplicación*

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\longrightarrow (u, v) \end{aligned}$$

que llamaremos *producto escalar*, verificando las propiedades siguientes:

- P1: $(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in E$ (Simetría).
- P2.1: $(\lambda u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$
- P2.2: $(u + v, w) = (u, w) + (v, w) \quad \forall u, v, w \in E$
- P3: $(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in E$; $(v, v) = 0$ solo si $v = 0$ (Definida positiva)

De la propiedad P1 y P2 se deduce

$$(u, \lambda v) = \lambda(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$$

$$(u, v+w) = (u, v) + (u, w) \quad \forall u, v, w \in E$$

Por tanto el producto escalar es una aplicación bilineal.

Todo espacio euclídeo es un espacio normado con la norma $\|v\| = (v, v)^{1/2}$. En efecto, las propiedades N1 y N2 se verifican de forma inmediata. Para verificar N3 necesitamos primero la siguiente:

Propiedad 1.1. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in E \quad (1.7)$$

Demostración:

$$(u - \lambda v, u - \lambda v) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$$

de donde

$$f(\lambda) = (u - \lambda v, u - \lambda v) = \|u\|^2 - 2\lambda(u, v) + \lambda^2\|v\|^2 \geq 0$$

f es un polinomio de segundo grado en la variable λ que toma valores mayores o igual que 0. Por tanto el discriminante asociado tiene que ser menor o igual que 0, es decir

$$(u, v)^2 - \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 \leq 0$$

reordenando y tomando la raíz cuadrada positiva obtenemos la desigualdad buscada (1.7). ■

La desigualdad N3 es ahora fácil de obtener, en efecto,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

tomando la raíz cuadrada positiva obtenemos N3.

Ejemplos:

1. $(u, v) = \sum u_i v_i$ en \mathbb{R}^d . La norma l_2 es la norma asociada a este producto escalar.
2. $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) dx$ en $C[a, b]$. La norma L^2 es la norma asociada a este producto escalar.

Definición 1.10. *Un espacio prehilbertiano completo se llama espacio de Hilbert.*

Los espacios normados de dimensión finita son todos completos por lo que son de Hilbert. Una propiedad sobresaliente del espacio de Hilbert es el siguiente teorema

Teorema 1.5. *(de Riesz-Frechet) Si φ es una forma lineal continua definida sobre un espacio de Hilbert, existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$\varphi(v) = (u, v) \quad \forall v \in H$$

Se tiene además $\|\varphi\| = \|u\|$.

Como no utilizaremos este teorema, salvo ocasionalmente en este capítulo, no damos la demostración que se puede encontrar en la mayor parte de los libros de Análisis Funcional, por ejemplo [1] o [2]. Véase ejercicio 3.7 para una demostración en un espacio de dimensión finita.

1.3. Funciones diferenciables y diferencial de una función

Concepto de Diferencial de una función en un punto

Definición 1.11. Sean E y F espacios normados, A un subconjunto abierto en E no vacío y $f : A \rightarrow F$ una aplicación de A en F . Decimos que f es diferenciable en un punto $a \in A$ si existe una aplicación lineal continua designada mediante la notación $Df(a) : E \rightarrow F$ verificando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0 \quad (1.8)$$

Es fácil verificar que la aplicación $Df(a)$ si existe es única y la llamaremos diferencial de f en a . Así pues $Df(a) \in \mathcal{L}(E; F)$. Véase ejercicio 1.4

Una aplicación diferenciable en un punto, es continua en este punto (ejercicio 1.5). Diremos que una aplicación $f : A \rightarrow F$ es diferenciable en A si es diferenciable en todos los puntos de A .

Ejemplos:

1. Diferencial de una aplicación constante: Una aplicación constante $f(v) = b$ para todo $v \in A$ es diferenciable en todo punto de A y la diferencial es la aplicación nula $Df(a) = O \in \mathcal{L}(E; F)$ donde $O : E \rightarrow F$, con $O(v) = 0$ para todo $v \in E$.
2. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en un punto $a \in I$, entonces f es diferenciable en a y la diferencial es

$$\begin{aligned} Df(a) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(a)x \end{aligned}$$

3. Diferencial de una aplicación lineal continua: Sea $f \in \mathcal{L}(E; F)$. Entonces f es diferenciable en E y $Df(a) = f$ para todo $a \in E$. En efecto,

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - f(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|0\|}{\|h\|} = 0$$

4. Diferencial de una aplicación bilineal continua: Sea $B : E \times E \rightarrow F$ una aplicación bilineal continua. B es diferenciable en todos los puntos de $E \times E$ y la diferencial en un punto $[a, b]$ es

$$DB(a, b) : E \times E \rightarrow F$$

$$[u, v] \rightarrow B(a, v) + B(u, b)$$

En efecto,

$$\frac{\|B(a+h, b+k) - B(a, b) - B(a, k) - B(h, b)\|}{\|[h, k]\|} = \frac{\|B(h, k)\|}{\|[h, k]\|} \leq \frac{\|B\| \cdot \|h\| \cdot \|k\|}{\|h\| + \|k\|}$$

donde hemos aplicado la continuidad de B y hemos tomado como norma en $E \times E$ la norma $\|[u, v]\| = \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in E$. Finalmente tomando el límite cuando $\|h\| \rightarrow 0$ y $\|k\| \rightarrow 0$ resulta

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{\|B\| \cdot \|h\| \cdot \|k\|}{\|h\| + \|k\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{\|B\| \cdot (\|h\| + \|k\|)^2}{\|h\| + \|k\|} = 0$$

5. Diferencial de una aplicación cuadrática: Sea $B : E \times E \rightarrow F$ una aplicación bilinear continua y simétrica (es decir, $B(u, v) = B(v, u)$ para todo $u, v \in E$) y sea $J : E \rightarrow F$ una aplicación definida por $J(v) = B(v, v)$ para todo $v \in E$. Entonces J es diferenciable en todo punto $a \in E$ y la diferencial es

$$DJ(a) : E \rightarrow F$$

$$v \rightarrow 2B(a, v)$$

En efecto,

$$\frac{\|J(a+h) - J(a) - 2B(a, h)\|}{\|h\|} = \frac{\|B(a, a) + 2B(a, h) + B(h, h) - B(a, a) - 2B(a, h)\|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\|B(h, h)\|}{\|h\|}$$

de donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|J(a+h) - J(a) - 2B(a, h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|B\| \cdot \|h\|^2}{\|h\|} = 0$$

6. Un caso particular del ejemplo 4 es el producto escalar: Sea E un espacio prehilbertiano con producto escalar (u, v) . Tenemos poniendo $B(u, v) = (u, v)$,

$$DB(a, b) : E \times E \rightarrow F$$

$$[u, v] \rightarrow (u, b) + (a, v)$$

7. Un caso particular del ejemplo 5: Sea E un espacio prehilbertiano con producto escalar (\cdot, \cdot) y sea $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $J(v) = (v, v)$. J es diferenciable en E y

$$DJ(a) : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow 2(a, v)$$

8. Un caso concreto combinación de los anteriores es: Sea M una matriz cuadrada y simétrica en $\mathbb{R}^{d \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^d$, sea $J : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $J(x) = \frac{1}{2}(Mx, x) - (b, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, siendo (\cdot, \cdot) el producto escalar habitual en \mathbb{R}^d . J es diferenciable en \mathbb{R}^d y

$$DJ(a) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow (Ma, x) - (b, x)$$

9. Un ejemplo análogo al anterior pero en un espacio de dimensión infinita es el siguiente: Sea $E = C[a, b]$ el espacio de funciones continuas en $[a, b]$ con el producto escalar $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) dx$, sea $f \in E$ y $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b v(x)^2 dx - \int_a^b f(x)v(x) dx$. Entonces J es diferenciable en E y

$$DJ(u) : E \rightarrow \mathbb{R} \\ v \rightarrow \int_a^b u(x)v(x) dx - \int_a^b f(x)v(x) dx$$

10. Sea F un espacio normado y $f : U \rightarrow F$ una función diferenciable definida en un intervalo abierto $U \subset \mathbb{R}$ de la recta real. Tendremos que la diferencial $Df(a)$ de f en un punto $a \in U$ es un elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ que es un espacio isométrico a F . De modo que podemos considerar $Df(a)$ como un elemento de F (véase ejercicio 1.3). Llamaremos $f'(a)$ a este elemento de F . Tenemos entonces las relaciones para todo $h \in \mathbb{R}$,

$$Df(a)(h) = hDf(a)(1) = hf'(a)$$

De la definición de diferencial en un punto $a \in \mathbb{R}$ se deduce que podemos escribir (para $h \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\|}{|h|} = 0$$

y también

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right\| = 0$$

o bien

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es decir $f'(a)$ es la derivada de f en el punto a

Utilizaremos estas notaciones más adelante en la sección dedicada a los teoremas de Taylor.

Una herramienta fundamental en el cálculo de diferenciales es la regla de la cadena

Teorema 1.6. Sean E, F, S espacios normados. $A \subset E$ un abierto $f : A \rightarrow F$, f diferenciable en $a \in A$. Sea un abierto $U \subset F$ que contiene a $f(a)$ y sea $g : U \rightarrow S$ una función diferenciable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \rightarrow S$ es diferenciable en a y la diferencial viene dada por

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Demostración:

Sean $b = f(a)$, $\lambda = Df(a)$ y $\mu = Dg(f(a))$. Introducimos las notaciones siguientes:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$$

$$\psi(y) = g(y) - g(b) - \mu(y - b)$$

y

$$\rho(x) = (g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (\mu \circ \lambda)(x - a)$$

Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x - a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - \lambda(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{\|\psi(y)\|}{\|y - b\|} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{\|g(y) - g(b) - \mu(y - b)\|}{\|y - b\|} = 0$$

y tenemos que demostrar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\rho(x)\|}{\|x - a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (\mu \circ \lambda)(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0$$

Podemos escribir poniendo $y = f(x)$ y $b = f(a)$

$$\begin{aligned} \rho(x) &= g(f(x)) - g(f(a)) + \mu(\varphi(x) - f(x) + f(a)) \\ &= g(f(x)) - g(f(a)) - \mu(f(x) - f(a)) + \mu(\varphi(x)) \\ &= \psi(f(x)) + \mu(\varphi(x)) \end{aligned}$$

como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\rho(x)\|}{\|x - a\|} \leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\psi(f(x))\|}{\|x - a\|} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\mu(\varphi(x))\|}{\|x - a\|}$$

bastará demostrar que el límite de cada sumando de la expresión anterior es nulo. Por una parte como μ es lineal continua existe una constante C tal que $\|\mu(\varphi(x))\| \leq C\|\varphi(x)\|$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\mu(\varphi(x))\|}{\|x - a\|} \leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{C\|\varphi(x)\|}{\|x - a\|} = C \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x - a\|} = 0$$

Por otra parte podemos escribir

$$\lim_{f(x) \rightarrow f(a)} \frac{\|\psi(f(x))\|}{\|f(x) - f(a)\|} = \lim_{f(x) \rightarrow f(a)} \frac{\|g(f(x)) - g(f(a)) - \mu(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} = 0$$

es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|f(x) - f(a)\| < \delta$ entonces

$$\|\psi(f(x))\| \leq \varepsilon \|f(x) - f(a)\|$$

y como f es continua para todo $\delta > 0$ existe un δ_1 tal que si $\|x - a\| < \delta_1$ tendremos $\|f(x) - f(a)\| < \delta$. Finalmente para una constante C verificando para todo x , $\|\lambda(x)\| \leq C\|x\|$

$$\begin{aligned} \|\psi(f(x))\| &\leq \varepsilon \|f(x) - f(a)\| \\ &= \varepsilon \|\varphi(x) + \lambda(x - a)\| \\ &\leq \varepsilon \|\varphi(x)\| + \varepsilon C \|x - a\| \end{aligned}$$

dividiendo por $\|x - a\|$

$$\frac{\|\psi(f(x))\|}{\|x - a\|} = \varepsilon \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x - a\|} + C\varepsilon$$

y como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x - a\|} = 0$$

quiere decir que para todo ε_1 existe un δ_2 tal que si $\|x - a\| < \delta_2$

$$\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon_1$$

tendremos tomando $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ que para $\|x - a\| < \delta_3$ tenemos

$$\frac{\|\psi(f(x))\|}{\|x - a\|} = \varepsilon \varepsilon_1 + C\varepsilon$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\psi(f(x))\|}{\|x - a\|} = 0$$

■

Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \int_0^{x+y} g(z) dz$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable. Tenemos que f es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^2 y la diferencial en un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es

$$Df(a, b) = g(a + b) \circ s$$

donde $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función suma, $s(x+y) = x+y$. En efecto, aplicando la regla de la cadena, f se puede escribir como $f = G \circ s$ donde $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función $G(x) = \int_0^x g(z) dz$. G es derivable, su derivada en un punto a es $G'(a) = g(a)$, y la diferencial $DG(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $DG(a)x = g(a)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La función suma s es lineal continua, por tanto su diferencial en cualquier punto es la misma función s . Aplicando la regla de la cadena

$$Df(a,b) = DG(s(a,b)) \circ s = DG(a+b) \circ s$$

es decir $Df(a,b)$ es la aplicación

$$\begin{aligned} Df(a,b) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x,y &\rightarrow g(a+b).(x+y) \end{aligned}$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \int_0^{xy} g(z) dz$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable. Tenemos que f es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^2 . En efecto, f se puede poner como la composición de $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, función producto de dos números reales $p(x,y) = xy$ y la función G introducida en el ejemplo anterior. Por la regla de la cadena tendremos

$$Df(a,b) = DG(ab) \circ Dp(a,b)$$

Como p es una función bilineal continua $Dp(a,b)(x,y) = ay + bx$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$. Finalmente

$$\begin{aligned} Df(a,b) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x,y &\rightarrow g(ab).(ay + bx) \end{aligned}$$

3. Sean E, E_1, E_2, F espacios normados y A un abierto de E y consideremos la funciones $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilineal continua. Por otra parte $u : A \rightarrow E_1$ y $v : A \rightarrow E_2$ diferenciables y sea g la función

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow E_1 \times E_2 \\ x &\rightarrow [u(x), v(x)] \end{aligned}$$

que será diferenciable, siendo la diferencial en un punto a

$$Dg(a) = [Du(a), Dv(a)]$$

Entonces la función compuesta $w = f \circ g$

$$w = f \circ g : A \rightarrow F$$

$$x \rightarrow f(u(x), v(x))$$

es diferenciable y la diferencial en un punto $p \in A$ viene dada por

$$Dw(p)(h) = f(Du(p)(h), v(p)) + f(u(p), Dv(p)(h)) \quad (1.9)$$

Para la demostración véase el ejercicio 1.6

4. Sean E_1, \dots, E_n y F espacios normados y consideremos la función

$$T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$$

$$[v_1, \dots, v_n] \rightarrow T(v_1, \dots, v_n)$$

multilineal continua: T es diferenciable y se tiene

$$DT(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) = T(h_1, a_2, \dots, a_n) + T(a_1, h_2, \dots, a_n)$$

$$+ \dots + T(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n)$$

Para la demostración véase el ejercicio 1.7

5. Sean E_1, \dots, E_n y F espacios normados y consideremos la función

$$T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$$

$$[v_1, \dots, v_n] \rightarrow T(v_1, \dots, v_n)$$

multilineal continua. Sean además n funciones para $i = 1, \dots, n$

$$u_i : \mathbb{R} \rightarrow E_i$$

$$t \rightarrow u_i(t)$$

diferenciables. Utilizando la isometría $\mathcal{L}(\mathbb{R}; E_i) \approx E_i$ escribimos

$$u_i'(t) = Du_i(t)(1) \in E_i$$

La función

$$g : \mathbb{R} \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n$$

$$t \rightarrow [u_1(t), \dots, u_n(t)]$$

es diferenciable,

$$Dg(t) = [Du_1(t), \dots, Du_n(t)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; E_1 \times \dots \times E_n) \approx E_1 \times \dots \times E_n$$

y

$$g'(t) = Dg(t)(1) = [Du_1(t)(1), \dots, Du_n(t)(1)] = [u_1'(t), \dots, u_n'(t)]$$

Consideramos la función compuesta $w = T \circ g$

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} &\rightarrow F \\ t &\rightarrow T(u_1(t), \dots, u_n(t)) \end{aligned}$$

Aplicando el resultado del ejemplo anterior y la regla de la cadena obtenemos que w es diferenciable, la diferencial $Dw(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F) \approx F$ y

$$\begin{aligned} w'(t) = Dw(t)(1) &= \left(DT(g(t)) \circ Dg(t) \right)(1) \\ &= \left(DT(u_1(t), \dots, u_n(t)) \right) (u'_1(t), \dots, u'_n(t)) \\ &= T((u'_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) + T((u_1(t), u'_2(t), \dots, u_n(t)) + \dots \\ &\quad + T((u_1(t), u_2(t), \dots, u'_n(t)) \end{aligned}$$

Diferenciales de orden superior

Sean E y F espacios normados, A un subconjunto abierto en E no vacío y $f : A \rightarrow F$ una aplicación de A en F . Supongamos que f es diferenciable en todos los puntos de A , de modo que $Df(a) \in \mathcal{L}(E; F)$. Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} Df : A &\rightarrow \mathcal{L}(E; F) \\ x &\rightarrow Df(x) \end{aligned}$$

Si la aplicación anterior Df es a su vez diferenciable en un punto a , su diferencial que denotaremos $D^2f(a)$ es un elemento de $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ y se llama diferencial segunda de la aplicación f en el punto a . Utilizando el isomorfismo canónico entre $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ y el espacio de aplicaciones bilineales continuas $\mathcal{B}(E \times E; F)$ de $E \times E$ en F , identificaremos $D^2f(a)$ con una aplicación bilineal continua de $\mathcal{B}(E \times E; F)$. Escribiremos pues,

$$D^2f(a)(u, v) = (D^2f(a)(u))(v) \quad \forall u, v \in E$$

Se puede demostrar que la aplicación $D^2f(a)$ es simétrica, es decir

$$D^2f(a)(u, v) = D^2f(a)(v, u) \quad \forall u, v \in E$$

Reiterando la construcción anterior, podemos definir de forma análoga, la diferencial de orden n de una función $D^n f(a)$ como un elemento del espacio de las aplicaciones n -multilineales de $E \times E \times \dots \times E$ en F . Tendremos,

$$D^n f(a)(u_1, \dots, u_n) = \left(\dots (D^n f(a)(u_1))(u_2) \dots \right) (u_n) \quad \forall u_1, u_2, \dots, u_n \in E$$

Comentario 1.1. *El isomorfismo canónico entre $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ y el espacio de aplicaciones bilineales continuas $\mathcal{B}(E \times E; F)$ consiste en identificar cada aplicación $T \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ con la aplicación $B \in \mathcal{B}(E \times E; F)$ mediante*

$$T(u)(v) = B(u, v) \quad \forall u, v \in E$$

1.4. Fórmulas de Taylor

Teorema de incrementos finitos

Empezamos con la fórmula general de incrementos finitos para dar posteriormente distintas aplicaciones.

Teorema 1.7. *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Denotamos $[a, b]$ el intervalo cerrado que determinan. Consideramos ahora dos aplicaciones continuas*

$$f : [a, b] \rightarrow F, \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

donde F es un espacio vectorial normado. Supondremos que f y g son diferenciables en el intervalo abierto (a, b) y que

$$\|f'(x)\| \leq g'(x) \quad \forall a < x < b \quad (1.10)$$

entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Demostración:

Recordemos primero que podemos considerar $Df(c) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ como elemento de F poniendo $Df(c)(1) = f'(c) \in F$. De modo que podemos escribir para $x \in \mathbb{R}$, $Df(c)(x) = x f'(c) = f'(c)x$. Del mismo modo para la función g , $Dg(c)$ se identifica con su derivada en el punto c a través de la relación $Dg(c)(1) = g'(c)$

Vamos a demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x \in [a, b]$ se verifica

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \quad (1.11)$$

Sea U el conjunto de los $x \in [a, b]$ para los cuales (1.11) es falso, es decir

$$\|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon$$

queremos demostrar que $U = \emptyset$. Tenemos que U es abierto pues las funciones f y g son continuas y poniendo $\varphi = \|f(x) - f(a)\| - g(x) + g(a) - \varepsilon(x - a) - \varepsilon$ tenemos que φ es continua por lo tanto el conjunto de puntos x que verifican $\varphi(x) > 0$ es un abierto pues es la antiimagen del abierto $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Razonamos ahora por reducción al absurdo, suponiendo que U no es el conjunto vacío. U tendrá un extremo inferior c . Podemos afirmar las tres propiedades siguientes de c :

1. $c > a$: En efecto $\varphi(a) = -\varepsilon < 0$ y como φ es continua existirá un entorno de a en el que $\varphi(x) < 0$.
2. $c \notin U$ ya que como U es abierto si c perteneciese a U existirá un entorno de c contenido en U y en particular existirían puntos $x \in U$ tales que $a < x < c$ por lo que c no sería el extremo inferior de U .
3. $c < b$ pues en caso contrario U se reduciría al punto b y U no sería abierto.

Tenemos pues que $a < c < b$ y podemos aplicar a c la hipótesis del teorema (1.10)

$$\|f'(c)\| \leq g'(c)$$

Por una parte la definición de diferencial nos dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe un η tal que si $c < x < c + \eta$ tenemos

$$\frac{\|f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)\|}{|x - c|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

por lo tanto

$$\left\| \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| - \|f'(c)\| \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$\|f'(c)\| \geq \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| - \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.12)$$

Análogamente

$$g'(c) - \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \leq \left| g'(c) - \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$g'(c) \leq \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.13)$$

De las desigualdades (1.12) y (1.13) y de la hipótesis (1.10) obtenemos

$$\|f(x) - f(c)\| \leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c) \quad (1.14)$$

Hemos visto que $c \notin U$ de modo que

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \quad (1.15)$$

De las desigualdades (1.14) y (1.15) podemos deducir

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \end{aligned}$$

Esto es cierto para $c \leq x \leq c + \eta$. Así que (1.11) es cierto para todo x tal que $c \leq x \leq c + \eta$. De modo que todo $x \leq c + \eta$ satisface (1.11) y el extremo inferior de U sería mayor o igual que $c + \eta$. Se ha llegado a una contradicción por lo tanto $U = \emptyset$.

En consecuencia podemos asegurar que (1.11) es cierta para todo $\varepsilon > 0$. Pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos el resultado buscado. ■

Consecuencia inmediata es el

Corolario 1.1. *Sea $f : [a, b] \rightarrow F$ una aplicación diferenciable en $a < x < b$ y donde F es un espacio normado. Supongamos que existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f'(x)\| \leq k \quad \forall x \in [a, b] \quad (1.16)$$

entonces

$$\|f(a) - f(b)\| \leq k(b - a) \quad (1.17)$$

o más generalmente

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad (1.18)$$

Demostración:

Elegimos $g(x) = kx$ para $x \in \mathbb{R}$. Como $g'(x) = k$ tenemos $\|f'(x)\| \leq k = g'(x)$ y podemos aplicar el teorema 1.7. ■

Veamos un teorema de incrementos finitos cuando el espacio de partida es un espacio normado. Sea ahora $f : U \rightarrow F$ donde $U \subset E$ es un abierto de un espacio normado E y F un espacio normado. Si a, b son elementos de E llamaremos segmento de extremos a y b al conjunto de puntos $x \in E$ de la forma

$$x = (1-t)a + tb \quad \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$$

Teorema 1.8. *Sea $f : U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable en U y si el segmento de extremos a y b está contenido en U , entonces*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df((1-t)a + tb)\| \quad (1.19)$$

Demostración:

Sea $h : [0, 1] \rightarrow F$ la función definida por $h(t) = f((1-t)a + tb)$ que es una función diferenciable en t . h es la función compuesta $f \circ r$ donde $r : [0, 1] \rightarrow E$ es la función dada por $r(t) = (1-t)a + tb$. Aplicando la regla de la cadena tenemos como $r'(t) = b - a$

$$Dh(t) = Df(r(t)) \circ Dr(t)$$

aplicando al valor $t' = 1$

$$Dh(t)(1) = Df(r(t))(Dr(t)(1))$$

$$h'(t) = Df((1-t)a+tb)(r'(t)) = Df((1-t)a+tb)(b-a)$$

Tenemos

$$\|h'(t)\| \leq \|Df((1-t)a+tb)\| \cdot \|b-a\|$$

haciendo $k = \|b-a\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df((1-t)a+tb)\|$ tendremos

$$\|h(1) - h(0)\| \leq k(1-0)$$

es decir la desigualdad (1.19) ■

Integración de funciones vectoriales

Suponemos al lector familiarizado con la integración de Riemann de funciones reales. No obstante en el capítulo 2 se estudiará de forma detallada la integración en \mathbb{R}^d .

En las fórmulas de Taylor que se verán a continuación se utiliza el teorema fundamental del cálculo para funciones de una variable real a valores en un espacio normado. Previamente precisamos la definición y propiedades de la integral de una función a valores en un espacio de normado. En espacios de dimensión finita podemos definir la integral utilizando las coordenadas de la función. Recordemos que en \mathbb{R}^d la coordenada i -ésima de un vector $v(v_1, \dots, v_d)^t \in \mathbb{R}^d$ es la aplicación lineal $\varphi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_i(v) = v_i$. Por tanto $\varphi_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Para nuestros propósitos es suficiente considerar la integral en el sentido Riemann. Podemos extender esta idea fácilmente a espacios de Hilbert y de Banach reflexivos. En este curso puesto que trabajaremos en los capítulo siguientes solo con espacios de dimensión finita nos será suficiente conocer el caso $F = \mathbb{R}^d$. Debido a su simplicidad hemos incluido también el caso para espacios de Hilbert y Banach reflexivos. Para nuestros propósitos será suficiente considerar funciones $f : [a, b] \rightarrow F$ donde F un espacio Banach y f una función acotada en $[a, b]$, es decir $\|f(t)\| < M$ para todo $t \in [a, b]$ tales que la función

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|f(t)\| \end{aligned}$$

sea integrable en $[a, b]$ es decir que existe la integral

$$\int_a^b \|f(t)\| dt$$

Una condición suficiente para que la función $t \rightarrow \|f(t)\|$ sea integrable (según Riemann) es que sea acotada y continua en todos los puntos de $[a, b]$ salvo en un conjunto de medida nula. (Véase al respecto el capítulo 2). La propiedad que vamos a necesitar de la integración vectorial es

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Vamos a definir la integral de una función vectorial en distintos casos y comprobaremos esta propiedad en cada uno de ellos. En todos los casos $f : [a, b] \rightarrow F$ será una función continua en $[a, b]$ (salvo eventualmente en un conjunto de puntos de medida nula) y acotada es decir $\|f(t)\| < M$ para todo $t \in [a, b]$:

1. Si $F = \mathbb{R}^d$ la integral de f se define de forma natural como la integral de cada una de sus componentes, de modo que para una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, si $(f(t)) = (f^1(t), \dots, f^d(t))^t$ su integral se define como el elemento de \mathbb{R}^d dado por

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f^1(t) dt, \dots, \int_a^b f^d(t) dt \right)^d$$

Es inmediato ver que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

que es una consecuencia de esta propiedad para funciones reales ya que para cada coordenada i -ésima tenemos

$$\left| \int_a^b f^i(t) dt \right| \leq \int_a^b |f^i(t)| dt$$

2. En el caso de que F sea un espacio de Hilbert no necesariamente de dimensión finita se puede definir la integral de f

$$I_f = \int_a^b f(t) dt$$

mediante

$$(I_f, x) = \left(\int_a^b f(t) dt, x \right) = \int_a^b (f(t), x) dt \quad \forall x \in F \quad (1.20)$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto escalar en F . Tenemos que demostrar que existe un elemento $I_f \in F$ verificando (1.20). En efecto consideramos la forma lineal

$$\begin{aligned} \varphi_f : F &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \varphi_f(x) = \int_a^b (f(t), x) dt \end{aligned}$$

φ_f es evidentemente una forma lineal en F y es continua pues

$$\begin{aligned} |\varphi_f(x)| &= \left| \int_a^b (f(t), x) dt \right| \leq \int_a^b |(f(t), x)| dt \\ &\leq \left(\int_a^b \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \|x\| \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En particular obtenemos

$$\|\varphi_f\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Es decir I_f es un elemento del espacio dual F' de F . Por el teorema de Riesz-Frechet 1.5 existe una isometría entre F y F' de modo que existe un elemento $I_f \in H$ tal que

$$\varphi_f(x) = (I_f, x) \quad \forall x \in F$$

Tenemos que I_f verifica (1.20) y además

$$\|I_f\| = \|\varphi_f\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

I_f es obviamente única pues

$$(I_f, x) = 0 \quad \forall x \in F \Rightarrow I_f = 0$$

3. Si F es un espacio de Banach reflexivo, sea $F' = \mathcal{L}(F; \mathbb{R})$ el espacio dual (topológico) de F . Definimos

$$I_f = \int_a^b f(t) dt$$

mediante

$$\varphi(I_f) = \varphi\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt \quad \forall \varphi \in F' \quad (1.21)$$

Si existe $I_f \in F$ verificando (1.21) esta expresión define de forma única el vector I_f , pues tenemos en todo espacio normado que si para $x \in F$ se verifica

$$\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in F'$$

entonces $x = 0$ (véase [2]). Vamos a demostrar la existencia de I_f . Sea

$$\begin{aligned} \rho_f : F' &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow \rho_f(\varphi) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt \end{aligned}$$

ρ_f es evidentemente una forma lineal en F' y es continua pues

$$\begin{aligned} |\rho_f(\varphi)| &= \left| \int_a^b \varphi(f(t)) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(f(t))| dt \\ &\leq \left(\int_a^b \|f(t)\| dt \right) \|\varphi\| \end{aligned}$$

donde hemos aplicado que φ es lineal y continua. En particular obtenemos

$$\|\rho_f\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Finalmente si F es un espacio de Banach reflexivo (definición 1.6) existe una isometría entre el bidual F'' y el espacio F (para esta propiedad véase [2]) de modo que existe un elemento $I_f \in F$ tal que

$$\rho_f(\varphi) = \varphi(I_f) \quad \forall \varphi \in F'$$

verificando además $\|I_f\| = \|\rho_f\|$. Podremos escribir

$$\varphi(I_f) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt \quad \forall \varphi \in F'$$

y también

$$\|I_f\| = \|\rho_f\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Observación 1.1. De las definiciones anteriores se deduce que la integral de una función $f : [a, b] \rightarrow F$ está bien definida si f está acotada y es continua (salvo en conjuntos de medida nula, de aquí en adelante continuas c.t.p.). En efecto si $F = \mathbb{R}^d$ las funciones $t \in [a, b] \rightarrow f^i(t) \in \mathbb{R}$ son integrables pues son continuas c.t.p. y acotadas. Del mismo modo en el caso que F sea un espacio de Hilbert la función $t \in [a, b] \rightarrow (f(t), x) \in \mathbb{R}$ es continua c.t.p. y acotada y si F es un espacio de Banach también la función $t \in [a, b] \rightarrow \varphi(f(t)) \in \mathbb{R}$ es continua c.t.p. y acotada. Véase al respecto el teorema 2.3.

Observación 1.2. En el caso general de una función $f : [a, b] \rightarrow F$ donde F es un espacio de Banach (no necesariamente reflexivo) se puede definir la integral en el sentido Riemann $\int_a^b f(t) dt$ utilizando sumas de Riemann. Básicamente se define la integral mediante límite de sumas: Para una partición

$$P = \{[x_{i-1}, x_i]; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; i = 1, \dots, n\}$$

de $[a, b]$ y puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ escribimos

$$\mathcal{R}(f, t_i, P) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (1.22)$$

Definimos el tamaño de una partición como $|P| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$.

Diremos que la función f es integrable según Riemann si existe un $I_f \in F$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que para toda partición P con $|P| < \delta$ se verifica

$$\|I_f - \mathcal{R}(f, t_i, P)\| < \delta \quad (1.23)$$

En este caso escribiremos

$$I_f = \int_a^b f(t) dt$$

Fácilmente se deduce que si existe I_f esta es única. Se demuestra que si f es continua en $[a, b]$ la función es integrable según Riemann. La demostración requiere la completitud del espacio F es decir que F sea un espacio de Banach. Además si $f : [a, b] \rightarrow F$ es integrable Riemann y si $T : F \rightarrow G$ es una aplicación lineal continua entre espacios de Banach entonces la función $T \circ f : t \in [a, b] \rightarrow T(f(t)) \in G$ es integrable Riemann y se tiene

$$T\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b T(f(t)) dt$$

En particular tomando $G = \mathbb{R}$ tendremos para $\varphi \in F' = \mathcal{L}(F; \mathbb{R})$

$$\varphi\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt$$

que es la propiedad que hemos utilizado para definir la integral vectorial en los párrafos precedentes a las observaciones.

La demostración de las propiedades siguientes es la misma que en el caso de de funciones reales a valores en la recta real \mathbb{R} , basta sustituir el valor absoluto por la norma correspondiente.

Propiedad 1.2. Sea F un espacio Banach y $f : [a, b] \rightarrow F$ integrable en $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Para $a \leq x \leq b$ escribimos

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

En estas condiciones I es continua en $[a, b]$. En realidad es uniformemente continua.

Demostración:

Como f es integrable en $[a, b]$ es acotada es decir $\|f(t)\| < M$ para $a \leq t \leq b$. Si $a \leq x \leq y \leq b$ tendremos

$$\|I(y) - I(x)\| = \left\| \int_x^y f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \leq M\|y - x\|$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \varepsilon/M$ tal que si $\|y - x\| < \delta$ entonces

$$\|I(y) - I(x)\| \leq M\|y - x\| < \varepsilon$$

Esto demuestra la continuidad uniforme de I . ■

Propiedad 1.3. Sea F un espacio Banach y $f : [a, b] \rightarrow F$ integrable en $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Para $a \leq x \leq b$ escribimos

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

En estas condiciones si f es continua en el punto $x_0 \in [a, b]$, I es diferenciable en x_0 y se tiene

$$I'(x_0) = f(x_0) \quad (1.24)$$

Demostración:

Supongamos que f es continua en x_0 . Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - x_0| < \delta$ y $a \leq t \leq b$ entonces

$$\|f(t) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Por tanto si

$$x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta \quad \text{y} \quad a \leq s < t \leq b$$

resulta

$$\begin{aligned} \left\| \frac{I(t) - I(s)}{t - s} - f(x_0) \right\| &= \left\| \frac{1}{t - s} \int_s^t (f(u) - f(x_0)) du \right\| \\ &\leq \left| \frac{1}{t - s} \right| \int_s^t \|f(u) - f(x_0)\| du < \varepsilon \end{aligned}$$

de modo que tomando $s = x_0$ y $t = x_0 + h$ (o bien $t = x_0$ y $s = x_0 - h$) hemos demostrado

$$I'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x_0 + h) - I(x_0)}{h} = f(x_0)$$

■

Teorema 1.9. Sea F un espacio de Banach y $f : [a, b] \rightarrow F$ diferenciable con continuidad para todo $t \in [a, b]$ entonces

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt \quad (1.25)$$

Demostración:

Pongamos

$$I(x) = \int_a^x f'(t) dt$$

Tenemos (propiedad 1.3) que I es una primitiva de f' pues $I'(x) = f'(x)$. Además $I(a) = 0$. Por otra parte f es otra primitiva de f' . Así que $f(t) - I(t) = C \in \mathbb{R}$ para todo $t \in [a, b]$. Tendremos $f(a) = f(a) - I(a) = C$ de modo que $f(t) - f(a) = I(t)$ en particular $f(b) - f(a) = I(b)$, es decir

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

■

Fórmulas de Taylor

Estamos en condiciones de estudiar las fórmulas de Taylor. Empezamos con algunos resultados previos.

Lema 1.1. *Sea $v : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ una función $(n+1)$ veces diferenciable de una variable real $t \in U$ siendo U un intervalo abierto de \mathbb{R} y que toma valores en un espacio normado F . Tenemos*

$$\frac{d}{dt} \left(v(t) + (1-t)v'(t) + \cdots + \frac{1}{n!} (1-t)^n v^{(n)}(t) \right) = \frac{1}{n!} (1-t)^n v^{(n+1)}(t) \quad (1.26)$$

donde la notación dv/dt designa la derivada de una función v de la variable real t .

Demostración:

Consideramos primero el caso de funciones de una variable real a valores en un espacio normado. Recordemos que para funciones de una variable real t a valores en un espacio normado F la derivada $v'(t) = Dv(t)(1) \in F$. Y las derivadas sucesivas tendremos $v''(t) = Dv'(t)(1) \in F$ y así sucesivamente.

Derivando en (1.26) aplicando la fórmula para la derivada de un producto (aplicación bilineal)

$$\begin{aligned} & v'(t) - v'(t) + (1-t)v''(t) \\ & - (1-t)v''(t) + \frac{1}{2!}(1-t)^2 v'''(t) \\ & - \frac{1}{2!}(1-t)^2 v'''(t) + \frac{1}{3!}(1-t)^3 v^{(4)}(t) \\ & \dots \\ & - \frac{1}{(n-1)!}(1-t)^{(n-1)} v^{(n)} + \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n+1)}(t) \\ & = \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

■

Corolario 1.2. *Con las mismas notaciones del lema 1.1 supongamos que*

$$\|v^{(n+1)}(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0, 1]$$

entonces tenemos

$$\|v(1) - v(0) - v'(0) - \frac{1}{2}v''(0) - \dots - \frac{1}{n!}v^{(n)}(0)\| \leq \frac{M}{(n+1)!} \quad (1.27)$$

Demostración:

Aplicamos el teorema de incrementos finitos 1.7 en el intervalo $[0, 1]$ tomando como función g

$$g(t) = -M \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Llamando

$$r(t) = v(t) + (1-t)v'(t) + \dots + \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n)}(t)$$

La igualdad (1.26) nos dice

$$r'(t) = \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n+1)}(t)$$

de donde

$$\|r'(t)\| \leq \frac{(1-t)^n}{n!} \|v^{(n+1)}(t)\| \leq M \frac{(1-t)^n}{n!} = g'(t)$$

el teorema 1.7 permite concluir que

$$\|r(1) - r(0)\| \leq g(1) - g(0)$$

es decir (1.27).

■

Corolario 1.3. *Con las mismas notaciones del lema 1.1 supongamos además que F es de Banach, $U \supset [0, 1]$ y que $f^{(n+1)}$ es continua. Entonces*

$$v(1) - v(0) - v'(0) - \frac{1}{2}v''(0) - \dots - \frac{1}{n!}v^{(n)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t) dt \quad (1.28)$$

Demostración:

Tenemos (teorema 1.9) para una función $r : t \in [0, 1] \rightarrow r(t) \in F$ diferenciable con continuidad

$$r(1) - r(0) = \int_0^1 r'(t) dt$$

Aplicamos este resultado a la función

$$r(t) = v(t) + (1-t)v'(t) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n)}(t)$$

cuya derivada es (lema 1.1)

$$r'(t) = \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n+1)}(t)$$

resultando

$$v(1) - v(0) - v'(0) - \frac{1}{2}v''(0) - \cdots - \frac{1}{n!}v^{(n)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t) dt$$

■

Los dos corolarios anteriores son casos particulares de fórmulas de Taylor. Vamos a ver ahora el caso general: U será un abierto de un espacio normado E y $f: U \rightarrow F$ es una aplicación de $U \subset E$ en otro espacio normado F que supondremos diferenciable con continuidad $n+1$ veces. Dado un punto $a \in U$ consideraremos los puntos de un segmento $[a, a+h]$ que supondremos contenido en U . Esto se cumplirá por ejemplo si U es un conjunto convexo y $a+h \in U$ o también, como U es abierto, si h es un vector de norma suficientemente pequeña.

Consideremos ahora la función $v: t \in [0, 1] \rightarrow f(a+th) \in F$ que es una función de $[0, 1]$ en F que se obtiene mediante composición de las funciones $g: t \in [0, 1] \rightarrow (a+th) \in E$ y la función f , es decir, $v = f \circ g$. Tenemos por una parte

$$Dg(t)(1) = g'(t) = h$$

y aplicando la regla de la cadena

$$v'(t) = Dv(t)(1) = (Df(g(t)) \circ Dg(t))(1) = Df(a+th)(Dg(t)(1)) = Df(a+th)(h)$$

Para la derivada segunda observemos $Df(a+th) \in \mathcal{L}(E; F)$ y pongamos

$$\begin{aligned} r: [0, 1] &\rightarrow \mathcal{L}(E; F) \\ t &\rightarrow r(t) = Df(a+th) \end{aligned}$$

Tendremos $v'(t) = r(t)(h) \in F$ y también $Dr(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(E; F))$ y $r'(t) = Dr(t)(1) \in \mathcal{L}(E; F)$. Calculemos $r'(t)$:

$$\begin{aligned} r'(t) &= Dr(t)(1) = D(Df \circ g)(t)(1) \\ &= \left(D^2 f(g(t)) \circ Dg(t) \right)(1) = D^2 f(a+th)(g'(t)) = D^2 f(a+th)(h) \end{aligned}$$

finalmente

$$v''(t) = \frac{dv'}{dt}(t) = r'(t)(h) = D^2 f(a+th)(h)(h) = D^2 f(a+th)(h, h) \in F$$

Aplicando sucesivamente este cálculo obtenemos

$$v^{(n)}(t) = D^{(n)} f(a+th)(h, \overset{(n \text{ veces})}{\dots}, h) \quad (1.29)$$

Ahora en los corolarios 1.2 y 1.3 sustituiremos v y sus derivadas por la expresión (1.29) para los distintos valores de n . Obtenemos así las fórmula de Taylor siguientes:

Teorema 1.10. *Fórmula de Taylor con resto de Lagrange.*

Sean E y F espacios normados. U un abierto de E . Sea $f : U \subset E \rightarrow F$ una función $(n+1)$ veces diferenciable. Supongamos que el segmento $[a, a+h]$ está contenido en U . Tenemos

$$\|D^{n+1} f(x)\| \leq M \quad (1.30)$$

entonces

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(h, h) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} D^{(n)} f(a)(h, \overset{(n \text{ veces})}{\dots}, h) + R(h) \end{aligned}$$

donde

$$\|R(h)\| \leq \frac{M \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Demostración:

Aplicamos el corolario 1.2 a la función $t \rightarrow v(t) = f(a+th)$ utilizando la expresión (1.29) para $n = 0, 1, 2, \dots$, tenemos

$$\begin{aligned} R(h) &= f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \frac{1}{2} D^2 f(a)(h, h) - \dots \\ &\quad - \frac{1}{n!} D^{(n)} f(a)(h, \overset{(n \text{ veces})}{\dots}, h) \end{aligned}$$

Tendremos

$$\|v^{(n+1)}\| = \|D^{(n+1)} f(a+th)(h, \overset{(n+1 \text{ veces})}{\dots}, h)\| \leq \|D^{(n+1)} f(a+th)\| \cdot \|h\|^{n+1}$$

y gracias a la hipótesis (1.30)

$$\|v^{(n+1)}\| \leq M \|h\|^{n+1}$$

de modo que

$$\|R(h)\| \leq \frac{M \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

Teorema 1.11. *Fórmula de Taylor con resto integral.*

Sean E un espacio normado y F un espacio de Banach. U un abierto de E . Sea $f : U \subset E \rightarrow F$ una función $(n+1)$ veces diferenciable. Supongamos que el segmento $[a, a+h]$ está contenido en U , tenemos

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2}D^2f(a)(h, h) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!}D^{(n)}f(a)(h, \overset{(n \text{ veces})}{\dots}, h) \\ &\quad + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}D^{(n+1)}f(a+th)(h, \overset{(n+1 \text{ veces})}{\dots}, h) dt \end{aligned}$$

Demostración:

Aplicamos el corolario 1.3 a la función $t \rightarrow v(t) = f(a+th)$ utilizando las expresión (1.29) para $n = 0, 1, 2, \dots$

■

En el caso que la función f tome valores en \mathbb{R} tenemos la siguiente fórmula de Taylor-Maclaurin:

Teorema 1.12. *Fórmula de Taylor con resto de Taylor-Maclaurin.*

Sea E un espacio de normado. U un abierto de E . Sea $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ una función n veces diferenciable. Supongamos que el segmento $[a, a+h]$ está contenido en U .

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2!}D^2f(a)(h, h) \dots + \frac{1}{n!}D^n f(a+\theta h)(h, \dots, h) \\ &\quad \forall \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Demostración:

Sea $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, n veces derivable con continuidad tenemos la siguiente fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} v(1) &= v(0) + v'(0) + \frac{1}{2!}v''(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}v^{(n-1)}(0) + \frac{1}{(n)!}v^{(n)}(\theta) \\ &\quad \forall \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{1.32}$$

(Véanse los ejercicios 1.8 y 1.9 para una demostración.) Consideremos ahora la función $v : t \in [0, 1] \rightarrow f(a+th) \in F$ que es una función de $[0, 1]$ en F que se obtiene mediante composición de las funciones $g : t \in [0, 1] \rightarrow (a+th) \in E$ y la función f , es decir $v = f \circ g$. Tenemos igual que en las consideraciones previas al teorema 1.10

$$\begin{aligned}
v(t) &= f(a+th) \\
v'(t) &= Df(a+th)(h) \\
v''(t) &= D^2f(a+th)(h, h) \\
&\dots \\
v^{(n)}(t) &= D^{(n)}f(a+th)(h, \overset{(n \text{ veces})}{\dots}, h)
\end{aligned}$$

Tomado $t = 1$ y $t = 0$, sustituyendo en (1.32) obtenemos (1.31). ■

Derivadas direccionales

Sean E y F espacios normados, A un subconjunto abierto en E no vacío y $f : A \rightarrow F$ una aplicación de A en F .

Definición 1.12. *Derivada Direccional*

Sea $v \in E$. Si existe el límite en F siguiente

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a + \lambda v) - f(a)}{\lambda} \quad (1.33)$$

lo llamaremos derivada de f en el punto a en la dirección v y lo designaremos mediante la notación $D_v f(a)$.

Si f es diferenciable en a es fácil ver que

$$D_v f(a) = Df(a)v$$

Tenemos por tanto que si una función es diferenciable en a admite derivadas direccionales en a en cualquier dirección v . El recíproco no es cierto.

1.5. Cálculo diferencial en \mathbb{R}^d

Consideraremos ahora funciones definidas en \mathbb{R}^d a valores reales. Sea un abierto $A \subset \mathbb{R}^d$ y f una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en un punto $a \in A$. La diferencial de $Df(a)$ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^p . Eligiendo bases en \mathbb{R}^d y en \mathbb{R}^p la diferencial $DF(a)$ tendrá una representación matricial que denotamos $f'(a)$ y que llamaremos matriz jacobiana de f en el punto a y que será una matriz de p filas y d columnas.

En particular para una función definida en un abierto $A \subset \mathbb{R}^d$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en $a \in A$, la diferencial de $Df(a)$ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^d en \mathbb{R} . Si elegimos una base en \mathbb{R}^d , por ejemplo la base canónica $e_i, i = 1, \dots, d$ con $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$, podemos representar $Df(a)$ como la matriz fila

$$f'(a) = (Df(a)e_1, \dots, Df(a)e_d)$$

Para una función $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f(v) \in \mathbb{R}^p$ y elegida una base en \mathbb{R}^p podemos considerar las componentes de $f(v)$, $f(v) = (f^1(v), \dots, f^d(v))^t \in \mathbb{R}^p$, $f^i(v) \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, p$. Las funciones $f^i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ las llamaremos funciones componentes de f . De forma inmediata, tenemos que f es diferenciable en a si y solo si las funciones componentes f^i son diferenciables en a . La matriz jacobiana es entonces

$$f'(a) = \begin{pmatrix} Df^1(a)e_1 & \dots & Df^1(a)e_d \\ \dots & & \dots \\ Df^p(a)e_1 & \dots & Df^p(a)e_d \end{pmatrix}$$

Consideremos en \mathbb{R}^d la base canónica e_i , $i = 1, \dots, d$. Y sea una función $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ que admita derivadas direccionales. La derivada en la dirección e_i de f en un punto $a \in \mathbb{R}^d$, $D_{e_i}f(a) \in \mathbb{R}$ se llama derivada parcial i -ésima de f en el punto a y la designamos mediante las notaciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, o bien $\partial_i f(a)$. Tendremos

$$\partial_i f(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \lambda, a_{i+1}, \dots, a_d) - f(a_1, \dots, a_d)}{\lambda}$$

Si f es diferenciable en a , tenemos $\partial_i f(a) = Df(a)e_i$. Y la matriz jacobiana viene dada por

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_d f(a))$$

En el caso de funciones $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$, la derivada direccional en un punto $D_v f(a)$ es un elemento de \mathbb{R}^p , cuyas componentes, una vez elegida una base en \mathbb{R}^p son las derivadas direccionales de las funciones componentes $D_v f^i(a)$ y en particular tendremos para las derivadas parciales

$$\partial_i f(a) = \begin{pmatrix} \partial_i f^1(a) \\ \dots \\ \partial_i f^p(a) \end{pmatrix}$$

y para la matriz jacobiana

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(a) & \dots & \partial_d f^1(a) \\ \dots & & \dots \\ \partial_1 f^p(a) & \dots & \partial_d f^p(a) \end{pmatrix}$$

Regla de la cadena y matrices jacobianas: Consideremos ahora $A \subset \mathbb{R}^d$ un abierto $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$, f diferenciable en $a \in A$. Sea un abierto $U \in F$ que contiene a $f(a)$ y sea $g : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ una función diferenciable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^s$ sabemos que es diferenciable en a y que la diferencial en a es $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$. Utilizando matrices jacobianas, la regla de la cadena se escribirá

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

es decir la matriz jacobiana en a de la función compuesta $g \circ f$ es el producto de la matriz jacobiana de g en $f(a)$ y de la matriz jacobiana de f en a .

Matriz jacobiana y gradiente de una función: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos la $Df(a)$ que es una aplicación lineal continua de \mathbb{R}^d en \mathbb{R} , es decir un elemento del espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ el espacio dual de \mathbb{R}^d . Vamos a ver que podemos considerar también $Df(a)$ como un vector de \mathbb{R}^d . En efecto, podemos identificar el espacio dual $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ con \mathbb{R}^d de la siguiente forma: Dado $u \in \mathbb{R}^d$ le asociamos un elemento $\varphi_u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ mediante (teorema 1.5)

$$\varphi_u(v) = (u, v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto escalar en \mathbb{R}^d . Es fácil ver que dado $u \in \mathbb{R}^d$, la aplicación φ_u así definida es lineal, por lo tanto un elemento del dual. Además la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \\ u &\rightarrow \varphi_u \end{aligned}$$

es biyectiva y es de hecho una isometría, es decir $\|u\| = \|\varphi_u\|$ para todo $u \in \mathbb{R}^d$. Si consideramos $Df(a)$ como un vector de \mathbb{R}^d a través de la anterior identificación lo llamaremos vector gradiente y lo designamos mediante $\nabla f(a)$. En la base canónica se escribe

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \dots \\ \partial_d f(a) \end{pmatrix}$$

y tendremos la diferentes formas de expresar el valor de $Df(a)v$:

$$Df(a)v = f'(a) \cdot v = (\nabla f(a), v)$$

que se lee: $Df(a)v$ es el valor de la diferencial de f en a aplicado al vector v que es igual a $f'(a) \cdot v$ que es el producto de la matriz fila $f'(a)$ por el vector columna v y que finalmente es igual a $(\nabla f(a), v)$ que es el producto escalar del vector $\nabla f(a)$ por el vector v .

Diferenciales de orden superior en \mathbb{R}^d

Sea un abierto $A \subset \mathbb{R}^d$, y f una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable dos veces en un punto $a \in A$. Tenemos $D^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ o bien $D^2 f(a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, identificando el espacios de aplicaciones lineales $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ con el espacio de aplicaciones bilineales $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Para determinar la aplicación $D^2 f(a)$ basta conocer su imagen al aplicarla a los elementos de una base $e_i, i = 1, \dots, d$ de \mathbb{R}^d . En efecto conocidos los valores de $D^2 f(a)(e_i, e_j)$ el valor de $D^2 f(a)(u, v)$, para cualquier par de vectores $u = \sum_i u_i e_i, v = \sum_i v_i e_i$ es

$$D^2 f(a)(u, v) = \sum_{i,j} u_i v_j D^2 f(a)(e_i, e_j)$$

La matriz

$$H(a) = \begin{pmatrix} D^2 f(a)(e_1, e_1) & \dots & D^2 f(a)(e_1, e_d) \\ & \dots & \\ D^2 f(a)(e_d, e_1) & \dots & D^2 f(a)(e_d, e_d) \end{pmatrix}$$

se llama matriz Hessiana de f en el punto a y es la representación matricial de la Diferencial segunda de f en a .

El cálculo efectivo de $D^2 f(a)(u, v)$, se expresa matricialmente como

$$v^t \cdot H(a) \cdot u$$

donde aquí v^t es el vector fila formado por las componentes de v en la base elegida y u es el vector columna formado por las componentes de u en la base elegida.

En el caso de una función $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ con p componentes el concepto anterior se aplica a cada una de las funciones componentes de f .

Derivadas parciales de orden superior y cálculo práctico de la matriz Hessiana

La matriz Hessiana se puede calcular fácilmente con ayuda del concepto de derivada parcial segunda. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales en A . La función

$$\begin{aligned} \partial_i f : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \partial_i f(x) \end{aligned}$$

Se llama función derivada parcial i -ésima de f . Si esta función admite sus derivadas parciales $\partial_j(\partial_i f)(a)$ en un punto $a \in A$ este número se llama derivada parcial segunda de f en el punto a . La notaciones habituales son:

$$\partial_j(\partial_i f)(a) = \partial_{ji}^2 f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Teorema 1.13. Para $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable se tiene

$$D^2 f(a)(e_i, e_j) = \partial_{ji}^2 f(a) = \partial_{ij}^2 f(a)$$

Demostración:

Tenemos

$$f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

y para $a \in A$

$$Df(a) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{aplicación lineal}$$

De modo que para todo $x \in A$ podemos definir

$$Df : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^d$$

$$x \rightarrow Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^d$$

Fijamos una base en \mathbb{R}^d y trabajamos con las correspondiente matrices jacobianas. Llamemos $g = f'$. Podemos escribir identificando \mathbb{R}^d con su dual

$$g = f' : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = f'(x) = (g^1(x) = \partial_1 f(x), \dots, g^d(x) = \partial_d f(x))^t$$

Aplicando a cada componente de g lo realizado en el cálculo de f' , tenemos para cada componente g^i

$$(g^i)'(a) = (\partial_1 g^i(a), \dots, \partial_d g^i(a))$$

de modo que puesto que $\partial_j g^i(a) = \partial_j(\partial_i f(a)) = \partial_{ji}^2 f(a)$

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 g^1(a), \dots, \partial_d g^1(a) & \dots \\ \partial_1 g^d(a), \dots, \partial_d g^d(a) & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 f(a), \dots, \partial_{d1}^2 f(a) & \dots \\ \partial_{1d}^2 f(a), \dots, \partial_{dd}^2 f(a) & \dots \end{bmatrix}$$

Finalmente la propiedad $\partial_{ji}^2 f(a) = \partial_{ij}^2 f(a)$ se verá en 2.11 en el capítulo 2. Tenemos pues que la matriz Hessiana es simétrica. ■

Análogamente tendremos para las diferenciales de orden n de una función $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto a , la diferencial $D^n f(a)$ es una aplicación multilinear de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \dots (n) \dots \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ que vendrá determinada por los d^n valores

$$D^n f(a)(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}), \quad i_1, \dots, i_n = 1, \dots, d$$

y se tiene

$$D^n f(a)(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \partial_{i_1, \dots, i_n}^n f(a), \quad i_1, \dots, i_n = 1, \dots, d$$

1.6. Extremos relativos y diferenciabilidad

En la sección 1.7 haremos uso de la relación entre el mínimo de una función y el valor de su diferencial. Empezamos con el teorema de Weierstrass que nos da condiciones suficientes para la existencia de un mínimo. Nos limitamos aquí a los resultados que necesitaremos más adelante.

Teorema 1.14. (de Weierstrass)

Sea K un conjunto compacto de \mathbb{R}^d , no vacío y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua en K . Entonces el problema:

Hallar $\bar{x} \in K$ tal que

$$f(\bar{x}) = \inf_{x \in K} f(x)$$

tiene solución.

Demostración:

K compacto y f continua implica que $f(K)$ es compacto en \mathbb{R} , por tanto $f(K)$ está acotado inferiormente y existe un extremo inferior, es decir, existe un número $\alpha > -\infty$ tal que $\alpha = \inf_{x \in K} f(x)$.

Consideremos una sucesión minimizante $(x_n)_n$, es decir, $x_n \in K$ tal que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$. Una tal sucesión la podemos siempre construir tomando por ejemplo $0 < \varepsilon < 1$, $x_n \in K$ tal que

$$\alpha \leq f(x_n) \leq \alpha + \varepsilon^n$$

$(x_n)_n$ es una sucesión en el compacto K , por lo tanto existe una subsucesión convergente $(x_{\nu})_{\nu}$. Sea \bar{x} el límite de (x_{ν}) . Gracias a la continuidad de f tendremos $\alpha = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x_{\nu}) = f(\bar{x})$. ■

Demos una aclaración acerca de las notaciones. Referido a la base canónica de \mathbb{R}^d , $Df(\bar{x})$ se escribirá $f'(\bar{x})$, es decir, la matriz jacobiana de f en el punto \bar{x} . En este caso la matriz jacobiana es una matriz fila. Podemos escribir $Df(\bar{x})(x)$ con notación matricial como $f'(\bar{x}) \cdot x$ (matriz fila por matriz columna). La transpuesta de esta matriz fila es un vector columna que hemos llamado vector gradiente de f en \bar{x} y se escribe $\nabla f(\bar{x})$. Cuando identifiquemos $Df(\bar{x})$ con un vector de \mathbb{R}^d escribiremos indistintamente $Df(\bar{x})x$ o $(\nabla f(\bar{x}), x)$, donde el paréntesis denota el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^d .

A continuación introducimos la noción de extremo relativo y la relacionaremos con las nociones de diferencial.

Definición 1.13. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene un mínimo relativo en $\bar{x} \in A$ si existe un entorno U de \bar{x} tal que

$$\forall x \in U \quad f(\bar{x}) \leq f(x)$$

Análogamente f tiene un máximo relativo en $\bar{x} \in A$ si existe un entorno U de \bar{x} tal que

$$\forall x \in U \quad f(\bar{x}) \geq f(x)$$

Teorema 1.15. Condición necesaria de extremo relativo

Sean A abierto de \mathbb{R}^d , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en A . Si f tiene un extremo relativo en $\bar{x} \in A$ (máximo o mínimo) entonces la diferencial de f en \bar{x} es la aplicación nula, es decir, $Df(\bar{x}) = 0$, es decir

$$Df(\bar{x})(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

o bien identificando $Df(\bar{x})$ con un elemento de \mathbb{R}^d , $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Demostración:

- Caso $d = 1$: Sea A abierto de \mathbb{R} , $\bar{x} \in A$, $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in U$, entorno de \bar{x} . Tendremos, por ejemplo

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \geq 0$$

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \leq 0$$

de donde $f'(\bar{x}) = 0$.

- Caso general $d > 1$

Fijemos h con norma suficientemente pequeña de modo que $\bar{x} + th \in U$ para todo $t \in]-1, +1[$. Introducimos ahora la función

$$\begin{aligned} \varphi :]-1, +1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow f(\bar{x} + th) \end{aligned}$$

de modo que $\varphi = f \circ g$ donde

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\rightarrow \bar{x} + th \end{aligned}$$

Si f tiene un mínimo relativo en \bar{x} , es decir, $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + th)$, entonces $\varphi(0) \leq \varphi(t) \quad \forall t \in]-1, +1[$. Resulta φ tiene un mínimo relativo en 0 y por lo tanto $\varphi'(0) = 0$, es decir, aplicando la regla de la cadena

$$\varphi'(t) = Df(g(t)) \circ Dg(t) = f'(\bar{x} + th) \cdot g'(t) = f'(\bar{x} + th) \cdot h$$

de modo que

$$\varphi'(0) = f'(\bar{x}) \cdot h = 0$$

Como la dirección h es cualquiera, tomando sucesivamente en el lugar de h , para $i = 1, \dots, d$, $h = \lambda e_i$ siendo $e_i = (0, \dots, 0, \overset{\text{lugar-íésimo}}{1}, 0, \dots, 0)^t$ y λ suficientemente pequeño para que $\bar{x} + \lambda e_i \in U$ resulta $f'(\bar{x}) = 0$.

■

Comentario 1.2. Dada una función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el conjunto compacto K como en el teorema 1.14. f tendrá un mínimo (absoluto) en K y si sabemos que este mínimo no se alcanza en la frontera de K entonces se alcanzará en un punto \bar{x} interior de K , por lo tanto existirá un entorno abierto de \bar{x} , $U \subset K$ en el que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in U$, por lo tanto \bar{x} es un mínimo relativo en U y si f es diferenciable se verifica $Df(\bar{x}) = 0$.

1.7. Teorema de la función inversa

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable con continuidad en un conjunto abierto A que contiene a a y que $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) > 0$ existe un entorno U de a (intervalo abierto) tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in U$. Análogamente si $f'(a) < 0$ existirá un entorno U de A tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in U$. En cualquier caso f' es creciente (caso $f' > 0$) o decreciente (caso $f' < 0$) en U es por tanto biyectiva en U y existirá la función inversa f^{-1} definida en un entorno abierto W de $f(a)$. Además se tiene que f^{-1} es diferenciable y

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

El objetivo de esta sección es generalizar este resultado a funciones $f : A \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definidas en un abierto A de \mathbb{R}^d . En primer lugar necesitaremos un resultado previo.

Lema 1.2. *Sea A un abierto de \mathbb{R}^d y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ diferenciable con continuidad. Si existe un número M tal que $|\partial_j f^i(x)| \leq M$ para todo $x \in A$ entonces*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq cM\|x - y\| \quad (1.34)$$

para todo $x, y \in A$ y donde la constante c depende de la dimensión d en función de la norma elegida. En particular $c = d$ para las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración:

Utilizaremos la norma $\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$. Se tiene

$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^d \left(f^i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_d) - f^i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_d) \right)$$

Aplicando el teorema del valor medio (véase ejercicio 1.8 parte 3) resulta

$$\begin{aligned} & f^i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_d) - f^i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_d) \\ &= (y_j - x_j) \partial_j f^i(z_{ij}) \end{aligned}$$

para algún z_{ij} entre y_j y x_j . Tomando valores absolutos

$$\begin{aligned} & |f^i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_d) - f^i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_d)| \\ &= |y_j - x_j| \cdot |\partial_j f^i(z_{ij})| \leq M|y_j - x_j| \end{aligned}$$

de donde

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leq M \sum_{j=1}^d |y_j - x_j| = M\|y - x\|$$

Finalmente,

$$\|f(y) - f(x)\| = \sum_{i=1}^d |f^i(y) - f^i(x)| \leq dM\|x - y\|$$

■

Observación 1.3. En la anterior demostración se ha considerado la norma $\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$. Para otras normas en \mathbb{R}^d tenemos análogo resultado pues estamos en dimensión finita y todas la normas son equivalentes. Por ejemplo si tomamos la norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2\right)^{1/2}$ tenemos

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leq M \sum_{j=1}^d |y_j - x_j| \leq M \left(\sum_{j=1}^d |y_j - x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^d 1^2\right)^{1/2} = d^{1/2} M \|y - x\|_2$$

y

$$\|f(y) - f(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^d |f^i(y) - f^i(x)|^2 \leq d^2 M^2 \|y - x\|_2^2$$

de donde finalmente

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq dM \|y - x\|_2$$

Para la norma $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} |x_i|$ tenemos también

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leq M \sum_{j=1}^d |y_j - x_j| \leq M d \|y - x\|_\infty$$

y finalmente

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} |f^i(y) - f^i(x)| \leq M d \|y - x\|_\infty$$

El siguiente teorema generaliza el resultado en dimensión 1 del cambio de variable a una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. En el enunciado del teorema aparece el concepto de determinante de una matriz, en particular necesitaremos el determinante de la matriz jacobiana f' . El concepto de determinante y sus propiedades se estudian con detalle en la subsección 3.1.6 del capítulo 3.

Teorema 1.16. Sea A un abierto de \mathbb{R}^d y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función diferenciable con continuidad en el abierto A y tal que $\det f'(a) \neq 0$ en el un punto $a \in A$. Entonces existe un conjunto abierto V que contiene al punto a y un conjunto abierto W que contiene al punto $f(a)$ tales que $f : V \rightarrow W$ tiene una inversa continua $f^{-1} : W \rightarrow V$ que es diferenciable y para todo $y \in W$ satisface

$$(f^{-1})'(y) = \left(f'(f^{-1}(y))\right)^{-1} \quad (1.35)$$

Demostración:

Pongamos $\lambda = Df(a)$, como $\det f'(a) \neq 0$, λ es no singular y se tiene

$$(D\lambda^{-1} \circ f)(a) = D(\lambda^{-1})(f(a)) \circ Df(a) = \lambda^{-1} \circ Df(a) = Id$$

es decir, $(D\lambda^{-1} \circ f)(a)$ es la aplicación idéntica. Si el teorema es cierto para $\lambda^{-1} \circ f$ será cierto para f , en efecto la inversa de f será $(\lambda^{-1} \circ f)^{-1} \circ \lambda^{-1}$ (véase al respecto el ejercicio 1.10). Podemos suponer por lo tanto que $\lambda = Df(a)$ es la aplicación idéntica.

1. Siempre que $f(a+h) = f(a)$ tendremos

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|h\|}{\|h\|} = 1$$

Por otra parte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0$$

por lo tanto existirá un entorno U_1 de a donde $f(x) \neq f(a)$ para todo $x \in U_1$ distinto de a .

2. Puesto que f es diferenciable con continuidad tendremos un entorno U_2 de a en el que

$$\det f'(x) \neq 0$$

para todo $x \in U_2$.

3. Y también existirá un entorno U_3 en el que

$$|\partial_j f^i(x) - \partial_j f^i(a)| < \frac{1}{2c}$$

para todo $i, j = 1, \dots, d$ y para todo $x \in U_3$ y donde c es la constante en (1.34)

4. Llamemos U al entorno de a , $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ y sea $g(x) = f(x) - x$. Tenemos en para todo $x \in U$, $Dg(a) = Df(a) - Id = 0$, es decir $Dg(a)$ es la aplicación nula de modo que $\partial_i g^j(a) = 0$ y

$$|\partial_j g^i(x)| = |\partial_j g^i(x) - \partial_j g^i(a)| = |\partial_j f^i(x) - \partial_j f^i(a)| < \frac{1}{2c}$$

Aplicando el resultado del lema 1.2, para $x, y \in U$

$$\|g(x) - g(y)\| = \|f(x) - x - (f(y) - y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

Como

$$\|x - y\| - \|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - x - (f(y) - y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

obtenemos

$$\|x - y\| \leq 2\|f(x) - f(y)\| \quad (1.36)$$

para todo $x, y \in U$. Esto nos dice que la aplicación $f|_U$ es inyectiva. Es decir $f|_U$ es biyectiva de U en $f(U)$.

5. El conjunto $f(U) = V$ es abierto: Sea $y_1 \in V$ veamos que existe un entorno V_1 de y_1 tal que $V_1 \subset V$. Por el punto anterior de la demostración sabemos que existe un único $x_1 \in U$ tal que $y_1 = f(x_1)$. Sea U_1 un entorno acotado de x_1 tal que $\overline{U_1} \subset U$ y sea $\Gamma_1 = \partial U_1$ la frontera de U_1 . Γ_1 es un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^d por lo tanto compacto, puesto que f es continua la imagen $f(\Gamma_1)$ es un conjunto compacto. Sea $\sigma_1 = \frac{1}{2}d(y_1, f(\Gamma_1))$ y sea $V_1 = B(y_1, \sigma_1)$. Tendremos si $y \in V_1$ para $x \in \Gamma_1$

$$2\sigma_1 \leq \|y_1 - f(x)\| = \|y_1 - y\| + \|y - f(x)\|$$

como $\|y_1 - y\| < \sigma_1$ y

$$\sigma_1 \leq \frac{\|y_1 - y\|}{2} + \frac{\|y - f(x)\|}{2} < \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\|y - f(x)\|}{2}$$

resulta

$$\sigma_1 < \|y - f(x)\|$$

Sea ahora la función

$$\varphi : x \in A \rightarrow \varphi(x) = \|y - f(x)\|^2 \in \mathbb{R}$$

φ es continua y alcanza por lo tanto un mínimo en el compacto $\overline{U_1}$. Como además es

$$\varphi(x_1) = \|y - y_1\|^2 < \sigma_1^2$$

y

$$\varphi(x) = \|y - f(x)\|^2 > \sigma_1^2$$

para todo $x \in \Gamma_1$, por lo tanto el mínimo se alcanza en un punto interior $x_2 \in U_1$ y deberá ser $D\varphi(x_2) = 0$ (véase comentario 1.2). Ahora como $D(y - f)(x_2) = -Df(x_2)$ (véase ejercicio 1.11 para el cálculo detallado)

$$D\varphi(x_2)(x) = -2(y - f(x_2), Df(x_2)(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Como $Df(x_2) \neq 0$, tendrá que ser $y = f(x_2)$. Como y era un elemento cualquiera de V_1 tendremos $y \in f(U_1)$ luego $V_1 \subset f(U_1) \subset V$.

6. Hemos visto ya que la función $f|_U : U \rightarrow V = f(U)$ tiene inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ (punto 4 de la demostración). La expresión (1.36) se puede escribir

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\| \quad (1.37)$$

Esto demuestra que f^{-1} es continua. Vamos a ver que la inversa es diferenciable y que

$$Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$$

Sea $\mu = Df(x)$. Queremos demostrar que f^{-1} es diferenciable en $y = f(x)$ y que su diferencial en y es μ^{-1} . Sean $y = f(x)$ e $y_1 = f(x_1)$ llamando φ a la expresión

$$\varphi(x_1 - x) = f(x_1) - f(x) - \mu(x_1 - x) \quad (1.38)$$

Tenemos

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{\|\varphi(x_1 - x)\|}{\|x_1 - x\|} = 0$$

y aplicando μ^{-1} a cada lado de la expresión 1.38

$$\mu^{-1}\varphi(x_1 - x) = \mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) - (x_1 - x)$$

que podemos escribir de la forma

$$-\mu^{-1}\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)) = f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y) - \mu^{-1}(y_1 - y)$$

Tendremos

$$\begin{aligned} & \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y) - \mu^{-1}(y_1 - y)\|}{\|y_1 - y\|} \\ &= \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\|\mu^{-1}\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|} \\ &\leq M \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|} \end{aligned}$$

donde M es la constante que verifica $\mu^{-1}(z) \leq M\|z\|$ para todo z de \mathbb{R}^d . Por tanto basta demostrar

$$\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|} = 0$$

Finalmente observando

$$\begin{aligned} & \frac{\|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|} \\ &= \frac{\|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\|} \cdot \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\|}{\|y_1 - y\|} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta por una parte que, puesto que f^{-1} es continua, $y_1 \rightarrow y$ implica $f^{-1}(y_1) \rightarrow f^{-1}(y)$ por lo que el primer factor tiene como límite 0 y por otra parte el segundo factor es menor que 2. Resultando

$$0 \leq \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\|}{\|y_1 - y\|} \leq 2 \lim_{f^{-1}(y_1) \rightarrow f^{-1}(y)} \frac{\|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\|} = 0$$

■

Ejercicios del Capítulo 1

- 1.1.** Verificar que la norma l_1 y la norma l_∞ son efectivamente una norma en \mathbb{R}^d .
- 1.2.** Verificar que la norma L^1 y la norma L^∞ son efectivamente una norma en $C[a, b]$
- 1.3.** Demostrar que la aplicación T siguiente

$$\begin{aligned} T : F &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}; F) \\ x &\rightarrow \varphi_x \end{aligned}$$

donde $\varphi_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ es la aplicación que a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ le asocia la aplicación $\varphi_x : \lambda \rightarrow \lambda x$, es una isometría biyectiva.

- 1.4.** Sea f una aplicación como en la definición 1.11. Sean $\lambda : E \rightarrow F$ y $\mu : E \rightarrow F$ dos aplicaciones lineales continuas verificando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \mu(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Demostrar que $\lambda = \mu$

- 1.5.** Sea f una aplicación diferenciable en el punto a . Demostrar que f es continua en a .
- 1.6.** Demostrar (1.9).
- 1.7.** Sean E_1, \dots, E_n y F espacios normados y consideremos la función

$$\begin{aligned} T : E_1 \times \dots \times E_n &\rightarrow F \\ (v_1, \dots, v_n) &\rightarrow T(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

multilineal continua.

Demostrar que T es diferenciable y se tiene

$$\begin{aligned} DT(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) &= T(h_1, a_2, \dots, a_n) + T(a_1, h_2, \dots, a_n) \\ &\quad + \dots + T(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n) \end{aligned}$$

- 1.8.** Este ejercicio es el teorema del valor medio para funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y que se utiliza en el siguiente ejercicio (1.9)

Demostrar:

- Sea f una función real $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f tiene un máximo relativo en un punto $x \in]a, b[$ y existe $f'(x)$ entonces $f'(x) = 0$. Análogamente si f tiene un mínimo relativo en un punto $x \in]a, b[$ y existe $f'(x)$ entonces $f'(x) = 0$.

2. Si f y g son funciones reales continuas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, diferenciables en $]a, b[$, existe un punto $x \in]a, b[$ en el cual

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x)$$

3. Si f es una función real continua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, diferenciable en $]a, b[$, existe un punto $x \in]a, b[$ en el cual

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x)$$

1.9. Sea $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función n veces derivable con continuidad. Demostrar la siguiente fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} v(b) = & v(a) + v'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}v''(a)(b-a)^2 + \dots \\ & + \frac{1}{(n-1)!}v^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}v^{(n)}(a+\theta b)(b-a)^n \quad 0 \leq \theta \leq 1 \end{aligned}$$

1.10. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ diferenciable y $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}^d$. Tendremos $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$. Demostrar que si $g \circ f$ tiene inversa y g tiene inversa entonces f tiene inversa y $f^{-1} = (g \circ f)^{-1} \circ g$

1.11. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $g : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por $g(x) = y - f(x)$ donde $y \in \mathbb{R}^d$ es un vector fijo. Sea $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = (x, x) = \|x\|^2$. Calcular la diferencial $D(h \circ g)(x)$.

Capítulo 2

Integración en \mathbb{R}^d

En este capítulo recogemos las nociones básicas de cálculo integral en \mathbb{R}^d necesarias para entender el resto del libro. La referencia básica es [6].

2.1. Definiciones básicas

Vamos a construir la noción de integral de funciones definidas en un conjunto Q de \mathbb{R}^d . Primeramente consideraremos el caso en el que Q es un d -rectángulo, es decir

$$Q = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^d, b^d] \subset \mathbb{R}^d$$

Empezamos definiendo una partición en un d -rectángulo.

Definición 2.1. Una partición $[a^1, b^1] \times \cdots \times [a^d, b^d]$ en un d -rectángulo Q de \mathbb{R}^d es una colección $P = \{P_1, \dots, P_d\}$ de particiones P_i ; $i = 1, \dots, d$ donde cada P_i es una partición del intervalo $[a^i, b^i]$.

Recordemos que una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$ es una sucesión t^0, \dots, t^k donde $a = t^0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t^k = b$.

Ejemplo en \mathbb{R}^2 :

Sea $Q = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \subset \mathbb{R}^2$ y sea $P_1 = \{t^0, t^1, t^2, t^3\}$ una partición de $[a^1, b^1]$ y $P_2 = \{s^0, s^1, s^2, s^3, s^4\}$ una partición de $[a^2, b^2]$ entonces $P = \{P_1, P_2\}$ divide al rectángulo Q en $3 \times 4 = 12$ subrectángulos de la forma

$$[t^i t^{i+1}] \times [s^j, s^{j+1}] \quad i = 0, \dots, 2; j = 0, \dots, 3$$

En general si P_i divide a $[a^i, b^i]$ en N_i subintervalos entonces $P = \{P_1, \dots, P_d\}$ divide a $[a^1, b^1] \times \cdots \times [a^d, b^d]$ en $N_1 \cdot N_2 \cdots N_d$ subrectángulos. Utilizaremos la siguiente definición de volumen de un d -rectángulo:

Definición 2.2. Dado un d -rectángulo en \mathbb{R}^d , $Q = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^d, b^d]$ se define el volumen $V(Q)$ de Q mediante

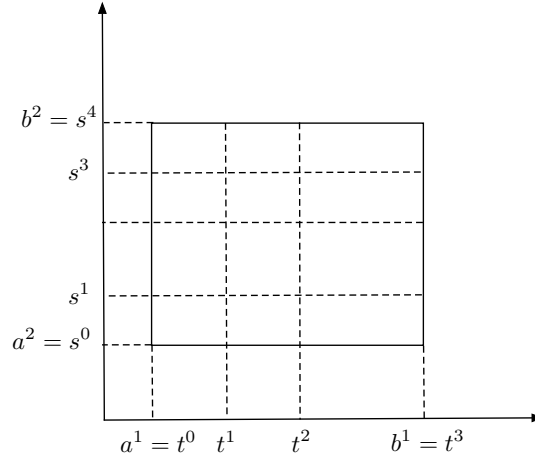


Figura 2.1 Partición de un rectángulo en \mathbb{R}^2

$$V(Q) = (b^1 - a^1) \cdot (b^2 - a^2) \cdot \dots \cdot (b^d - a^d) \quad (2.1)$$

2.1.1. Construcción de la integral de una función acotada

Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ un d -rectángulo y $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea ahora una partición de Q . Para cada subrectángulo S de la partición P consideremos los valores

$$m_S(f) = \inf\{f(x); x \in S\}$$

$$M_S(f) = \sup\{f(x); x \in S\}$$

y sea $V(S)$ el volumen del subrectángulo S . Llamaremos suma inferior $L(f, P)$ de la función f correspondiente a la partición P a

$$L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f) V(S) \quad (2.2)$$

y llamaremos suma superior $U(f, P)$ de la función f correspondiente a la partición P a

$$U(f, P) = \sum_{S \in P} M_S(f) V(S) \quad (2.3)$$

Evidentemente tenemos

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

En realidad se cumple una afirmación más fuerte, en efecto

Definición 2.3. Una partición P' se dice que es más fina que otra partición P si todo subrectángulo de P' está contenido en un subrectángulo de P .

Lema 2.1. Sea P' una partición más fina que otra partición P , entonces

$$L(f, P) \leq L(f, P') \quad (2.4)$$

$$U(f, P') \leq U(f, P) \quad (2.5)$$

Demostración:

Haremos la demostración para las sumas inferiores (desigualdad 2.4). Cada subrectángulo S de P se divide en varios subrectángulos $S_1, S_2, \dots, S_\alpha$ de P' de manera que

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2) + \dots + V(S_\alpha)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} m_S(f)V(S) &= m_S V(S_1) + m_S V(S_2) + \dots + m_S V(S_\alpha) \\ &\leq m_{S_1} V(S_1) + m_{S_2} V(S_2) + \dots + m_{S_\alpha} V(S_\alpha) \end{aligned}$$

sumando para toda S resulta

$$L(f, P) \leq L(f, P')$$

La demostración para las sumas superiores (desigualdad 2.5) es análoga. ■

Corolario 2.1. Si P y P' son dos particiones cualesquiera entonces

$$L(f, P') \leq U(f, P) \quad (2.6)$$

Demostración:

Sea P'' una partición más fina que P y que P' , tendremos

$$L(f, P') \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P)$$

El conjunto de las sumas inferiores $L(f, P)$ cuando considero todas las posibles particiones del rectángulo Q está acotado superiormente. Llamemos $\sup\{L(f, P)\}$ al extremo superior. El conjunto de las sumas superiores $U(f, P)$ está acotado inferiormente y llamaremos $\inf\{U(f, P)\}$ al extremo inferior. Estamos en condiciones de dar la siguiente definición:

Definición 2.4. Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ un d -rectángulo y sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$$

se dice que la función es integrable según Riemann en el rectángulo Q y este valor se designa mediante

$$\int_Q f$$

o bien con una notación más folklórica

$$\int_Q f(x^1, x^2, \dots, x^d) dx^1 dx^2 \dots dx^d$$

Un criterio de integrabilidad nos lo da el siguiente teorema.

Teorema 2.1. Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ un d -rectángulo y sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon \quad (2.7)$$

Demostración:

- Supongamos que se verifica (2.7), es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) < L(f, P) + \varepsilon$$

y supongamos por reducción al absurdo que

$$\sup\{L(f, P)\} < \inf\{U(f, P)\}$$

ello implicaría que para toda partición P existe un $\delta > 0$ tal que

$$L(f, P) + \delta < U(f, P)$$

tomando $\varepsilon = \delta$ tenemos una contradicción. De modo que

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$$

y la función es integrable.

- Recíprocamente supongamos que f es integrable, es decir

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = I$$

dicho de otro modo, para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$I - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y existe una partición P' tal que

$$U(f, P') - I < \frac{\varepsilon}{2}$$

sumando obtenemos

$$U(f, P') - L(f, P) < \varepsilon$$

Sea ahora una partición P'' más fina que P y que P' , tenemos

$$U(f, P'') \leq U(f, P')$$

$$-L(f, P'') \leq -L(f, P)$$

finalmente

$$U(f, P'') - L(f, P'') \leq U(f, P') - L(f, P) < \varepsilon$$

por lo que hemos obtenido la condición de integrabilidad (2.7). ■

Ejemplos

- Ejemplo 1: Integral de una función constante.

Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ un d -rectángulo y

$$\begin{aligned} f : Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tenemos que f es integrable, en efecto para cada partición P y cada subrectángulo S de la partición tendremos $m_S(f) = M_S(f) = c$ por lo tanto para toda partición P

$$L(f, P) = \sum_{S \in P} cV(S) = U(f, P)$$

en consecuencia f es integrable y la integral de f en Q es

$$\int_Q f = c \sum_{S \in P} V(S) = cV(Q)$$

- Ejemplo 2: Este es un contraejemplo, es decir una función que no es integrable según Riemann.

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, y \rightarrow f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

f no es integrable en el sentido de Riemann. En efecto, en cualquier subrectángulo S de cualquier partición P existen puntos (x, y) en los que x es racional y puntos en los que x es irracional. En consecuencia $m_S(f) = 0$ y $M_S(f) = 1$ y por tanto

para toda partición P

$$L(f, P) = \sum_{S \in P} 0 \cdot V(S) = 0$$

$$U(f, P) = \sum_{S \in P} 1 \cdot V(S) = V([0, 1] \times [0, 1]) = 1$$

- Ejemplo 3: Una función constante a trozos.

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, y \rightarrow f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se deja como ejercicio 2.1 la demostración de que f es integrable y la integral vale $1/2$.

A continuación vemos algunas propiedades de la integral.

Propiedad 2.1. Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ un d -rectángulo y sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y sea $g = f$ excepto en un conjunto finito de puntos. Veamos que g es integrable y que $\int_Q f = \int_Q g$.

Demostración:

Tomamos particiones de modo que dejen aislados los puntos de no coincidencia con subrectángulos de diámetro ε y pasamos al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Propiedad 2.2. Sea Q un d -rectángulo de \mathbb{R}^d y sean $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Se verifica

a) Para toda partición P del rectángulo Q

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P)$$

$$U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P)$$

b) $f + g$ es integrable y

$$\int_Q (f + g) = \int_Q f + \int_Q g$$

Demostración:

a) Tenemos para cada partición P en subrectángulos S (véase comentario 2.1)

$$\begin{aligned} \inf\{f(x); x \in S\} + \inf\{g(x); x \in S\} &\leq \inf\{(f+g)(x); x \in S\} \\ \sup\{(f+g)(x); x \in S\} &\leq \sup\{f(x); x \in S\} + \sup\{g(x); x \in S\} \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} m_S(f) + m_S(g) &\leq m_S(f+g) \\ M_S(f+g) &\leq M_S(f) + M_S(g) \end{aligned}$$

en consecuencia multiplicando por $V(S)$ y sumando para todo S de la partición P

$$\begin{aligned} L(f, P) + L(g, P) &\leq L(f+g, P) \\ U(f+g, P) &\leq U(f, P) + U(g, P) \end{aligned}$$

b) Como f y g son integrables para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_1 y una partición P_2 y tal que

$$\begin{aligned} U(f, P_1) - L(f, P_1) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ U(g, P_2) - L(g, P_2) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

y tomando una partición P más fina que P_1 y P_2

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ U(g, P) - L(g, P) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sumando

$$U(f, P) + U(g, P) - (L(f, P) + L(g, P)) < \varepsilon$$

teniendo en cuenta la parte (a)

$$U(f+g, P) - L(f+g, P) < \varepsilon$$

por tanto $f+g$ es integrable.

Ahora para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$\begin{aligned} \int_Q f - L(f, P) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \int_Q g - L(g, P) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sumando

$$\int_Q f + \int_Q g - (L(f, P) + L(g, P)) < \varepsilon$$

teniendo en cuenta la parte (a)

$$\int_Q f + \int_Q g - L(f+g, P) < \varepsilon$$

Por otra parte también para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - \int_Q f < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(g, P) - \int_Q g < \frac{\varepsilon}{2}$$

sumando

$$U(f, P) + U(g, P) - \left(\int_Q f + \int_Q g \right) < \varepsilon$$

teniendo en cuenta la parte (a)

$$U(f+g, P) - \left(\int_Q f + \int_Q g \right) < \varepsilon$$

juntando resultados

$$U(f+g, P) - \varepsilon < \left(\int_Q f + \int_Q g \right) < \varepsilon + L(f+g, P)$$

y también

$$\int_Q (f+g) - \varepsilon < \left(\int_Q f + \int_Q g \right) < \varepsilon + \int_Q (f+g)$$

finalmente pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$\int_Q (f+g) = \int_Q f + \int_Q g$$

■

Comentario 2.1. Hemos utilizado la siguiente relación al tomar ínfimos y supremos de una suma:

Si ponemos $\inf f = \inf\{f(x); x \in S\}$, $\inf g = \inf\{g(x); x \in S\}$ y $\inf(f+g) = \inf\{(f+g)(x); x \in S\}$ tenemos para todo $x \in S$

$$\inf f \leq f(x)$$

$$\inf g \leq g(x)$$

por tanto

$$\inf f + \inf g \leq f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

tomando el ínf para todo x obtenemos

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f+g)$$

Y análogamente poniendo $\sup f = \sup\{f(x); x \in S\}$, $\sup g = \sup\{g(x); x \in S\}$ y $\sup(f+g) = \sup\{(f+g)(x); x \in S\}$ obtenemos para todo $x \in S$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$$

de donde

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

Propiedad 2.3. Sea Q un d -rectángulo de \mathbb{R}^d y sean $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Dada una partición P de Q , f es integrable si y solo si para cada subrectángulo S de la partición la función $f|_S$, restricción de f a S , es integrable y en este caso

$$\int_Q f = \sum_{S \in P} \int_S f|_S$$

Demostración:

Tenemos $f = \sum_{S \in P} f|_S$ (donde asumimos que $f|_S = 0$ en los puntos que no pertenecen a S). Si las restricciones $f|_S$ son integrables entonces utilizando la propiedad anterior 2.2

$$\int_Q f = \sum_{S \in P} \int_Q f|_S = \sum_{S \in P} \int_S f|_S$$

Recíprocamente, si f es integrable en Q , está claro que $f|_S$ es integrable en S pues para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

y considerando la restricción $P|_S$ de P a S tendremos

$$U(f|_S, P|_S) - L(f|_S, P|_S) < \varepsilon$$

lo que prueba que $f|_S$ es integrable para toda S . ■

Propiedad 2.4. Sea Q un d -rectángulo de \mathbb{R}^d y sean $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrables con $f \leq g$, entonces

$$\int_Q f \leq \int_Q g \tag{2.8}$$

Demostración:

Tenemos para cada subrectángulo S de una partición P

$$m_S(f) \leq m_S(g) \Rightarrow L(f, P) \leq L(g, P)$$

tomando el supremo para toda partición P obtenemos (2.8) ■

Propiedad 2.5. Sea Q un d -rectángulo de \mathbb{R}^d y sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrable.

a) Demostrar que $-f$ es integrable y

$$\int_Q (-f) = - \int_Q f \quad (2.9)$$

b) Para todo $c \in \mathbb{R}$ demostrar que cf es integrable y

$$\int_Q cf = c \int_Q f \quad (2.10)$$

Demostración:

a) Tenemos por las propiedades del supremo y del ínfimo de un conjunto de números (véase comentario 2.2)

$$\begin{aligned} M_S(f) &= \sup\{f(x); x \in S\} = -\inf\{-f(x); x \in S\} = -m_S(-f) \\ m_S(f) &= \inf\{f(x); x \in S\} = -\sup\{-f(x); x \in S\} = -M_S(-f) \end{aligned}$$

Por tanto

$$U(f, P) = \sum_{S \in P} M_S(f)V(S) = - \sum_{S \in P} m_S(-f)V(S) = -L(-f, P)$$

y

$$L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f)V(S) = - \sum_{S \in P} M_S(-f)V(S) = -U(-f, P)$$

de donde

$$U(f, P) - L(f, P) = -L(-f, P) - (-U(-f, P)) = U(-f, P) - L(-f, P)$$

por tanto si f es integrable, para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(-f, P) - L(-f, P) = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

y $-f$ es integrable. Además para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - \varepsilon < \int_Q f < \varepsilon + L(f, P)$$

multiplicando por -1

$$\begin{aligned}
 -U(f, P) + \varepsilon &> - \int_Q f > -\varepsilon - L(f, P) \quad \text{o bien} \\
 L(-f, P) + \varepsilon &> - \int_Q f > -\varepsilon + U(-f, P) \quad \text{reordenando} \\
 U(-f, P) - \varepsilon &< - \int_Q f < \varepsilon + L(-f, P)
 \end{aligned}$$

de modo que se verifica (2.9)

- b) Por la parte (a) basta probar el caso $c \geq 0$. Tenemos si $c = 0$ es inmediato. Si $c > 0$ $M_S(cf) = cM_S(f)$ y $m_S(cf) = cm_S(f)$ de modo que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/c$ de modo que

$$U(cf, P) - L(cf, P) = cU(f, P) - cL(f, P) = c(U(f, P) - L(f, P)) < \varepsilon$$

Esto prueba que cf es integrable. Además

$$U(cf, P) - \varepsilon < \int_Q cf < L(cf, P) + \varepsilon$$

y también

$$cU(f, P) - \varepsilon < \int_Q cf < cL(f, P) + \varepsilon$$

pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$c \int_Q f \leq \int_Q cf \leq c \int_Q f$$

de modo que se verifica (2.10)

■

Comentario 2.2. Sea A un conjunto de números reales y sea $M = \sup\{x; x \in A\}$ entonces

$$\sup\{x; x \in A\} = -\inf\{-x; x \in A\}$$

En efecto, $M = \sup\{x; x \in A\}$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $M - \varepsilon \leq x$ por otra parte $s = \inf\{-x; x \in A\}$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $-x \leq s + \varepsilon$ comparando con $-x \leq -M + \varepsilon$ resulta $M = -s$.

Propiedad 2.6. Sea Q un d -rectángulo de \mathbb{R}^d y sean $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces la función valor absoluto $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f| \tag{2.11}$$

Demostración:

Primero veamos que $|f|$ es integrable. En cada subrectángulo S de una partición P de Q , para todo $x \in S$ y para todo $y \in S$ tenemos

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

Como (véase el ejercicio 2.2)

$$\sup_{x \in S, y \in S} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in S} f(x) - \inf_{y \in S} f(y) = M_S(f) - m_S(f)$$

resulta

$$\sup_{x \in S, y \in S} (||f(x)| - |f(y)||) = \sup_{x \in S} |f(x)| - \inf_{y \in S} |f(y)| = M_S(|f|) - m_S(|f|)$$

de modo que

$$M_S(|f|) - m_S(|f|) \leq M_S(f) - m_S(f)$$

ahora bien si f es integrable para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

y por tanto

$$U(|f|, P) - L(|f|, P) < U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

por lo que $|f|$ es integrable.

Finalmente utilizando la propiedad 2.4) teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} f &\leq |f| \\ -f &\leq |f| \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \int_Q f &\leq \int_Q |f| \\ -\int_Q f &\leq \int_Q |f| \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|$$

■

Propiedad 2.7. Sea Q un d -rectángulo cerrado de \mathbb{R}^d y sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f es integrable.

Demostración:

Q es un rectángulo cerrado de \mathbb{R}^d por lo que es un conjunto compacto de modo que f es uniformemente continua en Q , es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Consideremos ahora una partición P de Q tal que para todo subrectángulo S de la partición y para todo $x, y \in S$ tengamos $\|x - y\| < \delta$. Tendremos

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{S \in P} M_S(f)V(S) - \sum_{S \in P} m_S(f)V(S) \\ &= \sum_{S \in P} (M_S(f) - m_S(f))V(S) \leq \sum_{S \in P} \varepsilon V(S) = \varepsilon V(Q) = \varepsilon' \end{aligned}$$

■

En el ejercicio 2.3 se ilustra la propiedad anterior con un ejemplo.

Sumas de Riemann

La integral de Riemann se puede entender como límite de sumas. En efecto llamaremos suma de Riemann correspondiente a una función f y a una partición P a la expresión

$$\mathcal{R}(f, \xi_i, P) = \sum_{S \in P; \xi_i \in S} f(\xi_i)V(S) \quad (2.12)$$

Sea f integrable en Q y llamemos $I = \int_Q f$. Tendremos

$$L(f, P) \leq \mathcal{R}(f, \xi_i, P) \leq U(f, P)$$

Consideremos ahora una sucesión $(P_n)_n$ de particiones tales que $V(S_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $S_n \in P_n$. Vamos a ver que

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(f, \xi_i, P)$$

Tendremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ entonces

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$$

Como

$$L(f, P_n) \leq I \leq U(f, P_n)$$

sumando $-L(f, P_n)$

$$0 \leq I - L(f, P_n) \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$$

obtenemos

$$I \leq L(f, P_n) + \varepsilon$$

y sumando $-U(f, P_n)$

$$-\varepsilon < L(f, P_n) - U(f, P_n) \leq I - U(f, P_n) \leq 0$$

obtenemos

$$-\varepsilon + U(f, P_n) \leq I$$

juntando resultados

$$-\varepsilon + U(f, P_n) \leq I \leq L(f, P_n) + \varepsilon$$

de donde

$$-\varepsilon + \mathcal{R}(f, \xi_i, P_n) \leq I \leq \mathcal{R}(f, \xi_i, P) + \varepsilon$$

es decir

$$|I - \mathcal{R}(f, \xi_i, P_n)| < \varepsilon$$

2.1.2. Funciones integrables

Hemos visto que las funciones continuas en un d -rectángulo cerrado son integrables en el sentido de Riemann. Sin embargo hay funciones que no son continuas en todo el rectángulo y que pueden ser integrables. Basta por ejemplo elegir una función que difiera de una función continua en un número finito de puntos (véase la propiedad 2.1) o incluso discontinua en infinitos puntos como en el ejemplo 3. Veremos a continuación que una función es integrable según Riemann si y solo si es continua en casi todas partes. Empezaremos definiendo con precisión este concepto.

Definición 2.5. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^d se dice que tiene medida cero (d -dimensional) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento numerable $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ de A por rectángulos cerrados tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \varepsilon \quad (2.13)$$

Observaciones 2.1. -

- Sea $B \subset A$. Si A tiene medida cero entonces B tiene medida cero.
- En la definición pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos.
- Si A es un conjunto numerable, es decir $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ entonces A tiene medida cero. En efecto, para $\varepsilon > 0$ podemos elegir para cada punto a_i de A un subrectángulo U_i que contenga a A_i y de volumen $V(U_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Tendremos

$$V(A) < \sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

Por ejemplo el conjunto de los números racionales tiene medida nula.

- Si el recubrimiento de A en la definición de conjunto de medida cero es finito diremos que el conjunto A tiene contenido cero.
- Un conjunto compacto de medida cero tiene contenido cero. Un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ no tiene medida cero. Véase el ejercicio 2.4.

Teorema 2.2. Sea $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \dots$ y cada A_i tiene medida cero entonces A tiene medida cero.

Demostración:

Para cada A_i existe un recubrimiento $\{U_{i1}, U_{i2}, \dots\}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} V(U_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

entonces la colección de todos los U_{ij} es un recubrimiento de A que podemos ordenar siguiendo las diagonales en la matriz

$$\begin{array}{cccc} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & \dots \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

según la sucesión $\{U_1 = U_{11}, U_2 = U_{21}, U_3 = U_{12}, U_4 = U_{31}, U_5 = U_{22}, U_6 = U_{13}, \dots\}$. Tendremos

$$\sum_{i=1}^n V(U_k) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

■

Oscilación de una función

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con A un conjunto cerrado de \mathbb{R}^d . Sea $a \in A$ y consideremos

$$M(a, f, \delta) = \sup\{f(x); x \in A, \|x - a\| < \delta\}$$

$$m(a, f, \delta) = \inf\{f(x); x \in A, \|x - a\| < \delta\}$$

Definimos la oscilación $O(f, a)$ de f en el punto a mediante

$$O(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)) \quad (2.14)$$

Propiedad 2.8. Una función acotada f es continua en $a \in A$ si y solo si $O(f, a) = 0$

Demostración:

Una función es continua en $a \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, que es lo mismo que

$$f(x) - f(a) < \varepsilon$$

y

$$f(a) - f(x) < \varepsilon$$

Tomando el supremo para todo x con $\|x - a\| < \delta$ y teniendo en cuenta que $\sup_x(-f(x)) = -\inf_x(f(x))$ resulta

$$M(a, f, \delta) - f(a) < \varepsilon$$

$$f(a) - m(a, f, \delta) < \varepsilon$$

sumando

$$M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ y por tanto $O(f, a) = 0$.

Recíprocamente si $O(f, a) = 0$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < \varepsilon$ y por tanto para todo x, y tales que $\|x - a\| < \delta$ y $\|y - a\| < \delta$ tendremos

$$f(x) - f(a) \leq M(a, f, \delta) - f(a)$$

y también

$$f(a) - f(y) \leq f(a) - m(a, f, \delta)$$

sumando

$$f(x) - f(y) \leq M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)$$

del mismo modo intercambiando x e y

$$f(y) - f(x) \leq M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)$$

por tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < \varepsilon$$

y en particular $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

■

Propiedad 2.9. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\varepsilon > 0$ entonces el conjunto $\{x \in A; O(f, x) \geq \varepsilon\}$ es un conjunto cerrado.

Demostración:

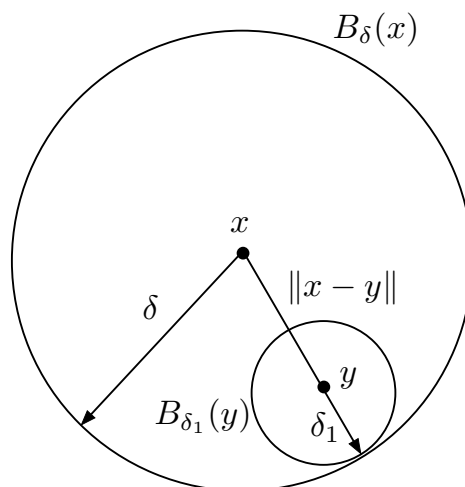


Figura 2.2 Disposición de entornos

Sea $B = \{x \in A; O(f, x) \geq \varepsilon\}$. Queremos ver que el complementario B^c de B es abierto. Si $x \in B^c$ entonces o $x \notin A$ o bien $O(f, x) < \varepsilon$. En el primer caso puesto que A es cerrado, existe una bola abierta C que contiene a x tal que $C \subset A^c \subset B^c$. En el segundo caso existe un $\delta > 0$ tal que $M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta) < \varepsilon$. Hemos de demostrar que existe una bola de centro x para la que todos sus puntos y verifican $O(f, y) < \varepsilon$. Sea $B_\delta(x)$ una bola abierta de centro x y radio δ . Sea $y \in B_\delta(x)$. Sea $\delta_1 = \delta - \|x - y\|$. Entonces para todo $z \in B_{\delta_1}(y)$ tenemos que

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| \leq \delta_1 + \|y - x\| = \delta$$

por lo tanto $z \in B_\delta(x)$. Puesto que

$$M(y, f, \delta_1) \leq M(x, f, \delta)$$

y

$$m(x, f, \delta) \leq m(y, f, \delta_1)$$

tendremos

$$M(y, f, \delta_1) - m(y, f, \delta_1) \leq M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta) < \varepsilon$$

por consiguiente $O(f, y) < \varepsilon$ y B^c es abierto. ■

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que una función es integrable si y solo si es continua salvo eventualmente en un conjunto de puntos de medida nula. Empezamos con un lema.

Lema 2.2. Sea Q un d -rectángulo cerrado y sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada tal que $O(f, x) < \varepsilon$ para todo $x \in Q$. Entonces existe una partición P de Q verificando

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon V(Q)$$

Demostración:

Para todo $x \in Q$ existe un rectángulo U_x que contiene a x en su interior y tal que

$$M_{U_x}(f) - m_{U_x}(f) < \varepsilon$$

El conjunto de los U_x recubre Q y como Q es compacto existe un recubrimiento finito $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$ que recubre Q . Podemos considerar ahora una partición P de Q tal que cada subrectángulo de P esté contenido en algún U_{x_i} . Entonces para esta partición

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{S \in P} (M_S(f) - m_S(f)) V(S) \\ &< \sum_{S \in P} \varepsilon V(S) = \varepsilon V(Q) \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3. Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ un d -rectángulo cerrado y $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea

$$B = \{x \in Q; f \text{ no es continua en } x\}$$

Entonces f es integrable si y solo si B es un conjunto de medida nula.

Demostración:

Supongamos que B tiene medida nula. Sea $\varepsilon > 0$ y consideramos el conjunto

$$B_\varepsilon = \{x \in Q; O(f, x) \geq \varepsilon\}$$

Entonces $B_\varepsilon \subset B$ de modo que B_ε tiene medida nula. Puesto que B_ε es compacto (cerrado y acotado en \mathbb{R}^d) tiene contenido cero. De modo que existe un conjunto finito $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de rectángulos cerrados cuyos interiores recubren B_ε tales que $\sum_{i=1}^n V(U_i) < \varepsilon$. Sea una partición P de Q tal que cada subrectángulo S de P pertenece a uno de los dos grupos siguientes

1. \mathcal{S}_1 que consiste en los subrectángulos S tales que $S \subset U_i$ para algún i .
2. \mathcal{S}_2 que consiste en los subrectángulos S tales que $S \cap B_\varepsilon = \emptyset$.

En la figura 2.3 la partición P aparece indicada con líneas punteadas y B_ε es la línea curvada de trazo grueso. Como f es acotada $|f(x)| < M$ para $x \in Q$. Entonces

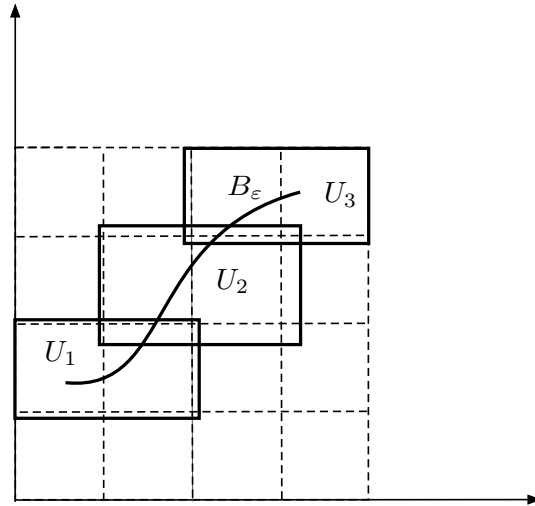


Figura 2.3 Partición P y B_ε

$$M_S(f) - m_S(f) < 2M$$

y por tanto

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_1} (M_S(f) - m_S(f))V(S) < 2M \sum_{i=1}^n V(U_i) < 2M\varepsilon$$

Por otra parte, si $S \in \mathcal{S}_2$ tendremos $O(f, x) < \varepsilon$ para $x \in S$. El lema 2.2 nos dice que existe una partición P' más fina que P tal que

$$\sum_{S' \subset S} (M_{S'}(f) - m_{S'}(f))V(S') < \varepsilon V(S)$$

y esto es cierto para toda $S \in \mathcal{S}_2$. De modo que finalmente

$$\begin{aligned} U(f, P') - L(f, P') &= \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_1} (M_{S'}(f) - m_{S'}(f))V(S') \\ &+ \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_2} (M_{S'}(f) - m_{S'}(f))V(S') \\ &< 2M\varepsilon + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} \varepsilon V(S) \leq 2M\varepsilon + \varepsilon V(Q) \end{aligned}$$

y por tanto f es integrable.

Recíprocamente supongamos que f es integrable. Puesto que

$$B = B_1 \cup B_{\frac{1}{2}} \cup B_{\frac{1}{3}} \cup \dots$$

bastará demostrar que $B_{\frac{1}{n}}$ tiene medida cero. Demostraremos que en realidad tiene contenido cero.

Sea $\varepsilon > 0$ y P una partición de Q tal que $U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$. Sea \mathcal{S} la colección de subrectángulos S de P que cortan a $B_{\frac{1}{n}}$. Pero si $S \in \mathcal{S}$ entonces $M_S(f) - m_S(f) \geq \frac{1}{n}$. De modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{S \in \mathcal{S}} V(S) &\leq \sum_{S \in \mathcal{S}} (M_S(f) - m_S(f)) V(S) \\ &\leq \sum_{S \in P} (M_S(f) - m_S(f)) V(S) = U(f, P) - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

de donde $\sum_{S \in \mathcal{S}} V(S) \leq \varepsilon$ y por tanto hemos demostrado que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ existe un número finito de rectángulos S que recubren $B_{\frac{1}{n}}$ tales que $\sum_{S \in \mathcal{S}} V(S) \leq \varepsilon$ por tanto $B_{\frac{1}{n}}$ tiene contenido cero. ■

Un corolario inmediato es la siguiente propiedad del producto de dos funciones:

Propiedad 2.10. *Sea f y g dos funciones integrables en un rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^d$. Entonces $f \cdot g$ es integrable.*

Demostración:

Gracias al teorema anterior 2.3

- f es integrable si y solo si $A = \{x \in Q; f \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida nula.
- g es integrable si y solo si $B = \{x \in Q; g \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida nula.

Por tanto el conjunto $C = \{x \in Q; f \cdot g \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida nula pues $C \subset A \cup B$ de modo que $f \cdot g$ es integrable. ■

Integración en conjuntos que no son rectángulos

Vamos a considerar en este apartado la integración en conjunto más generales que los rectángulos. Empezamos definiendo la función característica de un conjunto. Sea $C \subset \mathbb{R}^d$, la función característica de C , $\chi_C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, se define mediante

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin C \\ 1 & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Si $C \subset Q$ para algún rectángulo cerrado Q y $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, definimos

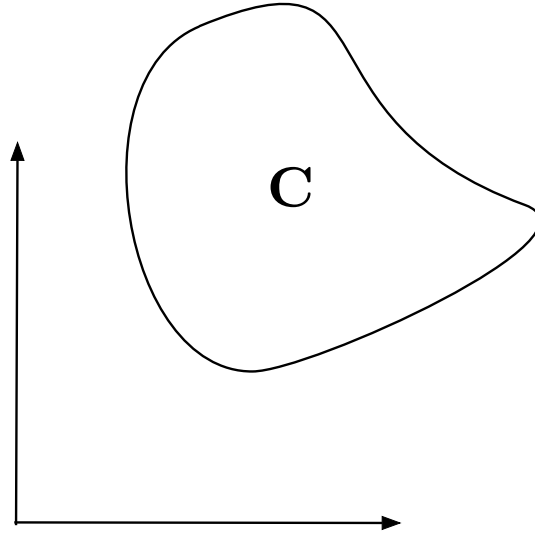


Figura 2.4 Conjunto General

$$\int_C f = \int_Q f \cdot \chi_C$$

suponiendo que f y χ_C sean integrables lo que ocurrirá si f y χ_C son integrables.

Teorema 2.4. *La función $\chi_C : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y solo si la frontera de C tiene medida cero.*

Demostración:

Una función es integrable si y solo si el conjunto de puntos donde no es continua tiene medida cero. Por tanto la función característica χ_C de un conjunto C es integrable si el conjunto de puntos donde no es continua tiene medida cero. Veamos que el conjunto de puntos donde χ_C no es continua es precisamente la frontera de C . En efecto, si $x \in \overset{\circ}{C}$ (interior de C) tendremos $\chi_C(x) = 1$ y existe un entorno de x contenido en C tal que $\chi_C(y) = 1$ para todo punto y de este entorno, por tanto χ_C es continua en $\overset{\circ}{C}$.

Si $x \in Ext(C)$ (exterior de C) $\chi_C(x) = 0$ y existe un de x contenido en $Ext(C)$ tal que $\chi_C(y) = 0$ para todo punto y de este entorno, por tanto χ_C es continua en $Ext(C)$.

Finalmente si $x \in \partial C$ (frontera de C) en todo entorno de x existen puntos de C y del complementario C^c lo que implica que χ_C es discontinua en x .

■

Comentario 2.3. Como la frontera de un conjunto es siempre un conjunto cerrado, si el conjunto es acotado, en \mathbb{R}^d la frontera será un conjunto compacto. Por tanto si la frontera es de medida cero será también de contenido cero.

Definición 2.6. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^d$ acotado cuya frontera tiene medida nula se denomina medible Jordan. La integral $\int_C 1$ se denomina contenido o volumen d -dimensional de C .

En los ejercicios 2.5, 2.6, 2.7 se trabaja con los anteriores conceptos y propiedades.

2.2. Teorema de Fubini

El teorema de Fubini es una herramienta fundamental en el cálculo de integrales pues permite reducir el cálculo de integrales de funciones de varias variables a una secuencia de integrales de una sola variable. Primeramente vamos a ilustrar este teorema con una función de dos variables reales. Consideraremos la integral de una función $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ como la de la figura 2.5

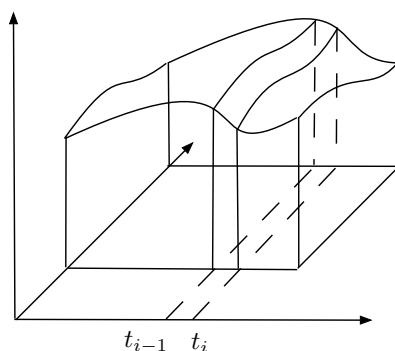


Figura 2.5 Ilustración del Teorema de Fubini

Sea t_0, \dots, t_n una partición de $[a, b]$. Se divide el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ en n bandas mediante los segmentos $t_i \times [c, d]$.

Para cada x definimos la función g_x

$$\begin{aligned} g_x : [c, d] &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow f(x, y) \end{aligned}$$

El área por debajo del gráfico de f y por encima de $x \times [c, d]$ es

$$\int_c^d g_x(y) dy = \int_c^d f(x, y) dy$$

El volumen de la región por debajo de la gráfica de f y por encima de $[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]$ es aproximadamente

$$(t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x, y) dy$$

y esto para cada $x \in [t_{i-1}, t_i]$. Así que podemos decir que

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \sum_{i=1}^n \int_{[t_{i-1}, t_i] \times [c,d]} f$$

es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x, y) dy$$

Estas últimas sumas aparecen en la definición de

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Ahora si definimos

$$h(x) = \int_c^d g_x(y) dy$$

es de esperar que

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b h = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Esto será así si f es continua. En el caso general se presentan dificultades. Por ejemplo si f es discontinua en $x_0 \times [c, d]$, f es integrable en $[a, b] \times [c, d]$ pero $h(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy$ puede no estar definida.

Pasamos ahora a enunciar y demostrar el teorema de Fubini en el caso general. Dada $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ donde Q es un d -rectángulo y f es acotada. Tanto si f es integrable como si no lo es, el extremo superior de todas las sumas inferiores y el extremo inferior de todas las sumas superiores siempre existe y los llamaremos integral inferior e integral superior respectivamente. Utilizaremos la notación:

$L \int_Q f$ integral inferior de f

$U \int_Q f$ integral superior de f

Teorema 2.5. Sea $A \subset \mathbb{R}^r$ y $B \subset \mathbb{R}^s$ un r -rectángulo y un s -rectángulo cerrados y sea $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable.

Para cada $x \in A$ definimos g_x mediante

$$\begin{aligned} g_x : B &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow f(x, y) \end{aligned}$$

Y sea

$$\mathcal{L}(x) = L \int_B g_x = L \int_B f(x, y) dy$$

$$\mathcal{U}(x) = U \int_B g_x = U \int_B f(x, y) dy$$

entonces \mathcal{L} y \mathcal{U} son integrables en A y

$$\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \left(L \int_B f(x, y) dy \right) dx \quad (2.15)$$

$$\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{U} = \int_A \left(U \int_B f(x, y) dy \right) dx \quad (2.16)$$

Comentario 2.4. Si todas las funciones g_x son integrables entonces $\mathcal{L}(x) = \mathcal{U}(x)$ y pondremos

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx \quad (2.17)$$

Demostración:

Sea P_A una partición de A y P_B una partición de B . Unidas originan una partición P de $A \times B$ en la cual cada subrectángulo es de la forma $S = S_A \times S_B$ donde S_A es un subrectángulo de P_A y S_B es un subrectángulo de P_B . Tendremos

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{S \in P} m_S(f) V(S) = \sum_{S_A \in P_A, S_B \in P_B} m_{S_A \times S_B}(f) V(S_A \times S_B) \\ &= \sum_{S_A \in P_A} \left(\sum_{S_B \in P_B} m_{S_A \times S_B}(f) V(S_B) \right) V(S_A) \end{aligned}$$

Ahora bien para todo $x \in S_A$ tenemos

$$\sum_{S_B \in P_B} m_{S_A \times S_B}(f) V(S_B) \leq \sum_{S_B \in P_B} m_{S_B}(g_x) V(S_B) \leq \mathcal{L}(x)$$

En consecuencia tomando el valor inferior para todo $x \in S_A$

$$\sum_{S_B \in P_B} m_{S_A \times S_B}(f) V(S_B) \leq m_{S_A}(\mathcal{L})$$

sumando para todo S_A y multiplicando por $V(S_A)$

$$\sum_{S_A \in P_A} \sum_{S_B \in P_B} m_{S_A \times S_B}(f) V(S_B) V(S_A) \leq \sum_{S_A \in P_A} m_{S_A}(\mathcal{L}) V(S_A)$$

de donde obtenemos

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_A)$$

análogamente obtenemos

$$U(\mathcal{U}, P_A) \leq U(f, P)$$

reuniendo los resultados

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_A) \leq U(\mathcal{L}, P_A) \leq U(\mathcal{U}, P_A) \leq U(f, P)$$

Ahora bien puesto que f es integrable

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = \int_{A \times B} f$$

de modo que al tomar el supremo sobre todas la sumas inferiores y el inferior sobre las sumas superiores

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f &= \sup\{L(f, P)\} = \sup\{L(\mathcal{L}, P_A)\} = \inf\{U(\mathcal{L}, P_A)\} \\ &= \inf\{U(\mathcal{U}, P_A)\} = \inf\{U(f, P)\} = \int_{A \times B} f \end{aligned}$$

en otras palabras \mathcal{L} es integrable y

$$\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{L}$$

Para \mathcal{U} análogamente tenemos las desigualdades

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_A) \leq L(\mathcal{U}, P_A) \leq U(\mathcal{U}, P_A) \leq U(f, P)$$

de donde

$$\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{U}$$

■

Comentario 2.5. Si $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ escribimos

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx$$

Análogamente intercambiando x e y

$$\int_{A \times B} f = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy$$

Comentario 2.6. Si $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ se puede aplicar reiteradamente el teorema de Fubini si cada una de las integrales “parciales” existen (por ejemplo si f es continua) y tenemos

$$\int_Q f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \right) dx^2 \dots \right) dx^n$$

Comentario 2.7. Si D no es un rectángulo pero $D \subset Q$ siendo Q un rectángulo podemos aplicar el teorema de Fubini de la siguiente forma

$$\int_D f = \int_Q f \cdot \chi_D$$

Por ejemplo sea $D = [-1, 1] \times [-1, 1] - \{(x, y); \|(x, y)\| < 1\}$

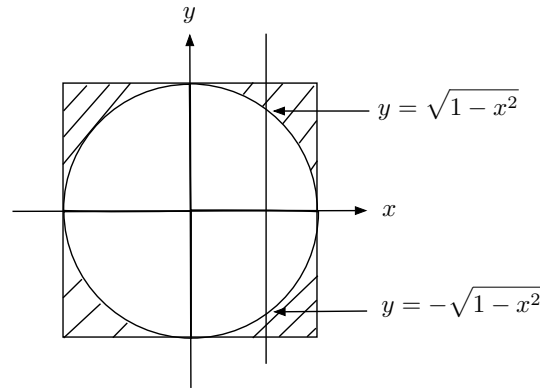


Figura 2.6 Un dominio no rectangular

$$\int_D f = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \chi_D(x, y) dy \right) dx$$

Ahora bien

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > \sqrt{1-x^2} \text{ o } y < -\sqrt{1-x^2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \chi_D(x, y) dy = \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y) dy$$

En los ejercicios 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 se ilustra la aplicación del teorema de Fubini con distintos ejemplos.

Con la ayuda del teorema de Fubini podemos demostrar la igualdad de las derivadas cruzadas.

Propiedad 2.11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (2.18)$$

si estas funciones son continuas.

Demostración:

Supongamos que en un punto x_0

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x_0) > 0$$

Por ser estas derivadas continuas existirá un rectángulo de centro x_0 , $Q = [a, b] \times [c, d]$ en el que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x) > 0 \quad \forall x \in Q \quad (2.19)$$

Tendremos entonces

$$\int_Q \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) dx dy > 0$$

Sin embargo por una parte

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial y}(b, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, y) \right) dy \\ &= f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c) \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, c) \right) dx \\ &= f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c) \end{aligned}$$

La diferencia entre las dos integrales es cero lo que contradice (2.19) ■

2.3. Cambio de variables

Buscamos una extensión en \mathbb{R}^d de la fórmula válida en \mathbb{R} :

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'$$

donde $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ define un cambio de variable siendo $f : [g(a), g(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

En \mathbb{R}^d la fórmula del cambio de variables es

$$\int_{g(D)} f = \int_D (f \circ g) |det g'|$$

donde $g : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ y g' es la matriz jacobiana de g , es decir

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \frac{\partial g^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^d}{\partial x^1} & \frac{\partial g^d}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial g^d}{\partial x^d} \end{pmatrix}$$

Para los lectores que no están familiarizados con la noción de determinante de una matriz y sus propiedades véase la subsección 3.1.6 del capítulo 3.

La demostración en el caso $d = 1$ es sencilla: Sea F una primitiva de f , entonces

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$$

de modo que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

y

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a))$$

Comentario 2.8. Si g es biyectiva, entonces la fórmula anterior se puede expresar como

$$\int_{g([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f \circ g) \cdot |g'|$$

Demostración:

En efecto, distingamos los casos g creciente y g decreciente. Por ejemplo sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g' < 0$ tendremos si $a < b \Rightarrow g(b) < g(a)$ entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = - \int_{g(b)}^{g(a)} f = - \int_b^a (f \circ g) \cdot g' = \int_a^b (f \circ g) \cdot |g'| = \int_{[a,b]} (f \circ g) \cdot |g'|$$

■

Teorema 2.6. Del cambio de variable bajo el signo integral

Sea $g : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ con E abierto tal que existe g^{-1} y tanto g como g^{-1} son de clase C^1 de modo que g es biyectiva y bicontinua y $det g'(x) \neq 0$ para todo $x \in E$. Sea A un conjunto medible Jordan tal que $\bar{A} \subset E \subset \mathbb{R}^d$. Si $f : g(A) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función

integrable en $g(A)$ entonces

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) |det g'| \quad (2.20)$$

Demostración:

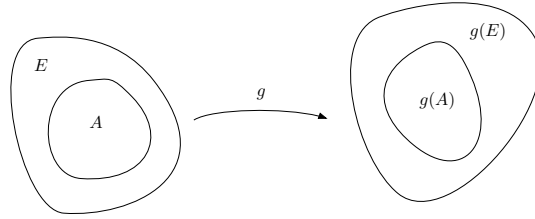


Figura 2.7 Ilustración del cambio de variable

La demostración se realiza en varias etapas. Admitimos que si A es medible Jordan $g(A)$ es también medible Jordan (véase el ejercicio 2.16 para una demostración). Supondremos para simplificar la demostración evitando complicaciones técnicas que $g(E) = \mathbb{R}^d$ o bien $g(E)$ es un conjunto tal que contiene un d -rectángulo Q tal que $g(A) \subset Q \subset g(E)$. Si $g(E) = \mathbb{R}^d$ siempre existe un tal rectángulo pues $g(A)$ es acotado por ser medible Jordan. Véase el ejercicio 2.17 para el caso más general. Como suponemos que g está definida en E que contiene a A consideraremos que A es cerrado y por lo tanto compacto pues es acotado al ser medible Jordan.

- **Etapla 1:** Si el teorema es cierto para $f = 1$ es cierto para f integrable cualquiera. En efecto, primero observemos que si es cierto para $f = 1$ es cierto para toda función f constante. Sea Q un d -rectángulo tal que $g(A) \subset Q$. Extendemos la función f mediante 0 fuera de $g(A)$ de modo que si $x \in g^{-1}(Q) \setminus A$ resulta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$ pues $g(x) \notin g(A)$. Además obviamente tendremos $\int_Q f = \int_{g(A)} f$. Consideremos P una partición de Q ; para cada subrectángulo $S \in P$ llamemos $f_S(x) = m_S(f)$ para todo $x \in S$ (de modo que f_S es una función constante en S). Tendremos

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{S \in P} m_S(f) V(S) = \sum_{S \in P} \int_S f_S = \sum_{S \in P} \int_{g^{-1}(S)} (f_S \circ g) |det g'| \\ &\leq \int_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |det g'| \end{aligned}$$

de modo que

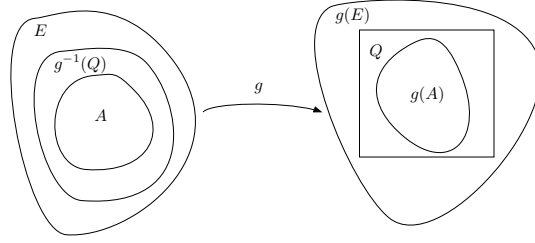


Figura 2.8 Ilustración del cambio de variable: Etapa 1

$$\int_Q f \leq \int_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |det g'|$$

análogamente demostramos utilizando las sumas superiores $\sum_{S \in P} M_S(f)V(S)$

$$\int_Q f \geq \int_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |det g'|$$

Deducimos

$$\int_{g(A)} f = \int_Q f = \int_{g^{-1}(Q)} (f \circ g) |det g'| = \int_A (f \circ g) |det g'|$$

- Etapa 2: Si el teorema es cierto para $g : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ y para $h : B \rightarrow \mathbb{R}^d$ donde $g(A) \subset B$, entonces es cierto para $h \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}^d$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{(h \circ g)(A)} f &= \int_{h(g(A))} f = \int_{g(A)} (f \circ h) |det h'| \\ &= \int_A ((f \circ h) \circ g) (|det h'| \circ g) |det g'| = \int_A f \circ (h \circ g) |det (h \circ g)'| \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta

$$\begin{aligned} (h \circ g)'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ \Rightarrow |det (h \circ g)'(x)| &= |det h'(g(x))| \cdot |det g'(x)| = (|det h'| \circ g)(x) \cdot |det g'(x)| \end{aligned}$$

- Etapa 3: Sea $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una aplicación lineal con $det T \neq 0$ entonces si R es un rectángulo

$$\int_{T(R)} 1 = \int_R |det T|$$

es decir el volumen $V(T(R))$ de $T(R)$ verifica

$$V(T(R)) = |det T| V(R)$$

En efecto, toda aplicación lineal T se puede descomponer como composición de aplicaciones lineales elementales de la forma (véase ejercicio 2.18)

- a) $T(x^1, x^2, \dots, x^d) = (\lambda x^1, x^2, \dots, x^d)$
 b) $T(x^1, x^2, \dots, x^d) = (x^1 + x^2, x^3, \dots, x^d)$
 c) $T(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^d) = (x^1, x^2, \dots, x^j, \dots, x^i, \dots, x^d)$

Sea $R = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times \dots \times [a^d, b^d]$. Tendremos

- Para T como en (a) $|\det T| = |\lambda|$ y

$$T(R) = [\lambda a^1, \lambda b^1] \times [a^2, b^2] \times \dots \times [a^d, b^d]$$

de modo que

$$V(T(R)) = |\lambda|(b^1 - a^1) \cdot (b^2 - a^2) \cdot \dots \cdot (b^d - a^d) = |\lambda|V(R)$$

- Para T como en (b) tenemos $|\det T| = 1$. Si

$$R = \{(x^1, \dots, x^d); a^1 \leq x^1 \leq b^1, \dots, a^d \leq x^d \leq b^d\}$$

$T(R)$ es

$$T(R) = \{(x^1, \dots, x^d); a^1 + x^2 \leq x^1 \leq b^1 + x^2, \dots, a^d \leq x^d \leq b^d\}$$

de donde

$$\begin{aligned} V(T(R)) &= \int_{T(R)} 1 = \int_{a^d}^{b^d} \int_{a^{d-1}}^{b^{d-1}} \dots \int_{a^2}^{b^2} \int_{a^1+x^2}^{b^1+x^2} 1 dx^1 dx^2 \dots dx^d \\ &= \int_{a^d}^{b^d} \int_{a^{d-1}}^{b^{d-1}} \dots \int_{a^2}^{b^2} \int_{a^1}^{b^1} 1 dx^1 dx^2 \dots dx^d \\ &= V(R) = |\det T| \cdot V(R) \end{aligned}$$

- Para T como en (c) el cambio de variable equivale a un cambio de orden en la integración al aplicar el teorema de Fubini.
- Finalmente para $T = T_s \circ T_{s-1} \circ \dots \circ T_1$ una composición de aplicaciones elementales lineales del tipo (a), (b) o (c) tendremos

$$\begin{aligned} V(T(R)) &= \int_{T(R)} 1 = \int_{T_s(T_{s-1} \circ \dots \circ T_1)(R)} 1 \\ &= |\det T_s| \int_{(T_{s-1} \circ \dots \circ T_1)(R)} 1 = |\det T_s| \cdot |\det T_{s-1}| \dots |\det T_1| \int_R 1 \\ &= |\det T| V(R) \end{aligned}$$

- **Etapa 4:** Sea $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una aplicación lineal con $\det T \neq 0$ y A es un conjunto medible Jordan entonces

$$\int_{T(A)} 1 = \int_A |\det T|$$

En efecto, ya hemos visto que la propiedad es cierta para conjuntos que son rectángulos. Sea ahora un rectángulo R que contiene al conjunto A . Para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(\chi_A, P) - L(\chi_A, P) < \varepsilon$$

(En efecto, si A es medible Jordan, χ_A es integrable en el rectángulo R y por tanto existe tal partición)

Si llamamos

$$E_1 = \{S \in P; S \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad E_2 = \{S \in P; S \subset A\}$$

se tiene que E_1 y E_2 son medibles pues es unión finita de conjuntos medibles. Puesto que $E_2 \subset A \subset E_1$ tendremos

$$V(E_2) \leq V(A) \leq V(E_1) \tag{2.21}$$

también

$$U(\chi_A, P) = \sum_{S \in P} M_S(\chi_A) V(S) = \sum_{S \in P; S \cap A \neq \emptyset} V(S) = V(E_1)$$

y

$$L(\chi_A, P) = \sum_{S \in P} m_S(\chi_A) V(S) = \sum_{S \in P; S \subset A} V(S) = V(E_2)$$

Por otra parte

$$T(E_1) = \bigcup_{S \in E_1} T(S)$$

por tanto

$$V(T(E_1)) = \sum_{S \in E_1} V(T(S)) = \sum_{S \in E_1} |\det T| V(S) = |\det T| V(E_1)$$

y también

$$T(E_2) = \bigcup_{S \in E_2} T(S)$$

de modo que

$$V(T(E_2)) = \sum_{S \in E_2} V(T(S)) = \sum_{S \in E_2} |\det T| V(S) = |\det T| V(E_2)$$

Como $E_2 \subset A \subset E_1$ tenemos $T(E_2) \subset T(A) \subset T(E_1)$ por lo tanto $V(T(E_2)) \leq V(T(A)) \leq V(T(E_1))$ y sustituyendo los valores obtenidos de $T(E_1)$

y $T(E_2)$

$$|\det T|V(E_2) \leq V(T(A)) \leq |\det T|V(E_1) \quad (2.22)$$

multiplicando por $|\det T|$ la desigualdad 2.21

$$|\det T|V(E_2) \leq |\det T|V(A) \leq |\det T|V(E_1) \quad (2.23)$$

De las desigualdades (2.22) y (2.23) se obtiene cambiando de signo (2.23) y sumando con (2.22)

$$|\det T|(V(E_2) - V(E_1)) \leq V(T(A)) - |\det T|V(A) \leq |\det T|(V(E_1) - V(E_2))$$

es decir

$$\begin{aligned} |V(T(A)) - |\det T|V(A)| &\leq |\det T|(V(E_1) - V(E_2)) \\ &= |\det T|(U(\chi_A, P) - L(\chi_A, P)) \leq |\det T|\varepsilon \end{aligned}$$

como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ tenemos

$$V(T(A)) = |\det T|V(A)$$

- Etapa 5: Observemos primero que según lo visto en la etapa 2 de esta demostración, dado un punto $a \in A$ podemos suponer que $g'(a)$ es la matriz identidad Id . En efecto, si T es la aplicación lineal $T = Dg(a)$ entonces $(T^{-1} \circ g)'(a) = Id$ y puesto que el teorema es cierto para T , si es cierto para $T^{-1} \circ g$ será cierto para $T \circ T^{-1} \circ g = g$.

Demostremos que existe un entorno U de $a \in A$ y un d -rectángulo $Q_a \subset U$ (que podemos suponer de centro a) en el que se verifica (2.20). La demostración se realiza utilizando el principio de inducción sobre d . Ya hemos visto que el teorema es cierto para $d = 1$. Supongamos entonces que también es cierto para $(d - 1)$. Sea $a \in A$ un punto donde $g'(a) = Id$. Definimos $h : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ por $h(x) = (g^1(x), \dots, g^{d-1}(x), x_d)$. Tendremos $h'(a) = ((g^1)'(a), \dots, (g^{d-1})'(a), x'_d)^t = Id$. Por lo tanto en un entorno $U' \subset A$ de a la función h es biyectiva y $\det h'(x) \neq 0$. Podemos definir $k : h(U') \rightarrow \mathbb{R}^d$ mediante $k(x) = (x_1, \dots, x_{d-1}, g^d(h^{-1}(x)))^t$. Con esto hemos puesto g como la composición de dos aplicaciones $g = k \circ h$ cada una de las cuales cambia menos de d coordenadas. Ya hemos indicado que $h'(a) = Id$, veamos que también $k'(h(a)) = Id$, en efecto

$$\begin{aligned} (g^d \circ h^{-1})'(h(a)) &= (g^d)'(a) \cdot (h^{-1})'(h(a)) = (g^d)'(a) \cdot (h'(a))^{-1} \\ &= (g^d)'(a) = (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

donde hemos aplicado (1.35). De modo que

$$k'(h(a)) = (x'_1, \dots, x'_{d-1}, (g^d \circ h^{-1})'(h(a))) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = Id$$

En consecuencia en un entorno abierto V con $h(a) \in V \subset h(U')$ la función k es biyectiva y $\det k'(x) \neq 0$. Poniendo $U = k^{-1}(V)$ se tiene $g = k \circ h$, donde $h : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $k : V = h(U) \rightarrow \mathbb{R}^d$. Probaremos el resultado para h , siendo la demostración para k análoga (véase ejercicio 2.19). Aplicando el resultado de la etapa 2 tendremos el resultado.

Sea ahora un d -rectángulo $Q_a \subset U$ de la forma $R \times [a_d, b_d]$ donde R es un $(d-1)$ -rectángulo. En virtud del teorema de Fubini

$$\int_{h(Q_a)} 1 = \int_{[a_d, b_d]} \left(\int_{h(R \times [x_d])} 1 dx_1 \dots dx_{d-1} \right) dx_d$$

Sea $h_{x_d} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ definida por

$$h_{x_d}(x_1, \dots, x_{d-1}) = (g^1(x_1, \dots, x_d), \dots, g^{d-1}(x_1, \dots, x_d))^t$$

cada h_{x_d} es evidentemente biyectiva y tenemos teniendo en cuenta que x_d es un valor fijo

$$\det(h_{x_d})'(x_1, \dots, x_{d-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x_{d-1}} \\ \frac{\partial g^2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^2}{\partial x_{d-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g^{d-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^{d-1}}{\partial x_{d-1}} \end{pmatrix}$$

por otra parte

$$\det(h)'(x_1, \dots, x_d) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x_{d-1}} & \frac{\partial g^1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial g^2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^2}{\partial x_{d-1}} & \frac{\partial g^2}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g^{d-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^{d-1}}{\partial x_{d-1}} & \frac{\partial g^{d-1}}{\partial x_d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$|\det(h_{x_d})'(x_1, \dots, x_{d-1})| = |\det(h)'(x_1, \dots, x_d)| \neq 0$$

Además

$$\int_{h(R \times [x_d])} 1 dx_1 \dots dx_{d-1} = \int_{h_{x_d}(R)} 1 dx_1 \dots dx_{d-1}$$

Aplicando el teorema en el caso $d-1$ da

$$\begin{aligned}
 \int_{h(Q_a)} 1 &= \int_{[a_d, b_d]} \left(\int_{h_{x,d}(R)} 1 dx_1 \dots dx_{d-1} \right) dx_d \\
 &= \int_{[a_d, b_d]} \left(\int_R 1 |\det(h_{x,d})'(x_1, \dots, x_{d-1})| dx_1 \dots dx_{d-1} \right) dx_d \\
 &= \int_{[a_d, b_d]} \left(\int_R 1 |\det h'(x_1, \dots, x_d)| dx_1 \dots dx_{d-1} \right) dx_d \\
 &= \int_{Q_a} |\det h'|
 \end{aligned}$$

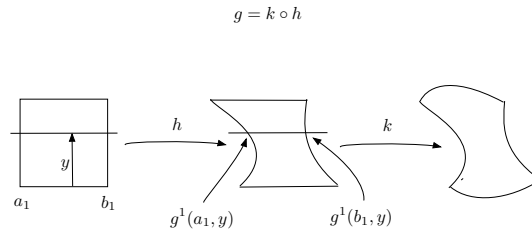


Figura 2.9 Teorema del cambio de variable

■ **Etapa 6:**

Sea $a \in A$, según hemos visto en la etapa 5 existe un d -rectángulo Q_a en el que se ha demostrado que se verifica

$$\int_{g(Q_a)} 1 = \int_{Q_a} |\det g'|$$

El conjunto de los Q_a para todo $a \in A$ recubren A . Como A es compacto existirá un número finito Q_i ; $i = 1, \dots, p$ de estos rectángulos recubriendo A , de modo que $a \in A \subset \bigcup_{i=1, \dots, p} Q_i$. Sea $\delta = d(\bar{A}, E^c)$. Siempre podemos elegir los d -rectángulos Q_a y por tanto los Q_i que tengan diámetro menor que $\delta/2$. De esta manera $Q_i \subset E$ para todo $i = 1, \dots, p$. Sea ahora un d -rectángulo R tal que $\bigcup_{i=1, \dots, p} Q_i \subset R$ y prolongamos las caras de los d -rectángulos Q_i , $i = 1, \dots, p$ de modo que formamos una partición P de R (véase la figura 2.10). Si $f : g(A) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $g(A)$ extendemos mediante cero esta función fuera de $g(A)$. Tendremos aplicando el resultado de la etapa 1 que el resultado será cierto para cualquier función integrable en $g(Q_i)$. En particular el resultado es válido para la función $\chi_{g(S)} f$ de modo que se verifica

$$\int_{g(S)} f = \int_{g(Q_i)} \chi_{g(S)} f = \int_{Q_i} (\chi_{g(S)} f \circ g) |\det g'|$$

igualdad que podemos escribir para $S \subset Q_i$ como

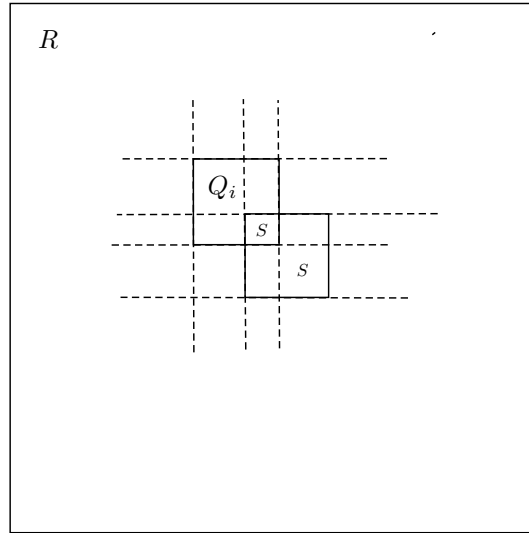


Figura 2.10 Construcción de la partición P de R

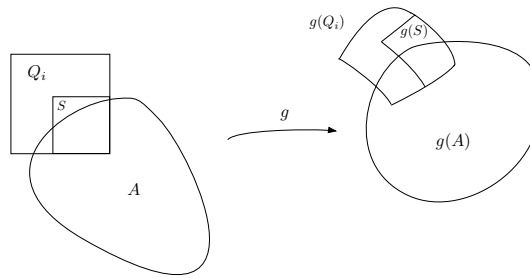


Figura 2.11 teorema del cambio de variable. Etapa 6

$$\int_{g(S)} f = \int_S (f \circ g) |det g'|$$

Llamemos $F = \{S \in P; S \cap A \neq \emptyset\}$. Los subrectángulos S no se solapan, es decir, si S_1 y S_2 son subrectángulos los interiores respectivos verifican $\overset{\circ}{S}_1 \cap \overset{\circ}{S}_2 = \emptyset$. Por la propia construcción de la partición P tendremos además $\bigcup_{S \in F} (S \cap A) = A$ y también $g(S \cap A) = g(S) \cap g(A)$ ya que g es biyectiva. Hemos considerado que los subrectángulos S son cerrados. De modo que

$$g(A) = g\left(\bigcup_{S \in F} (S \cap A)\right) = \bigcup_{S \in F} g(S \cap A) = \bigcup_{S \in F} (g(S) \cap g(A)) = \left(\bigcup_{S \in F} g(S)\right) \cap g(A)$$

Para el conjunto de los subrectángulos S de la partición P tendremos teniendo en cuenta que $f = 0$ en el exterior de $g(A)$

$$\begin{aligned} \int_{g(A)} f &= \int_{(\cup_{S \in F} g(S)) \cap g(A)} f = \int_{\cup_{S \in F} g(S)} f = \sum_{S \in F} \int_{g(S)} f \\ &= \sum_{S \in F} \int_S (f \circ g) |det g'| = \int_A (f \circ g) |det g'| \end{aligned}$$

■

En los ejercicios 2.20, 2.21, 2.22, 2.23 y 2.24 se ilustra la aplicación del teorema del cambio de variable.

Ejercicios del Capítulo 2

2.1.

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, y \rightarrow f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable y

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f = \frac{1}{2}$$

2.2. Demostrar que

$$\sup\{|f(x) - f(y)|; x \in S, y \in S\} = \sup\{f(x); x \in S\} - \inf\{f(y); y \in S\}$$

2.3. Sea

$$f : Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, y \rightarrow f(x, y) = x^2 y$$

Calcular $\int_Q f$ aplicando la construcción de la subsección 2.1.1

2.4. -

- Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado de \mathbb{R} . Demostrar que no tiene contenido cero.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto y de medida cero demostrar que tiene contenido cero.
- Concluir que $[a, b] \subset \mathbb{R}$ no tiene medida cero.

2.5. Sea Q un d -rectángulo y $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa tal que $\int_Q f = 0$. Probar que el conjunto $B = \{x \in Q; f(x) \neq 0\}$ tiene medida cero.

2.6. Sea Q un d -rectángulo. Dar un ejemplo de conjunto acotado $C \subset Q \subset \mathbb{R}^d$ de medida cero y tal que $\int_Q \chi_C$ no exista.

2.7. a) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente, es decir

$$f(x) \geq f(y) \quad \text{si } x \geq y$$

Si $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in [a, b]$ probar que

$$\sum_{i=1}^n O(f, x_i) \leq f(b) - f(a)$$

b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Probar que $\{x; f \text{ discontinua en } x\}$ tiene medida nula.

c) Concluir que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente es integrable en $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

2.8. Calcular $\int_D f$ para

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

$$f(x, y) = x^2$$

2.9. Calcular $\int_D f$ para

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, x < y < 1\}$$

$$f(x, y) = e^{y^2}$$

2.10. Calcular $\int_D f$ para

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x < 2, 0 < y < \frac{\pi}{2x}\}$$

$$f(x, y) = \cos(xy)$$

2.11. Calcular $\int_D f$ para

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < 1, |y| < 1\}$$

$$f(x, y) = |x + y|$$

2.12. Calcular $\int_D f$ para

$$D = [-2, 2] \times [-1, 1]$$

$$f(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$$

2.13. Calcular $\int_D f$ para

$$D = [-2, 2] \times [-1, 1]$$

$$f(x, y) = |\text{máx}\{x, y\}|$$

2.14. Sea $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ probar

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y) dy dx$$

2.15. Sea D la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie

$$z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0$$

Calcular $\int_D x dx dy dz$

2.16. -

a) Probar que si $A \subset \mathbb{R}^d$ es medible Jordan de medida nula y $F : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función Lipschitziana, es decir existe una constante L tal que si x e y son puntos de A se tiene que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$$

entonces $F(A)$ es medible Jordan de medida nula.

b) Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ con U un abierto de \mathbb{R}^d de clase C^1 en U . Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ medible Jordan de medida nula y tal que $\bar{A} \subset U$. Entonces $F(A)$ es medible Jordan de medida nula.

c) Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ con U un abierto de \mathbb{R}^d de clase C^1 en U y con inversa de clase C^1 en \dot{A} . Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ medible Jordan y tal que $\bar{A} \subset U$. Entonces $F(A)$ es medible Jordan y además $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$.

2.17. Demostrar el resultado de la etapa 1 en la demostración del teorema 2.6 en el caso más general en el que no podamos elegir un d -rectángulo Q tal que $g(A) \subset Q \subset g(E)$

2.18. Probar que toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ se puede descomponer como composición de aplicaciones lineales elementales de la forma

a) $T(x^1, x^2, \dots, x^d) = (\lambda x^1, x^2, \dots, x^d)$

b) $T(x^1, x^2, \dots, x^d) = (x^1 + x^2, x^3, \dots, x^d)$

c) $T(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^d) = (x^1, x^2, \dots, x^j, \dots, x^i, \dots, x^d)$

2.19. Sea un d -rectángulo Q de la forma $R \times [a_d, b_d]$ donde R es un $(d-1)$ -rectángulo. Sea $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que para todo $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $k(x) = (x_1, \dots, x_d, k^d(x_1, \dots, x_d))$. Es decir la función k solo cambia la última coordenada dejando fijas las $(d-1)$ primeras. Demostrar

$$\int_{k(Q)} 1 = \int_Q |\det k'|$$

2.20. Determinar la parte superior del volumen limitado por la intersección de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ay$.

2.21. Determinar el volumen comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ el plano $z = 0$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

2.22. Calcular $\int_D f$ donde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$$

y

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

utilizando el cambio de variable

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta, \varphi)^t \rightarrow (x, y, z)^t$$

dado por

$$x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi$$

2.23. Calcular $\int_D f$ donde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < a^2; 0 < z < l\}$$

y

$$f(x, y, z) = z^2$$

utilizando el cambio de variable

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta, z)^t \rightarrow (x, y, z)^t$$

dado por

$$x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z$$

2.24. Sea

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

la integral euleriana de primera especie para $p > 0$ y $q > 0$. Si q es entero, integrando por partes sucesivamente se tiene

$$B(p, q) = \frac{(q-1)(q-2)\dots, 1}{p(p+1)\dots(p+q-1)} = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}$$

Recordemos que la función

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

llamada integral euleriana de segunda especie es una función continua para $p > 0$ que coincide con la función factorial $(p-1)!$ cuando p es entero, es decir, $\Gamma(p) = (p-1)!$ para p entero positivo. En efecto, integrando por partes

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = [-x^{p-1} e^{-x}]_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx \\ &= (p-1)\Gamma(p-1) \end{aligned}$$

Calcular $\int_D f$ donde

a)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

y

$$f(x, y) = x^{q-1} y^{q-1}$$

b)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$$

y

$$f(x, y, z) = x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}$$

c)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \leq 1\}$$

y

$$f(x, y, z) = x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}$$

d)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}$$

y

$$f(x, y, z) = xyz$$

Capítulo 3

Álgebra Tensorial

En este capítulo recogemos las nociones básicas de álgebra tensorial como paso preliminar para el desarrollo del cálculo tensorial. Las referencias básicas son [6] y [3].

3.1. Aplicaciones multilineales

En este capítulo V será siempre un espacio vectorial de dimensión finita. Su dual, es decir el conjunto de aplicaciones lineales de V en \mathbb{R} lo designamos V^* . Nos referimos al dual algebraico. Recordemos que el dual topológico (aplicaciones lineales continuas) solo tiene sentido en los espacios vectoriales topológicos, por ejemplo espacios normados. En dimensión finita ambos espacios duales coinciden.

Una aplicación T

$$T : V \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v_1, \dots, v_i, \dots, v_k \rightarrow T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

se llama multilineal si para cada $i = 1, \dots, k$ se tiene

$$T(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k) \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$T(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_k) = \lambda T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Una aplicación multilineal $T : V \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se llama tensor covariante de orden k en V (o k tensor). Sea $\mathcal{M}_k(V)$ el conjunto de los tensores de orden k sobre V . Sean $S, T \in \mathcal{M}_k(V)$, definimos la suma $S + T \in \mathcal{M}_k(V)$ mediante

$$(S + T)(v_1, \dots, v_k) = S(v_1, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V$$

y el producto de S por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como el tensor $\lambda S \in \mathcal{M}_k(V)$ que verifica

$$(\lambda S)(v_1, \dots, v_k) = \lambda S(v_1, \dots, v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V$$

Con estas dos operaciones $\mathcal{M}_k(V)$ es un espacio vectorial.

Sea V^* el espacio dual de V , es decir el espacio de aplicaciones lineales de V en \mathbb{R} . Una aplicación multilineal $T : V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ se llama tensor contravariante de orden l . Denotamos $\mathcal{M}^l(V)$ al espacio de los tensores contravariantes de orden l .

De forma análoga se llama tensor mixto k veces covariante y l veces contravariante a una aplicación multilineal $T : V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos $\mathcal{M}_k^l(V)$ al espacio de los tensores k veces covariante y l veces contravariante.

En lo sucesivo de manera general nos referiremos a tensores covariantes aunque los conceptos y operaciones que se introducen se definen análogamente para los tensores contravariantes y para tensores mixtos. Vamos ahora a definir una nueva operación entre tensores, más precisamente el producto tensorial de dos tensores.

Definición 3.1. *Producto Tensorial:* Sea $S \in \mathcal{M}_k(V)$ y $T \in \mathcal{M}_l(V)$. El producto $S \otimes T \in \mathcal{M}_{k+l}(V)$ es el tensor que para todo $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l} \in V$ verifica

$$(S \otimes T)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k) \cdot T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

Recursivamente podemos definir el producto tensorial de r tensores

$$T_1 \otimes \dots \otimes T_r$$

Las siguientes propiedades del producto tensorial se verifican sin dificultad.

Propiedades 3.1. Sean $S, S_1, S_2 \in \mathcal{M}_k(V)$, $T, T_1, T_2 \in \mathcal{M}_l(V)$, $U \in \mathcal{M}_m(V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos las siguientes propiedades:

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T \quad (3.1)$$

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2 \quad (3.2)$$

$$\lambda S \otimes T = S \otimes (\lambda T) = \lambda(S \otimes T) \quad (3.3)$$

$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U) \quad (3.4)$$

Observaciones 3.1. El producto tensorial no es conmutativo. En general $S \otimes T \neq T \otimes S$.

De la definición de aplicación multilineal inmediatamente resulta que $\mathcal{M}_1(V)$ es el espacio dual V^*

3.1.1. Bases en el espacio de tensores

Vamos a construir una base en el espacio de tensores a partir de una base en el espacio V y de la correspondiente base dual en V^* .

Teorema 3.1. Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V y sea $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ la base dual, es decir la base de V^* que verifica $\varphi^i(e_j) = \delta_j^i$. Entonces el conjunto de todos los

productos tensoriales de k factores

$$\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d$$

es una base de $\mathcal{M}_k(V)$ que tiene dimensión d^k

Demostración:

Cualquier tensor $T \in \mathcal{M}_k(V)$ se tiene que poder expresar como combinación lineal de los elementos de la base y estos elementos tienen que ser linealmente independientes. Sean ahora k vectores de V , w_1, \dots, w_k con $w_i = \sum_{j=1}^d a_i^j e_j$. Tenemos

$$T(w_1, \dots, w_k) = T\left(\sum_{i_1=1}^d a_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^d a_k^{i_k} e_{i_k}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Vamos a ver que T se puede expresar como combinación lineal de

$$\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d$$

En efecto observando que

$$\begin{aligned} \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k}(w_1, \dots, w_k) &= \varphi^{i_1}(w_1) \dots \varphi^{i_k}(w_k) \\ &= \varphi^{i_1}\left(\sum_{j_1=1}^d a_1^{j_1} e_{j_1}\right) \dots \varphi^{i_k}\left(\sum_{j_k=1}^d a_k^{j_k} e_{j_k}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^d a_1^{j_1} \varphi^{i_1}(e_{j_1}) \dots \sum_{j_k=1}^d a_k^{j_k} \varphi^{i_k}(e_{j_k}) = a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k} \end{aligned}$$

es decir,

$$T(w_1, \dots, w_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k}^d T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k}(w_1, \dots, w_k)$$

Como w_1, \dots, w_k son vectores cualesquiera, resulta

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k}^d T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k}$$

de modo que el sistema de tensores $\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d$ es un sistema generador.

Veamos que son linealmente independientes: Observemos primero que

$$\begin{aligned}
(\varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= \varphi^{i_1}(e_{j_1}) \dots \varphi^{i_k}(e_{j_k}) \\
&= \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}
\end{aligned}$$

Sean a_{i_1, \dots, i_k} tales que

$$\sum_{i_1, \dots, i_k}^d a_{i_1, \dots, i_k} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k} = 0$$

Aplicando ambos miembros a los vectores e_{j_1}, \dots, e_{j_k} se obtiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1, \dots, i_k}^d a_{i_1, \dots, i_k} \varphi^{i_1}(e_{j_1}) \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}(e_{j_k}) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_k}^d a_{i_1, \dots, i_k} \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_d}^{j_d} = a_{j_1, \dots, j_k} = 0
\end{aligned}$$

Finalmente el número de tensores de la base del espacio de tensores $\mathcal{M}_k(V)$ será el número de las variaciones con repetición de d elementos tomados de k en k , es decir d^k . ■

Ejemplos de tensores

1. Un ejemplo de tensor es el producto escalar en \mathbb{R}^d que es un tensor de orden 2.
2. La base de los tensores de orden 2 en \mathbb{R}^3 , $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^3)$ será: Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y sea $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ la base dual. Entonces la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^3)$ es

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^1 \otimes \varphi^1 \quad \varphi^1 \otimes \varphi^2 \quad \varphi^1 \otimes \varphi^3 \\ \varphi^2 \otimes \varphi^1 \quad \varphi^2 \otimes \varphi^2 \quad \varphi^2 \otimes \varphi^3 \\ \varphi^3 \otimes \varphi^1 \quad \varphi^3 \otimes \varphi^2 \quad \varphi^3 \otimes \varphi^3 \end{array} \right\}$$

y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^3)$ tiene dimensión $3^2 = 9$.

3.1.2. Aplicaciones entre espacios de tensores

Sean V y W dos espacios vectoriales y $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. f induce una aplicación que llamaremos f^* entre los espacios de tensores $\mathcal{M}_k(W)$ y $\mathcal{M}_k(V)$,

$$f^* : \mathcal{M}_k(W) \rightarrow \mathcal{M}_k(V)$$

está definida de la siguiente manera: Si $T \in \mathcal{M}_k(W)$ entonces $f^*T \in \mathcal{M}_k(V)$ es el tensor tal que

$$(f^*T)(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k)) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V \quad (3.5)$$

Propiedad 3.1. Sean V y W espacios vectoriales, f una aplicación lineal de V en W , $S \in \mathcal{M}_k(W)$ y $T \in \mathcal{M}_l(W)$ se tiene

$$f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T \quad (3.6)$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 3.1 ■

3.1.3. Contracción de tensores

Sea $T \in \mathcal{M}_k^l(V)$. Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V y sea $\{\phi^1, \dots, \phi^d\}$ la base dual. Definimos la contracción C_1^l como la aplicación de $\mathcal{M}_k^l(V)$ en $\mathcal{M}_{k-1}^{l-1}(V)$ tal que

$$C_1^l T(v_1, \dots, v_{k-1}, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) = \sum_{i=1}^d T(e_i, v_1, \dots, v_{k-1}, \phi^i, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) \quad (3.7)$$

Veamos que la definición no depende de la base elegida. Sea $\{u_1, \dots, u_d\}$ otra base de V y $\{\phi^1, \dots, \phi^d\}$ su base dual. Podemos escribir

$$u_i = \sum_{r=1}^d a_i^r e_r \quad , \quad \phi^j = \sum_{s=1}^d b_s^j \phi^s$$

Como $\phi^j(u_i) = \delta_i^j$ y $\phi^j(e_i) = \delta_i^j$ resulta $\sum_{r=1}^d a_i^r b_r^j = \delta_i^j$, en efecto

$$\begin{aligned} \delta_i^j &= \phi^j(u_i) \\ &= \sum_{s=1}^d b_s^j \phi^s \left(\sum_{r=1}^d a_i^r e_r \right) = \sum_{s=1}^d \sum_{r=1}^d b_s^j a_i^r \phi^s(e_r) = \sum_{s=1}^d \sum_{r=1}^d b_s^j a_i^r \delta_s^r = \sum_{r=1}^d b_r^j a_i^r \end{aligned}$$

esto nos dice que las matrices de cambio de base

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_d^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^d & \dots & a_d^d \end{bmatrix}$$

y la matriz del cambio de base en el espacio dual

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & \dots & b_d^1 \\ \dots & & \dots \\ b_1^d & \dots & b_d^d \end{bmatrix}$$

verifican $B.A = Id$ y como A y B tienen inversa pues son matrices de cambio de base se verifica $A = B^{-1}$ y $B = A^{-1}$. Podemos pues escribir

$$e_s = \sum_{j=1}^d b_s^j u_j \quad , \quad \varphi^r = \sum_{i=1}^d a_i^r \phi^i$$

Como $\varphi^r(e_s) = \delta_s^r$ y $\phi^j(u_i) = \delta_i^j$ y procediendo como antes

$$\begin{aligned} \delta_s^r &= \varphi^r(e_s) \\ &= \sum_{i=1}^d a_i^r \phi^i \left(\sum_{j=1}^d b_s^j u_j \right) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i^r b_s^j \phi^i(u_j) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_i^r b_s^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^d a_i^r b_s^i \end{aligned}$$

De donde resulta,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d T(u_i, v_1, \dots, v_{k-1}, \phi^i, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) \\ &= \sum_{i=1}^d T \left(\sum_{r=1}^d a_i^r e_r, v_1, \dots, v_{k-1}, \sum_{s=1}^d b_s^i \varphi^s, \omega^1, \dots, \omega^{l-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d a_i^r b_s^i T(e_r, v_1, \dots, v_{k-1}, \varphi^s, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) \\ &= \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^d \delta_s^r T(e_r, v_1, \dots, v_{k-1}, \varphi^s, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) \\ &= \sum_{r=1}^d T(e_r, v_1, \dots, v_{k-1}, \varphi^r, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) \end{aligned}$$

Análogamente se definen las contracciones respecto a otros índices

$$C_m^n : \mathcal{M}_k^l(V) \rightarrow \mathcal{M}_{k-1}^{l-1}(V)$$

con $1 \leq m \leq k$ y $1 \leq n \leq l$:

$$\begin{aligned} & C_m^n T(v_1, \dots, v_{k-1}, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) \\ &= \sum_{i=1}^d T(v_1, \dots, \overset{\text{lugar } m}{e_i}, \dots, v_{k-1}, \omega^1, \dots, \overset{\text{lugar } n}{\varphi^i}, \dots, \omega^{l-1}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Componentes de $C_m^n T$, $T \in \mathcal{M}_k^l(V)$

Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V y $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ una base del dual V^* . Todo $T \in \mathcal{M}_k^l(V)$ se puede de la forma

$$T = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k=1 \\ i_1, \dots, i_l=1}}^d \lambda_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_l} \varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{j_k} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l}$$

Calculemos por ejemplo $C_1^1 T$: Tendremos

$$C_1^1 T = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_{k-1}=1 \\ s_1, \dots, s_{l-1}=1}}^d \mu_{r_1, \dots, r_{k-1}}^{s_1, \dots, s_{l-1}} \varphi^{r_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{r_{k-1}} \otimes e_{s_1} \otimes \dots \otimes e_{s_{l-1}}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_{r_1, \dots, r_{k-1}}^{s_1, \dots, s_{l-1}} &= C_1^1 T(e_{r_1}, \dots, e_{r_{k-1}}, \varphi^{s_1}, \dots, \varphi^{s_{l-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^d T(e_i, e_{r_1}, \dots, e_{r_{k-1}}, \varphi^i, \varphi^{s_1}, \dots, \varphi^{s_{l-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_{i, r_1, \dots, r_{k-1}}^{i, s_1, \dots, s_{l-1}} \end{aligned}$$

En el caso general

$$\begin{aligned} \mu_{r_1, \dots, r_{k-1}}^{s_1, \dots, s_{l-1}} &= C_m^n T(e_{r_1}, \dots, e_{r_{k-1}}, \varphi^{s_1}, \dots, \varphi^{s_{l-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^d T(\underset{\text{lugar m}}{v_{r_1}, \dots, v_{r_{k-1}}}, \underset{\text{lugar n}}{e_i}, \varphi^{s_1}, \omega^1, \dots, \varphi^i, \dots, \omega^{l-1}) \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_{r_1, \dots, r_{k-1}}^{s_1, \dots, i, \dots, s_{l-1}} \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Sea $T \in \mathcal{M}_3^2(V)$ vamos a calcular $C_2^1 T$:
Escribiendo T en función de la base

$$T = \sum_{h, k, l, i, j=1}^d \lambda_{h, k, l}^{i, j} \varphi^h \otimes \varphi^k \otimes \varphi^l \otimes e_i \otimes e_j$$

entonces

$$C_2^1 T = \sum_{s,q,r=1}^d \mu_{s,q}^r \varphi^s \otimes \varphi^q \otimes e_r$$

con $\mu_{r,q}^r = \sum_{i=1}^d \lambda_{s,i,q}^{i,r}$

2. Mediante la notación CT designamos la contracción con respecto a todos los índices. Por ejemplo si $T \in \mathcal{M}_2^2(V)$, $CT = C_1^1(C_1^1 T)$ que será un elemento de \mathbb{R} . Si

$$T = \sum_{h,k,i,j=1}^d \lambda_{h,k}^{i,j} \varphi^h \otimes \varphi^k \otimes e_i \otimes e_j$$

se tiene

$$CT = \sum_{i,j=1}^d \lambda_{i,j}^{i,j}$$

3. Sea $T \in \mathcal{M}_2(V)$ y sean $v_1, v_2 \in V$ tenemos

$$T(v_1, v_2) = C(T \otimes v_1 \otimes v_2)$$

En efecto sean

$$T = \sum_{i,j=1}^d \lambda_{i,j} \varphi^i \otimes \varphi^j$$

$$v_1 = \sum_{h=1}^d a^h e_h \quad y \quad v_2 = \sum_{k=1}^d b^k e_k$$

Resulta

$$\begin{aligned} T(v_1, v_2) &= \sum_{i,j=1}^d \lambda_{i,j} \varphi^i \left(\sum_{h=1}^d a^h e_h \right) \otimes \varphi^j \left(\sum_{k=1}^d b^k e_k \right) \\ &= \sum_{i,j,h,k=1}^d \lambda_{i,j} a^h b^k \delta_h^i \delta_k^j = \sum_{i,j=1}^d \lambda_{i,j} a^i b^j \end{aligned}$$

Por otra parte

$$T \otimes v_1 \otimes v_2 = \sum_{i,j=1}^d \lambda_{i,j} a^h b^k \varphi^i \otimes \varphi^j \otimes e_h \otimes e_k$$

de donde

$$C(T \otimes v_1 \otimes v_2) = \sum_{i,j=1}^d \lambda_{i,j} a^i b^j$$

4. En general si $T \in \mathcal{M}_s^r(V)$, $v_1, v_2, \dots, v_s \in V$ y $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r \in V^*$ tendremos

$$T(v_1, v_2, \dots, v_s, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r) = C(T \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_s \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r)$$

3.1.4. Tensores antisimétricos

Definición 3.2. Un tensor de orden k , $\omega \in \mathcal{M}_k(V)$ se denomina antisimétrico (o alternado) si verifica

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para todo conjunto de k vectores $v_1, \dots, v_k \in V$

En la igualdad de la definición se intercambian dos argumentos v_i y v_j y los demás argumentos se dejan fijos. El conjunto de todos los tensores de orden k antisimétricos, que denotamos $\Lambda_k(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_k(V)$ como es inmediato comprobar. De la definición se desprende inmediatamente que si dos argumentos se repiten el valor de ω sobre estos argumentos es cero. Más generalmente tenemos la siguiente:

Propiedad 3.2. Sea $\omega \in \Lambda_k(V)$ y sean v_1, \dots, v_k , k vectores de V . Si los vectores dados no son linealmente independientes,

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$$

Demostración:

Si los vectores dados no son linealmente independientes entonces al menos uno de ellos se podrá poner como combinación lineal de los $k - 1$ restantes. Sea $v_i = a^1 v_1 + a^2 v_2 + \dots + a^i v_i + \dots + a^k v_k$ donde el término con acento circunflejo quiere decir que se omite. Entonces

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_k) &= a^1 \omega(v_1, v_2, \dots, \overset{\text{lugar } i}{v_1}, \dots, v_k) + a^2 \omega(v_1, v_2, \dots, \overset{\text{lugar } i}{v_2}, \dots, v_k) + \dots \\ &\quad + a^k \omega(v_1, v_2, \dots, \overset{\text{lugar } i}{v_k}, \dots, v_k) = 0 \end{aligned}$$

■

Construcción de tensores antisimétricos

Conjunto de índices y permutaciones

Cuando tenemos un conjunto de índices $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ dar una permutación $\sigma = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\}$ es dar los índices en un orden distinto, por ejemplo las permutaciones de 3 índices $\{1, 2, 3\}$ son:

1 2 3
 1 3 2
 2 1 3
 2 3 1
 3 1 2
 3 2 1

Toda permutación se puede descomponer en la composición de transposiciones (permutación en la que solo se intercambian dos índices). Llamamos signo de una permutación σ a $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^n$ donde n es el número de transposiciones en las que se puede descomponer σ .

Definición 3.3. Sea $T \in \mathcal{M}_k(V)$. Se llama antisimetrizado de T y se escribe $\text{Ant}(T)$ al tensor tal que

$$\text{Ant}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad (3.9)$$

donde \mathcal{P}_k es el conjunto de todas las permutaciones de los números $1, 2, \dots, k$ y

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{permutación par} \\ -1 & \text{permutación impar} \end{cases}$$

Ejemplos de antisimetrización

Sea $T \in \mathcal{M}_2(V)$, el antisimetrizado $\text{Ant}(T)$ de T será el tensor tal que para $v_1, v_2 \in V$ toma el valor

$$\text{Ant}(T)(v_1, v_2) = \frac{1}{2} (T(v_1, v_2) - T(v_2, v_1))$$

Sea $T \in \mathcal{M}_3(V)$ el antisimetrizado $\text{Ant}(T)$ de T será el tensor tal que para $v_1, v_2, v_3 \in V$ toma el valor

$$\begin{aligned} \text{Ant}(T)(v_1, v_2, v_3) = & \frac{1}{6} (T(v_1, v_2, v_3) + T(v_2, v_3, v_1) + T(v_3, v_1, v_2) \\ & - T(v_2, v_1, v_3) - T(v_1, v_3, v_2) - T(v_3, v_2, v_1)) \end{aligned}$$

Teorema 3.2. Se verifican las siguientes propiedades:

- Si $T \in \mathcal{M}_k(V)$ entonces $\text{Ant}(T) \in \Lambda_k(V)$.
- Si $\omega \in \Lambda_k(V)$ entonces $\text{Ant}(\omega) = \omega$.
- Si $T \in \mathcal{M}_k(V)$ entonces $\text{Ant}(\text{Ant}(T)) = \text{Ant}(T)$.

Demostración:

- a) Sea (i, j) la permutación (transposición) que cambia los índices i y j y deja los demás fijos. Si $\sigma \in \mathcal{P}_k$ llamaremos $\sigma' = \sigma \circ (i, j)$ a la permutación compuesta de la transposición de (i, j) con σ . Es decir, si $\sigma(1), \dots, \sigma(j), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(k)$ es una permutación de los índices $1, \dots, k$ entonces σ se puede escribir como la permutación $\sigma'(1), \dots, \sigma'(i), \dots, \sigma'(j), \dots, \sigma'(k)$. Visto esto podemos escribir

$$\begin{aligned}
 & \text{Ant}(T)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in \mathcal{P}_k} -\text{sgn}(\sigma') T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \\
 &= -\text{Ant}(T)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)
 \end{aligned}$$

- b) Si $\omega \in \Lambda_k(V)$ y $\sigma = (i, j)$ es una transposición entonces

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k) \quad (3.10)$$

Como toda σ es una composición de transposiciones, es decir $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_l$ donde σ_r para $r = 1, \dots, l$ son l transposiciones, para una tal permutación σ tendremos

$$\begin{aligned}
 \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) &= \omega(v_{\sigma_1(\sigma_2(\dots\sigma_l)(1))}, \dots, v_{\sigma_1(\sigma_2(\dots\sigma_l)(k))}) \\
 &= \text{sgn}(\sigma_l) \omega(v_{\sigma_1(\sigma_2(\dots\sigma_{l-1})(1))}, \dots, v_{\sigma_1(\sigma_2(\dots\sigma_{l-1})(k))}) \\
 &\dots \\
 &= \text{sgn}(\sigma_l) \text{sgn}(\sigma_{l-1}) \dots \text{sgn}(\sigma_1) \omega(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k)
 \end{aligned}$$

de donde la igualdad (3.10) es cierta para toda permutación σ

$$\begin{aligned}
 \text{Ant}(\omega)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k) \\
 &= \omega(v_1, \dots, v_k)
 \end{aligned}$$

- c) La propiedad c) es consecuencia de las propiedades a) y b) ■

Como ilustración de $\sigma \circ (i, j)$ véase el ejercicio 3.2

Vamos a ver un útil ejemplo de antisimetrización para tensores que son parcialmente antisimétricos. Más precisamente podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.3. Sea $T \in \mathcal{M}_{r+k+l}(V)$ tal que T es antisimétrico por separado respecto a los r primeros argumentos, respecto a los k segundos argumentos y respecto a los l últimos argumentos. Entonces el antisimetrizado de T viene dado por

$$\text{Ant}T(v_1, \dots, v_{r+k+l}) = \frac{r!k!l!}{(r+k+l)!} \sum_{\sigma \in C_{r,k,l}} \text{sgn}(\sigma)T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+k+l)}) \quad (3.11)$$

donde $C_{r,k,l}$ son las combinaciones de $r+k+l$ índices tomados de r en r , k en k y l en l de manera que verifiquen

$$\begin{aligned} \sigma(1) &< \dots < \sigma(r) \\ \sigma(r+1) &< \dots < \sigma(r+k) \\ \sigma(r+k+1) &< \dots < \sigma(r+k+l) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Demostración:

Tenemos

$$\text{Ant}(T)(v_1, \dots, v_{r+k+l}) = \frac{1}{(r+k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{r+k+l}} \text{sgn}(\sigma)T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+k+l)})$$

Identificamos las elecciones de las permutaciones de los $r+k+l$ índices con $r+k+l$ bolas enumeradas desde 1 hasta $r+k+l$. Construimos cada una de las permutaciones σ repartiendo estas bolas en 3 cajas. En la primera caja caben r bolas, en la segunda caben k bolas y en la tercera caben l bolas.

1. En la caja número 1 caben r bolas y tendremos

$$\binom{r+k+l}{r} = \binom{r+k+l}{k+l} = \frac{(r+k+l)!}{r!(k+l)!}$$

combinaciones diferentes.

2. Entre las $k+l$ bolas restantes escogemos k bolas para la caja número 2 y el resto de l bolas se colocan en la caja número 3. Tenemos $\binom{k+l}{k} = \binom{k+l}{l} = \frac{(k+l)!}{k!l!}$ combinaciones diferentes.
3. En total tendremos

$$\frac{(r+k+l)!}{r!(k+l)!} \frac{(k+l)!}{k!l!} = \frac{(r+k+l)!}{r!k!l!}$$

combinaciones posibles.

Obviamente el mismo resultado obtenemos empezando por cualquiera de las otras dos cajas.

Ahora tendremos en cuenta las propiedades de antisimetría de T : Calculamos

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}, v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+k)}, v_{\sigma(r+k+1)}, \dots, v_{\sigma(r+k+l)})$$

Cada elección de la permutación $\sigma(1), \dots, \sigma(r+k+l)$ la ordenamos de manera que verifiquen

$$\begin{aligned}\sigma(1) &< \dots < \sigma(r) \\ \sigma(r+1) &< \dots < \sigma(r+k) \\ \sigma(r+k+1) &< \dots < \sigma(r+k+l)\end{aligned}$$

de modo que para cada permutación ρ de los r primeros índices, para cada permutación τ de los k segundos índices y para cada permutación λ de los l últimos índices tenemos teniendo en cuenta el número de permutaciones de r , k y l elementos

$$\begin{aligned}&\sum_{\rho \in \mathcal{P}_r; \tau \in \mathcal{P}_k; \lambda \in \mathcal{P}_l} \text{sgn}(\rho) \cdot \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\lambda) \\ &T(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(r))}, v_{\tau(\sigma(r+1))}, \dots, v_{\tau(\sigma(r+k))}, v_{\lambda(\sigma(r+k+1))}, \dots, v_{\lambda(\sigma(r+k+l))}) \\ &= r!k!l!T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}, v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+k)}, v_{\sigma(r+k+1)}, \dots, v_{\sigma(r+k+l)})\end{aligned}$$

Finalmente la suma extendida a todas las permutaciones $\sigma \in \mathcal{P}_{r+k+l}$ las descomponemos en las $\frac{(r+k+l)!}{r!k!l!}$ combinaciones $C_{r,k,l}$ posibles junto con las $r!$ permutaciones ρ , las $k!$ permutaciones τ y las $l!$ permutaciones λ resultando

$$\begin{aligned}&Ant(T)(v_1, \dots, v_{r+k+l}) \\ &= \frac{r!k!l!}{(r+k+l)!} \sum_{\sigma \in C_{r,k,l}} \text{sgn}(\sigma)T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+k+l)})\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma(1) &< \dots < \sigma(r) \\ \sigma(r+1) &< \dots < \sigma(r+k) \\ \sigma(r+k+1) &< \dots < \sigma(r+k+l)\end{aligned}$$

■

3.1.5. Bases en el espacio de tensores antisimétricos

En general tenemos que si $\omega \in \Lambda_k(V)$ y $\eta \in \Lambda_l(V)$ el producto tensorial $\omega \otimes \eta \notin \Lambda_{k+l}(V)$. Esto lleva a introducir un nuevo producto tensorial para los tensores antisimétricos.

Definición 3.4. *Producto exterior:* Sean $\omega \in \Lambda_k(V)$ y $\eta \in \Lambda_l(V)$ se define el producto exterior de ω y η mediante

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Ant(\omega \otimes \eta)$$

Comentario 3.1. *El producto exterior es entonces*

$$\begin{aligned} & \omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Teorema 3.4. *El producto exterior viene dado por*

$$\begin{aligned} & \omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \sum_{\sigma \in C_{k,l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $C_{k,l}$ son las permutaciones de los $k+l$ índices de manera que verifiquen la propiedad

$$\begin{aligned} & \sigma(1) < \dots < \sigma(k) \\ & \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l) \end{aligned} \quad (3.15)$$

es decir, son las combinaciones de $k+l$ elementos tomados de k en k (o de l en l) que son un total de $\binom{k+l}{k} = \binom{k+l}{l} = \frac{(k+l)!}{k!l!}$ combinaciones.

Demostración:

Aplicamos el teorema 3.3. a la definición de producto exterior. Véase también el ejercicio 3.3 al respecto. ■

Propiedades 3.2. *Propiedades del producto exterior: Sean $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda_k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda_l(V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- a) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$
- b) $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$
- c) $\lambda \omega \wedge \eta = \omega \wedge \lambda \eta = \lambda(\omega \wedge \eta)$
- d) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
- e) Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal, $\omega \in \Lambda_k(W)$ y $\eta \in \Lambda_l(W)$ entonces

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 3.4. ■

La propiedad $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ también es cierta pero requiere algunos resultados previos.

Propiedades 3.3. *Sean $S \in \mathcal{M}_k(V)$ y $T \in \mathcal{M}_l(V)$ tenemos*

$$a) \quad \text{Ant}(\text{Ant}S \otimes T) = \text{Ant}(S \otimes T) \quad (3.16)$$

y

$$Ant(S \otimes AntT) = Ant(S \otimes T) \quad (3.17)$$

b)

$$Ant(S \otimes T) = (-1)^{kl} Ant(T \otimes S) \quad (3.18)$$

c) Si $Ant S = 0$

$$Ant(S \otimes T) = Ant(T \otimes S) = 0 \quad (3.19)$$

Demostración:

a)

$$\begin{aligned} & Ant(AntS \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} sgn(\sigma) AntS(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} sgn(\sigma) \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_k} sgn(\tau) S(v_{\tau(\sigma(1))}, \dots, v_{\tau(\sigma(k))}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} sgn(\sigma) sgn(\tau) S(v_{\tau(\sigma(1))}, \dots, v_{\tau(\sigma(k))}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

Por extensión de la notación consideramos \mathcal{P}_k como el subgrupo de permutaciones de $k+l$ índices que dejan invariantes los últimos l índices. Cuando $\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}$ recorre todas las permutaciones de \mathcal{P}_{k+l} , para una $\tau \in \mathcal{P}_k$ fija tenemos que $\tau\sigma$ recorre también todas las permutaciones de \mathcal{P}_{k+l} . En efecto, sea $\tau \in \mathcal{P}_k$ una permutación fijada de antemano y sea $\sigma' \in \mathcal{P}_{k+l}$ determinada. Entonces $\sigma' = \tau\sigma$ para alguna σ de \mathcal{P}_{k+l} pues basta elegir $\sigma = \tau^{-1}\sigma'$.

Por tanto si para cada τ y cada σ llamamos $\sigma' = \tau\sigma$ podemos escribir

$$\begin{aligned} & Ant(AntS \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma' \in \mathcal{P}_{k+l}} sgn(\sigma') S(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) T(v_{\sigma'(k+1)}, \dots, v_{\sigma'(k+l)}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma' \in \mathcal{P}_{k+l}} sgn(\sigma') S(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) T(v_{\sigma'(k+1)}, \dots, v_{\sigma'(k+l)}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma' \in \mathcal{P}_{k+l}} sgn(\sigma') (S \otimes T)(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k+l)}) \\ &= Ant(S \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

y tenemos la propiedad (3.16). La propiedad (3.17) se demuestra de la misma forma.

b) Sea $\tau \in \mathcal{P}_{k+l}$ la permutación siguiente

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & k+l \\ k+1 & k+2 & \dots & k+l & 1 & 2 & \dots & k \end{array}$$

es decir la reordenación que lleva los l últimos elementos a las l primeras posiciones y los k primeros elementos a las k últimas posiciones. Tenemos entonces que $\text{sgn}(\tau) = (-1)^{kl}$ pues para ello cada una de las l últimas posiciones realizan k transposiciones hasta colocarse en su lugar. De modo que $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau) = (-1)^{kl}\text{sgn}(\sigma)$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Ant}(S \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) S \otimes T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l)}) S(v_{\sigma\tau(l+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l+k)}) \end{aligned}$$

Finalmente poniendo $\sigma' = \sigma\tau$, tendremos $\text{sgn}(\sigma') = (-1)^{kl}\text{sgn}(\sigma)$ y podemos escribir teniendo en cuenta que cuando σ recorre todas las permutaciones \mathcal{P}_{k+l} , $\sigma' = \sigma\tau$ también las recorre.

$$\begin{aligned} \text{Ant}(S \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma' \in \mathcal{P}_{k+l}} (-1)^{kl} \text{sgn}(\sigma') (T \otimes S)(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(l+k)}) \\ &= (-1)^{kl} \text{Ant}(T \otimes S) \end{aligned}$$

c) Si $\text{Ant} S = 0$ aplicando la propiedad (3.16) resulta inmediatamente

$$\text{Ant}(S \otimes T) = \text{Ant}(\text{Ant} S \otimes T) = 0$$

Aplicando (3.18) obtenemos

$$\text{Ant}(T \otimes S) = (-1)^{kl} \text{Ant}(S \otimes T) = 0$$

■

Teorema 3.5. Sean $\omega \in \Lambda_k(V)$, $\eta \in \Lambda_l(V)$ y $\theta \in \Lambda_m(V)$, entonces

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Ant}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \quad (3.20)$$

Demostración:

Por definición de producto exterior podemos poner

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \text{Ant}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \text{Ant}\left(\frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Ant}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta\right) \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad (3.16)

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Ant}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \omega \wedge (\eta \wedge \theta) &= \frac{(k+l+m)!}{k!(m+l)!} \text{Ant}(\omega \otimes (\eta \wedge \theta)) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!(m+l)!} \text{Ant}\left(\omega \otimes \frac{(l+m)!}{l!m!} \text{Ant}(\eta \otimes \theta)\right) \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad (3.17)

$$\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Ant}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

■

Corolario 3.1. Sean $\omega^1, \dots, \omega^r$ r formas diferenciales tales que $\omega^i \in \Lambda_{k_i}(V)$ para todo $i = 1, \dots, r$ entonces

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r = \frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \dots k_r!} \text{Ant}(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r) \quad (3.21)$$

Demostración:

Procedemos por inducción. El resultado es cierto para $r = 3$ (véase teorema 3.5). Supongamos que el resultado es cierto para $r - 1$ y veamos que entonces es también cierto para r :

$$\begin{aligned}
\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r &= (\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{r-1}) \wedge \omega^r \\
&= \frac{(k_1 + \cdots + k_{r-1} + k_r)!}{(k_1 + \cdots + k_{r-1})! k_r!} \text{Ant}((\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{r-1}) \otimes \omega^r) \\
&= \frac{(k_1 + \cdots + k_{r-1} + k_r)!}{(k_1 + \cdots + k_{r-1})! k_r!} \text{Ant}\left(\frac{(k_1 + \cdots + k_{r-1})!}{k_1! \cdots k_{r-1}!} \text{Ant}(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^{r-1}) \otimes \omega^r\right) \\
&= \frac{(k_1 + \cdots + k_r)!}{k_1! \cdots k_r!} \text{Ant}(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^r)
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos aplicado la propiedad (3.16). ■

Vamos a pasar a la construcción de bases del espacio de tensores antisimétricos.

Teorema 3.6. *Sea $\{v_1, \dots, v_d\}$ una base del espacio vectorial V y $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ la correspondiente base del espacio dual V^* . Entonces el conjunto de todos los tensores*

$$\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_k} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq d$$

es una base de $\Lambda_k(V)$ que tiene por tanto dimensión

$$\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!}$$

Demostración:

Sea $\omega \in \Lambda_k(V) \subset \mathcal{M}_k(V)$. ω se puede escribir como

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d a_{i_1, \dots, i_k} \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k}$$

de modo que

$$\omega = \text{Ant } \omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d a_{i_1, \dots, i_k} \text{Ant}(\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k})$$

puesto que cada término $\text{Ant}(\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k})$ es el producto de una constante por un término de la forma $\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_k}$ (véase propiedad 3.21) estos elementos generan $\Lambda_k(V)$.

Pasemos a la independencia lineal: Primeramente observemos lo siguiente: Si tenemos dos conjuntos de k índices ordenados extraídos de un total de d índices

$$\begin{aligned}
i_1 &< i_2 < \cdots < i_k \\
j_1 &< j_2 < \cdots < j_k
\end{aligned}$$

pueden ocurrir dos cosas,

- Coinciden dos a dos todos ellos, es decir, $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_k = j_k$.
- Alguno de los índices j_r no coincide con ninguno de los i_r , es decir ninguna reordenación de los índices j_r los hará coincidir.

En consecuencia: Sean v_{j_1}, \dots, v_{j_k} k vectores de la base de V (dual de $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$) con

$$1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq d$$

$$\begin{aligned} \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) &= k! \text{Ant} \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}(v_{\sigma(j_1)}, \dots, v_{\sigma(j_k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) \delta_{\sigma(j_1)}^{i_1} \dots \delta_{\sigma(j_k)}^{i_k} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = \sigma(j_1), \dots, i_k = \sigma(j_k) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

y por lo comentado anteriormente que ninguna ordenación de los k índices j_r los hará coincidir con los índices i_r , salvo que σ sea la permutación identidad, tenemos también

$$\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Consideramos una combinación lineal igual a cero,

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d a_{i_1, \dots, i_k} \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k} = 0 \quad (3.22)$$

Aplicando la expresión (3.22) a los vectores v_{j_1}, \dots, v_{j_k} k tendremos

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d a_{i_1, \dots, i_k} \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = a_{j_1, \dots, j_k} = 0$$

lo que prueba la independencia lineal.

Finalmente la dimensión del $\Lambda_k(V)$ será el número de tensores del tipo

$$\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq d$$

es decir, el número de combinaciones que puedo formar a partir de un total de d índices tomados de k en k . El número de estas combinaciones es

$$\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!}$$

■

Ejemplos

1. $\Lambda_1(\mathbb{R}^3)$: La dimensión es $\binom{3}{1} = 3$. La base es $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$.
2. $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$: La dimensión es $\binom{3}{2} = 3$. La base es

$$\{\varphi^1 \wedge \varphi^2, \varphi^1 \wedge \varphi^3, \varphi^2 \wedge \varphi^3\}$$

aunque se suele utilizar

$$\{\varphi^2 \wedge \varphi^3, \varphi^3 \wedge \varphi^1, \varphi^1 \wedge \varphi^2\}$$

3. $\Lambda_3(\mathbb{R}^3)$: La dimensión es $\binom{3}{3} = 1$. La base es $\{\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \varphi^3\}$.
4. Dados $v, w \in \mathbb{R}^3$ dejamos como ejercicio 3.5 el cálculo de

$$\varphi^2 \wedge \varphi^3(v, w)$$

$$\varphi^3 \wedge \varphi^1(v, w)$$

$$\varphi^1 \wedge \varphi^2(v, w)$$

3.1.6. Determinantes

Sea V un espacio vectorial de dimensión d y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo en V , es decir una aplicación lineal de V en sí mismo. Vamos a definir la noción de determinante de f . A todo endomorfismo f de V le corresponde un endomorfismo f^* en $\Lambda_d(V)$, de modo que para $\omega \in \Lambda_d(V)$ tenemos, (véase (3.5)) $f^*\omega(v_1, \dots, v_d) = \omega(fv_1, \dots, fv_d)$ para todo $v_1, \dots, v_d \in V$. El espacio de tensores antisimétricos $\omega \in \Lambda_d(V)$ es de dimensión 1. Si $\{e_1, \dots, e_d\}$ es una base de V y $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ es la correspondiente base dual en V^* entonces $\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d$ es una base de $\Lambda_d(V)$ y podemos expresar $f^*(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)$ en función de esta base de modo que

$$f^*(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d) = \lambda \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d$$

Definición 3.5. Sea V un espacio vectorial y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo, $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V y $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ la correspondiente base dual en V^* . Entonces $\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d$ es una base de $\Lambda_d(V)$. El valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f^*(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d) = \lambda \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d$$

se llama determinante del endomorfismo f que escribiremos $\lambda = \det(f)$.

Veremos a continuación que $\det(f)$ no depende de la base $\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d$ elegida. Para ello necesitamos un resultado previo.

Lema 3.1. Sea V un espacio de dimensión 1, sea $e \neq 0$. Entonces $\{e\}$ es una base de V . Sea f un endomorfismo, de modo que

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow V \\ e &\rightarrow f(e) = \alpha e \end{aligned}$$

Al ser V de dimensión 1, el valor de α define de forma única el endomorfismo. La matriz representando f en una base determinada es una matriz de 1 fila por 1 columna que es independiente de la base elegida.

Demostración:

La matriz M representando f en una base $\{e\}$ es la matriz de 1 fila por 1 columna, $M = [\alpha]$. Elegimos ahora otra base en V , es decir cualquier otro vector $u \neq 0$. Escribiendo u en función de e , tendremos $u = se$ para algún $s \in \mathbb{R}$ no nulo. Por otra parte

$$f(e) = \alpha e = \alpha s^{-1}u$$

y

$$f(u) = f(se) = sf(e) = s\alpha s^{-1}u = \alpha u$$

pues s y s^{-1} son escalares. De modo que la matriz N representando f en la base $\{u\}$ es $N = [\alpha] = M$. ■

Teorema 3.7. *El determinante de un endomorfismo f en V no depende de la base elegida en la definición 3.5.*

Demostración:

Aplicamos el lema 3.1 al espacio $\Lambda_d(V)$ de dimensión 1 y al endomorfismo

$$\begin{aligned} f^* : \Lambda_d(V) &\rightarrow \Lambda_d(V) \\ \omega &\rightarrow f^*\omega \end{aligned}$$

definido por

$$f^*\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d = \det(f)\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d$$

Comentario 3.2. Sean $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V y $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ la correspondiente base dual en V^* . Entonces

$$f^*(\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d)(e_1, \dots, e_d) = \det(f)(\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d)(e_1, \dots, e_d) = \det(f)$$

Propiedad 3.3. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo en V dado por

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^d a_i^j e_j$$

donde $\{e_i; i = 1, \dots, d\}$ es una base de V . Tenemos que

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(d)}^d \quad (3.23)$$

Demostración:

Se demuestra mediante un simple cálculo:

$$\begin{aligned} \det(f) &= f^*(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(e_1, \dots, e_d) = (\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(f(e_1), \dots, f(e_d)) \\ &= d! \operatorname{Ant}(\varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^d)(f(e_1), \dots, f(e_d)) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma) (\varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^d)(f(e_{\sigma(1)}), \dots, f(e_{\sigma(d)})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma) \varphi^1(f(e_{\sigma(1)})) \dots \varphi^d(f(e_{\sigma(d)})) \end{aligned}$$

ahora bien

$$\begin{aligned} \varphi^1(f(e_{\sigma(1)})) &= \varphi^1\left(\sum_{j=1}^d a_{\sigma(1)}^j e_j\right) = \sum_{j=1}^d a_{\sigma(1)}^j \varphi_1(e_j) = a_{\sigma(1)}^1 \\ &\dots \\ \varphi^d(f(e_{\sigma(d)})) &= \varphi^d\left(\sum_{j=1}^d a_{\sigma(d)}^j e_j\right) = \sum_{j=1}^d a_{\sigma(d)}^j \varphi_d(e_j) = a_{\sigma(d)}^d \end{aligned}$$

de donde

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(d)}^d$$

■

Propiedades 3.4. -

- Sean f y g endomorfismos en un espacio vectorial V , entonces $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$
- $\det(f) \neq 0$ si y solo si f es biyectiva.
- $\det(Id) = 1$ siendo Id la aplicación idéntica en V .
- $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

Demostración:

En las demostraciones $\{e_1, \dots, e_d\}$ será una base de V y $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ será la correspondiente base dual en V^* .

- Demostración de a): Sean f y g endomorfismos en un espacio vectorial V y $f \circ g$ la aplicación compuesta. Tenemos $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, en efecto para $\omega \in \Lambda_d(V)$ y $v_1, \dots, v_d \in V$

$$\begin{aligned} (f \circ g)^* \omega(v_1, \dots, v_d) &= \omega((f \circ g)(v_1), \dots, (f \circ g)(v_d)) \\ &= \omega(f(g(v_1)), \dots, f(g(v_d))) = f^* \omega(g(v_1), \dots, g(v_d)) \\ &= (g^* \circ f^*) \omega(v_1, \dots, v_d) \end{aligned}$$

en consecuencia para una base $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi^d$ en $\Lambda_d(V)$

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= (f \circ g)^* \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(e_1, \dots, e_d) \\ &= (g^* \circ f^*) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(e_1, \dots, e_d) = g^*(f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi^d))(e_1, \dots, e_d) \\ &= g^*(\det(f) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(e_1, \dots, e_d) = \det(f) g^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(e_1, \dots, e_d) \\ &= \det(f) \cdot \det(g) \end{aligned}$$

- Demostración de b): Demostraremos que $\det(f) \neq 0$ si y solo si $f(e_1), \dots, f(e_d)$ son linealmente independientes, por lo tanto forman una base de V lo que equivale a que f es biyectiva.

$$\det(f) = f^*(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(e_1, \dots, e_d) = \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(f(e_1), \dots, f(e_d))$$

de donde si $\det(f) \neq 0$ entonces $f(e_1), \dots, f(e_d)$ son linealmente independientes pues si fuesen linealmente dependientes $\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(f(e_1), \dots, f(e_d)) = 0$ (véase propiedad 3.2).

Recíprocamente si $f(e_1), \dots, f(e_d)$ son linealmente independientes entonces $\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(f(e_1), \dots, f(e_d)) \neq 0$, en efecto: Si son linealmente independientes $\{f(e_1), \dots, f(e_d)\}$ es una base de V y sea ϕ^1, \dots, ϕ^d su base dual, tendremos que existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que

$$1 = \phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^d(f(e_1), \dots, f(e_d)) = \lambda \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(f(e_1), \dots, f(e_d)) = \lambda \det(f)$$

por lo que $\det(f) = \frac{1}{\lambda} \neq 0$.

- Demostración de c):

$$\begin{aligned} \det(Id) &= (Id)^* \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(e_1, \dots, e_d) = \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(Id(e_1), \dots, Id(e_d)) \\ &= \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d(e_1, \dots, e_d) = 1 \end{aligned}$$

- Demostración de d): Tenemos $Id = f \circ f^{-1}$. Por las propiedades (a) y (c) $1 = \det(Id) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f) \cdot \det(f^{-1})$. De donde

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$$

■

Determinante de una matriz

Dado un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ y dada $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base en V , el endomorfismo f se expresará en esta base mediante $f(e_i) = \sum_{j=1}^d a_i^j e_j$ y la matriz $A = [a_i^j]$ $i, j = 1, \dots, d$ es la matriz que representa a f en esta base. Definimos el determinante de A mediante

$$\det(A) = \det(f)$$

Las siguientes propiedades son consecuencia directa de las propiedades del determinante de un endomorfismo.

Propiedades 3.5. -

- a) $\det(A.B) = \det(A). \det(B)$
- b) $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$
- c) $\det(A) = \det(A^t)$
- d) Si intercambiamos dos columnas en A el $\det(A)$ cambia de signo.
- e) Si intercambiamos dos filas en A el $\det(A)$ cambia de signo.

Demostración:

- (a) es una consecuencia directa de la propiedad (a) en 3.4: Sean f y g dos endomorfismos en V , A y B las matrices correspondientes respecto a una base $\{e_1, \dots, e_d\}$, entonces la matriz correspondiente a $f \circ g$ es $A.B$ y aplicando la propiedad (a) de 3.4 tenemos $\det(A.B) = \det(A). \det(B)$.
- (b) es una consecuencia directa de la propiedad (d) en 3.4.
- La propiedad (c) se deja como ejercicio 3.6.
- La propiedad (d) es una consecuencia del carácter antisimétrico de la función determinante:

$$\det A = \det f = (\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(f(e_1), \dots, f(e_d))$$

Si intercambiamos dos columnas resulta

$$\begin{aligned} & (\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(f(e_1), \dots, f(e_i), \dots, f(e_j), \dots, f(e_d)) \\ &= -(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d)(f(e_1), \dots, f(e_j), \dots, f(e_i), \dots, f(e_d)) \end{aligned}$$

- La propiedad (e) es consecuencia de la propiedad (d) aplicada a la matriz transpuesta.

■ Sabemos que el determinante de f no depende de la base elegida. Si cambiamos a otra base de V , la matriz que representa f en la nueva base cambia pero no cambia su determinante. De forma más precisa tenemos el siguiente

Teorema 3.8. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo y $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base en V , el endomorfismo f se expresará en esta base mediante $f(e_i) = \sum_{j=1}^d a_i^j e_j$. Sea ahora otra base $\{u_1, \dots, u_d\}$ en V y sea $S = [s_i^j]$ la matriz del cambio de base, es decir

$$u_i = \sum_{l=1}^d s_i^l e_l$$

Entonces la aplicación f en la nueva base viene representada por la matriz

$$B = S^{-1}AS$$

y en consecuencia

$$\det(B) = \det(S^{-1}AS) = \det(A)$$

Demostración:

Queremos encontrar $B = [b_i^l]$ tal que

$$f(u_i) = \sum_{l=1}^d b_i^l u_l$$

Tenemos

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^d a_i^j e_j$$

y

$$u_i = \sum_{k=1}^d s_i^k e_k \quad \text{y} \quad e_j = \sum_{l=1}^d (s^{-1})_j^l u_l$$

donde designamos los términos de la matriz S^{-1} mediante $(s^{-1})_j^l$, de modo que

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d a_i^j (s^{-1})_j^l u_l$$

y por otra parte

$$f(u_i) = f\left(\sum_{k=1}^d s_i^k e_k\right) = \sum_{k=1}^d s_i^k f(e_k)$$

Expresando todo en función de la nueva base

$$\begin{aligned}
f(u_i) &= \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d s_i^k a_k^j (s^{-1})_j^l u_l \\
&= \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d (s^{-1})_j^l a_k^j s_i^k u_l
\end{aligned}$$

identificando los coeficientes de u_l

$$b_i^l = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d (s^{-1})_j^l a_k^j s_i^k$$

que con notación matricial se escribe

$$B = S^{-1}AS$$

Aplicando las propiedades (a) y (b) en 3.5 tendremos

$$\det(B) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(A)$$

■

Observación 3.1. En la demostración anterior hemos considerado implícitamente el cambio de base como la composición de tres aplicaciones, a saber

$$\begin{aligned}
s: V &\rightarrow V \\
e_i &\rightarrow u_i = s(e_i) \quad i = 1, \dots, d
\end{aligned}$$

cuya matriz asociada respecto a la base $\{e_1, \dots, e_d\}$ es S ,

$$\begin{aligned}
f: V &\rightarrow V \\
e_i &\rightarrow f(e_i) \quad i = 1, \dots, d
\end{aligned}$$

cuya matriz asociada respecto a la base $\{e_1, \dots, e_d\}$ es A y

$$\begin{aligned}
s^{-1}: V &\rightarrow V \\
u_i &\rightarrow e_i = s^{-1}(u_i) \quad i = 1, \dots, d
\end{aligned}$$

cuya matriz asociada respecto a la base $\{u_1, \dots, u_d\}$ es S^{-1} . De modo que

$$\begin{aligned}
s^{-1} \circ f \circ s: V &\xrightarrow{s} V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{s^{-1}} V \\
e_i &\longrightarrow u_i = s(e_i) \longrightarrow f(s(e_i)) \longrightarrow s^{-1}(f(s(e_i))) \quad i = 1, \dots, d
\end{aligned}$$

y la matriz asociada a la aplicación compuesta $s^{-1} \circ f \circ s$ respecto a la base $\{u_1, \dots, u_d\}$ es $B = S^{-1}AS$.

Determinante de d vectores

Sea V un espacio vectorial de dimensión d . Dados d vectores v_1, \dots, v_d en V y una base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de V sabemos que existe una única aplicación lineal $f: V \rightarrow V$ tal que

$$f(e_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, d$$

Por definición pondremos

$$\det(v_1, \dots, v_d) = \det f$$

Dada la base $\{e_1, \dots, e_d\}$ cada v_i se podrá escribir como combinación lineal de los elementos de esta base, es decir,

$$v_i = \sum_{j=1}^d a_i^j e_j \quad \forall i = 1, \dots, d$$

Por lo tanto la matriz A que representa a la aplicación f en dicha base es

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^d \\ \dots & & \dots \\ a_d^1 & \dots & a_d^d \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\det(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(d)}^d$$

Observemos que f depende de la base $\{e_1, \dots, e_d\}$ elegida.

3.1.7. Tensores y conceptos geométricos

Los tensores van a representar conceptos geométricos.

Elemento de volumen

Veamos un ejemplo: Sea \mathbb{R}^d el espacio vectorial euclídeo de dimensión d y sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base ortonormal de vectores, es decir tal que el producto escalar $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, d$. Sea $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ la base dual.

Definición 3.6. Al único tensor $\omega \in \Lambda_d(\mathbb{R}^d)$ tal que $\omega(e_1, \dots, e_d) = 1$ se le llama elemento de volumen de \mathbb{R}^d .

Comentario 3.3. El elemento de volumen se expresa en la base dual como $\omega = \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^d$

Propiedad 3.4. Sean v_1, \dots, v_d d vectores de \mathbb{R}^d tenemos que

$$|\omega(v_1, \dots, v_d)| = |\det(v_1, \dots, v_d)|$$

es el volumen del politopo (que llamaremos también d -paralelepípedo) formado por los vectores v_1, \dots, v_d .

Demostración:

Sea \mathbf{Q} el cubo unidad en \mathbb{R}^d . Hagamos el cambio de variable

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ e_i &\rightarrow v_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Volumen de } T(\mathbf{Q}) &= \int_{T(\mathbf{Q})} 1 = \int_{\mathbf{Q}} |\det(T)| \\ &= |\det(T)| \int_{\mathbf{Q}} 1 = |\det(T)| = |\omega(v_1, \dots, v_d)| \end{aligned}$$

■

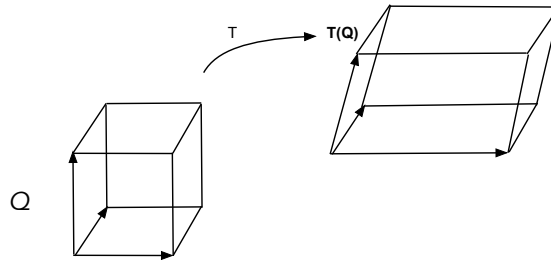


Figura 3.1 Elemento de volúmen en \mathbb{R}^3

Vamos a expresar el elemento de volumen en otra base cualquiera.

Teorema 3.9. Sea $\{u_1, \dots, u_d\}$ una base de \mathbb{R}^d y $\{\phi^1, \dots, \phi^d\}$ la base dual con

$$u_i = \sum_{j=1}^d s_i^j e_j$$

Entonces el elemento de volumen

$$\omega = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d = \det(S) \phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^d$$

donde S es la matriz de cambio de base $S = [s_i^j]_{i,j=1}^d$

Demostración:

Tenemos

$$\omega = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d = \lambda \phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^d$$

Aplicando ω a los vectores u_1, \dots, u_d de donde

$$\det(S) = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(u_1, \dots, u_d) = \lambda \phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^d(u_1, \dots, u_d) = \lambda$$

■

Producto vectorial

Dados v_1, \dots, v_{d-1} vectores de \mathbb{R}^d , sea $\varphi \in \Lambda_d(\mathbb{R}^d)$ el tensor de orden 1 (forma lineal) definida por

$$\varphi(w) = \det [v_1 \ \dots \ v_{d-1} \ w]$$

Sabemos que existe un único $z \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$(z, w) = \varphi(w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^d$$

(véase ejercicio 3.7). Entonces z recibe el nombre de producto vectorial de los vectores v_1, \dots, v_{d-1} y se escribe

$$z = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{d-1}$$

Ejemplos

- Sean v_1 y v_2 dos vectores en \mathbb{R}^3 , entonces el producto vectorial

$$z = v_1 \times v_2$$

viene dado por

$$(z, w) = \det[v_1 \ v_2 \ w]$$

pasando a componentes

$$z^1 w^1 + z^2 w^2 + z^3 w^3 = \det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & w^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & w^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & w^3 \end{bmatrix}$$

desarrollando el determinante por la última columna (véase ejercicio 3.8)

$$z^1 w^1 + z^2 w^2 + z^3 w^3 = w^1 \det \begin{bmatrix} v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \end{bmatrix} - w^2 \det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^3 & v_2^3 \end{bmatrix} + w^3 \det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{bmatrix}$$

Tomando sucesivamente $w = e_1 = (1, 0, 0)^t$, $e_2 = (0, 1, 0)^t$, $e_3 = (0, 0, 1)^t$ resulta $z = (z^1, z^2, z^3)^t$ donde

$$z^1 = \det \begin{bmatrix} v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \end{bmatrix}$$

$$z^2 = -\det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^3 & v_2^3 \end{bmatrix}$$

$$z^3 = \det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{bmatrix}$$

Formalmente se suele escribir el producto vectorial como

$$z = v_1 \times v_2 = \det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & e_1 \\ v_1^2 & v_2^2 & e_2 \\ v_1^3 & v_2^3 & e_3 \end{bmatrix}$$

y se desarrolla el determinante por la última columna.

- Sea $v \in \mathbb{R}^2$. Vamos a calcular en $z = v \times$. Observemos que en \mathbb{R}^2 el producto vectorial solo tiene un factor. Pongamos

$$v = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

Para todo $w \in \mathbb{R}^2$

$$(z, w) = \det(v, w)$$

$$z^1 = \det \begin{bmatrix} v^1 & 1 \\ v^2 & 0 \end{bmatrix} = -v^2$$

y

$$z^2 = \det \begin{bmatrix} v^1 & 0 \\ v^2 & 1 \end{bmatrix} = v^1$$

de modo que

$$v \times = \begin{bmatrix} -v^2 \\ v^1 \end{bmatrix}$$

- Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$. El producto vectorial de estos 3 vectores lo podemos escribir formalmente en función de la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ como

$$z = v_1 \times v_2 \times v_3 = \det \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & e_1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & e_2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 & e_3 \\ v_1^4 & v_2^4 & v_3^4 & e_4 \end{bmatrix}$$

El producto vectorial proporciona siempre un vector ortogonal a cada uno de los factores. En efecto, veamos el ejemplo de \mathbb{R}^3 . Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ y sea $z = v_1 \times v_2$, tenemos

$$(z, w) = \det[v_1, v_2, w] \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$$

eligiendo $w = v_1$

$$(z, v_1) = \det[v_1, v_2, v_1] = 0$$

pues se repite el vector v_1 . Eligiendo $w = v_2$ obtenemos análogamente

$$(z, v_2) = \det[v_1, v_2, v_2] = 0$$

Utilizando el mismo razonamiento obtenemos el resultado en general para \mathbb{R}^d . Por ejemplo si $v \in \mathbb{R}^2$, $v \times$ es un vector ortogonal a v .

Otras aplicaciones de los tensores y determinantes

En el ejercicio (3.9 se deduce la regla de Cramer para resolver un sistema lineal de ecuaciones y en el ejercicio (3.10 se aplica para obtener una fórmula para calcular la inversa de una matriz.

Comentario 3.4. *La fórmula 3.23 solo es utilizable en la práctica para matrices de orden reducido (digamos $d = 2, 3$) pues el número de operaciones resulta inabordable incluso con la ayuda de ordenadores para ordenes de la matriz altos. Por este motivo la regla de Cramer (ejercicio 3.9) para resolver sistemas o el cálculo de la inversa de la matriz con la fórmula del ejercicio 3.10 es también inutilizable en la práctica para valores de $d > 3$,*

En los siguientes ejercicios (3.11, 3.12 y 3.13 se estudian otras propiedades geométricas de los tensores.

En particular en el ejercicio 3.11 se demuestra que en \mathbb{R}^d dados d vectores w_1, \dots, w_d si G es la matriz de términos $g_{ij} = (w_i, w_j)$ $i, j = 1, \dots, d$ entonces para el elemento de volumen ω en \mathbb{R}^d resulta

$$|\omega(w_1, \dots, w_d)| = \sqrt{\det(G)}$$

y concluimos que $\sqrt{\det(G)}$ es el volumen del d -paralelepípedo formado por los vectores w_1, \dots, w_d .

Por otra parte en el ejercicio 3.12 dados $d-1$ vectores de \mathbb{R}^d , $w_1, \dots, w_{d-1} \in \mathbb{R}^d$, obtenemos

$$\|w_1 \times \dots \times w_{d-1}\| = \sqrt{\det(G)}$$

donde G es la matriz de términos $g_{ij} = (w_i, w_j)$; $i, j = 1, \dots, d-1$. Considerando estos vectores como vectores de \mathbb{R}^{d-1} , podemos interpretar $\|w_1 \times \dots \times w_{d-1}\| = \sqrt{\det(G)}$ como el volumen del $(d-1)$ -paralelepípedo formado por los vectores w_1, \dots, w_{d-1} . En el ejercicio 3.13 consideramos el caso particular de dos vectores v, w en \mathbb{R}^3 : La matriz G es una matriz de dos filas por dos columnas

$$G = \begin{bmatrix} (v, v) & (v, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{bmatrix}$$

y resulta

$$\|v \times w\| = \sqrt{\det(G)}$$

que es área del paralelogramo formado por v y w

Elemento de área

Vamos a relacionar el área de un paralelogramo formado por dos vectores v y w en \mathbb{R}^3 con los tensores. Es decir vamos a construir un tensor antisimétrico en $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ que al aplicarlo a dos vectores nos da el área del paralelogramo formado por ellos.

En \mathbb{R}^3 consideremos dos vectores v y w , $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal y sea $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ la correspondiente base dual. Dado un vector $q = (q^1, q^2, q^3)^t$ de \mathbb{R}^3 consideramos el tensor antisimétrico $\omega \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$\omega = q^1 \varphi^2 \wedge \varphi^3 + q^2 \varphi^3 \wedge \varphi^1 + q^3 \varphi^1 \wedge \varphi^2 \quad (3.24)$$

Propiedad 3.5. Dado un vector $q = (q^1, q^2, q^3)^t \in \mathbb{R}^3$, sea $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ definida por (3.24). Para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$ se verifica

$$\omega(v, w) = (q, v \times w)$$

Demostración:

Tenemos

$$\varphi^2 \wedge \varphi^3(v, w) = \varphi^2(v)\varphi^3(w) - \varphi^2(w)\varphi^3(v) = v^2 w^3 - w^2 v^3$$

$$\varphi^3 \wedge \varphi^1(v, w) = \varphi^3(v)\varphi^1(w) - \varphi^3(w)\varphi^1(v) = v^3 w^1 - w^3 v^1$$

$$\varphi^1 \wedge \varphi^2(v, w) = \varphi^1(v)\varphi^2(w) - \varphi^1(w)\varphi^2(v) = v^1 w^2 - w^1 v^2$$

de donde

$$\begin{aligned} \omega(v, w) &= q^1(v^2 w^3 - w^2 v^3) + q^2(v^3 w^1 - w^3 v^1) + q^3(v^1 w^2 - w^1 v^2) \\ &= (q, v \times w) \end{aligned}$$

Vamos a elegir el vector q de manera que $\omega(v, w)$ represente el área del paralelogramo formado por v y w : Tomando

$$q = n = \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$$

es decir tomando el vector normal unitario al plano formado por v y w

$$\omega(v, w) = (n, v \times w) = \|v \times w\|$$

que es el área del paralelogramo (véase el ejercicio 3.13). El tensor ω recibe el nombre de elemento de área. Tenemos la siguiente definición:

Definición 3.7. Sea n el vector normal unitario a un plano Π . Es decir $\|n\| = 1$ y $(n, v) = 0$ para todo $v \in \Pi$. El tensor $\omega \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = n^1 \varphi^2 \wedge \varphi^3 + n^2 \varphi^3 \wedge \varphi^1 + n^3 \varphi^1 \wedge \varphi^2 \quad (3.25)$$

se llama elemento de área asociado al plano Π .

Comentario 3.5. Según lo visto anteriormente el elemento de área aplicado a dos vectores v y w nos da el área del paralelogramo formado por estos vectores. Tenemos además

$$\omega(v, w) = (n, v \times w)$$

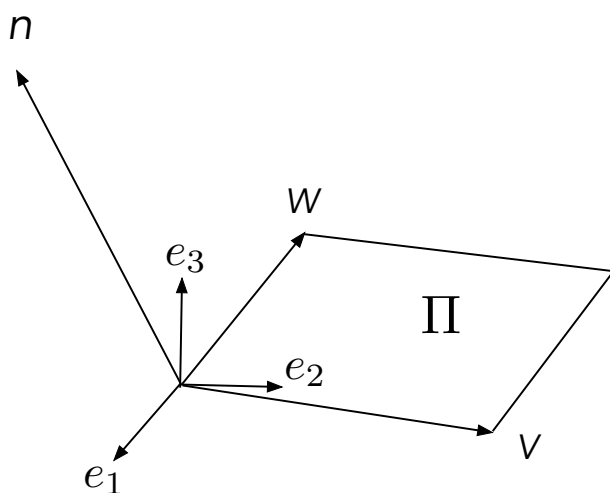


Figura 3.2 Elemento de área en \mathbb{R}^3

Propiedad 3.6. En un plano normal al vector unitario $n = (n^1, n^2, n^3)^t$ se verifica

- $n^1\omega = \varphi^2 \wedge \varphi^3$
- $n^2\omega = \varphi^3 \wedge \varphi^1$
- $n^3\omega = \varphi^1 \wedge \varphi^2$

Demostración:

Sea $q \in \mathbb{R}^3$ y sea $n = \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$. Poniendo $\alpha = \|v \times w\|$

$$\begin{aligned}(q, n)\omega(v, w) &= (q, n)(n, v \times w) \\ &= (q, n)\alpha = (q, \alpha n) = (q, v \times w)\end{aligned}$$

Tomamos sucesivamente $q = e_1, e_2, e_3$. Para $q = e_1$ tenemos $(e_1, n) = n^1$ y

$$n^1\omega(v, w) = (e_1, v \times w) = (v \times w)^1 = v^2w^3 - w^2v^3 = \varphi^2 \wedge \varphi^3(v, w)$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$ por lo tanto $n^1\omega = \varphi^2 \wedge \varphi^3$. Para e_2 y e_3 se procede de igual modo. ■

Elemento de flujo de un vector a través de una superficie

Como en la sección anterior, dado un vector $q \in \mathbb{R}^3$ consideramos el tensor $\phi \in \Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$\phi = q^1\varphi^2 \wedge \varphi^3 + q^2\varphi^3 \wedge \varphi^1 + q^3\varphi^1 \wedge \varphi^2$$

Vamos a interpretar físicamente este tensor: Aplicando la propiedad anterior (3.6)

$$\begin{aligned}\phi &= q^1\varphi^2 \wedge \varphi^3 + q^2\varphi^3 \wedge \varphi^1 + q^3\varphi^1 \wedge \varphi^2 \\ &= q^1n^1\omega + q^2n^2\omega + q^3n^3\omega \\ &= (q^1n^1 + q^2n^2 + q^3n^3)\omega = (q, n)\omega\end{aligned}$$

siendo ω el elemento de área. De modo que

$$\phi(v, w) = (q, n)\omega(v, w)$$

representa el flujo del vector q en la dirección normal al plano determinado por v y w que atraviesa el paralelogramo formado por v y w .

Elemento de línea

En \mathbb{R}^3 consideremos un vector t de norma $\|t\| = 1$. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal, en esta base $t = (t^1, t^2, t^3)^t$. Sea $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ la correspondiente base dual. Tenemos $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 \in \Lambda_1(\mathbb{R}^3)$.

Definición 3.8. *El tensor*

$$\tau = t^1 \varphi^1 + t^2 \varphi^2 + t^3 \varphi^3$$

se llama *elemento de línea asociada a la recta* $r : \{\lambda t ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Dado un vector en la dirección de la recta r , $v = \|v\|t$, tenemos

$$\tau(v) = t^1 \varphi^1(v) + t^2 \varphi^2(v) + t^3 \varphi^3(v) = t^1 v^1 + t^2 v^2 + t^3 v^3 = \|v\|$$

Es decir $\tau(v)$ es la longitud del vector v .

Ejercicios del Capítulo 3

3.1. Demostrar la propiedad 3.1.

3.2. Sea σ la permutación de los índices 1, 2, 3, 4 dada por $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 4$. Calcular $\sigma' = \sigma \circ (1, 2)$ y verificar que σ es la permutación $\sigma'(2), \sigma'(1), \sigma'(3), \sigma'(4)$

3.3. Demostrar la expresión 3.14 para el producto exterior

3.4. Demostrar las propiedades 3.2.

3.5. Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas en una determinada base $v = (v^1, v^2, v^3)^t$ y $w = (w^1, w^2, w^3)^t$. Calcular

- a) $\varphi^2 \wedge \varphi^3(v, w)$
- b) $\varphi^3 \wedge \varphi^1(v, w)$
- c) $\varphi^1 \wedge \varphi^2(v, w)$

donde $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ es la correspondiente base dual de \mathbb{R}^3

3.6. Demostrar que $\det(A) = \det(A^t)$

3.7. Sea φ una la forma lineal en \mathbb{R}^d . Demostrar que existe un $z \in \mathbb{R}^d$ único tal que

$$(z, w) = \varphi(w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^d$$

Demostrar además que

$$\|z\| = \|\varphi\|$$

3.8. Desarrollar el cálculo del determinante de una matriz por columnas: Demostrar que el determinante de una matriz $A = [a_i^j]_{i,j=1}^d$ se puede calcular mediante el desarrollo por los elementos de la última columna:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^d (-1)^{d+j} a_d^j \det(A_d^j)$$

donde A_d^j es la matriz obtenida a partir de la matriz A suprimiendo la fila j y la columna d .

3.9. Sea $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una aplicación lineal y considerar el siguiente problema: Dado $y \in \mathbb{R}^d$ hallar $x \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$f(x) = y$$

Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de \mathbb{R}^d . Sea A la matriz representando f en esta base dada por

$$A = [a_1, \dots, a_d] = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_d^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^d & \dots & a_d^d \end{bmatrix}$$

A su vez escribimos $x = \sum_{i=1}^d x^i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^d y^i e_i$ en función de sus componentes en la base. El sistema de ecuaciones a resolver se escribe

$$A \begin{bmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^d \end{bmatrix}$$

Demostrar que la solución x del sistema de ecuaciones viene dada por

$$x^i = \frac{\det(a_1, \dots, \overset{\text{posición } i}{y}, \dots, a_d)}{\det A} \quad \forall i = 1, \dots, d$$

3.10. Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior demostrar que la inversa de A se puede calcular mediante la fórmula

$$A^{-1} = \frac{\det A_{adj}}{\det A}$$

donde A_{adj} es la matriz adjunta de A . La matriz adjunta de A es la matriz de cofactores de la matriz traspuesta de A . La matriz de cofactores se obtiene sustituyendo cada término a_j^i por el determinante de la matriz obtenida suprimiendo la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

3.11. Sea $\omega \in \Lambda_d(\mathbb{R}^d)$ el elemento de volumen determinado por la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_d\}$, es decir verificando $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, d$. Sean $w_1, \dots, w_d \in \mathbb{R}^d$ y llamemos

$$g_{ij} = (w_i, w_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, d$$

Demostrar que

$$|\omega(w_1, \dots, w_d)| = \sqrt{\det(G)}$$

donde G es la matriz de términos g_{ij} ; $i, j = 1, \dots, d$ y concluir que $\sqrt{\det(G)}$ es el volumen del d -paralelepípedo formado por los vectores w_1, \dots, w_d .

3.12. Sean $w_1, \dots, w_{d-1} \in \mathbb{R}^d$, demostrar que

$$\|w_1 \times \dots \times w_{d-1}\| = \sqrt{\det(G)}$$

donde G es la matriz de términos $g_{ij} = (w_i, w_j)$; $i, j = 1, \dots, d-1$

3.13. Este ejercicio consiste en aplicar el anterior ejercicio 3.12 en \mathbb{R}^3 : Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$ y

$$G = \begin{bmatrix} (v, v) & (v, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{bmatrix}$$

Demostrar que $\sqrt{\det(G)}$ es el área del paralelogramo formado por v y w y concluir

$$\|v \times w\| = \sqrt{(v, v)(w, w) - (v, w)^2}$$

Capítulo 4

Espacio Tangente en \mathbb{R}^d

Resumen

En este capítulo se introduce la noción de espacio tangente en \mathbb{R}^d . Aquí se ha introducido el espacio tangente como espacio de derivaciones, uno de los métodos habituales en geometría diferencial (véase por ejemplo [4]) pues esto nos permite introducir de una forma inmediata los cambios de base utilizando las herramientas propias del álgebra lineal. En la última sección se introduce la noción de forma diferencial en un punto $p \in \mathbb{R}^d$. Las referencias básicas son [6] y [3].

4.1. Vectores tangentes

En \mathbb{R}^d sea $U(p)$ un entorno de $p \in \mathbb{R}^d$. Sea \mathcal{F}_p el espacio vectorial de las funciones de clase C^∞ definidas en $U(p)$ y a valores reales,

$$f \in \mathcal{F}_p \quad f : U(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

Definición 4.1. Se llama vector tangente en un punto $p \in U(p) \subset \mathbb{R}^d$ a toda aplicación

$$X_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que X_p es lineal, es decir

$$X_p(f+g) = X_p(f) + X_p(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_p \quad (4.1)$$

$$X_p(\lambda f) = \lambda X_p(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

y además verifica la siguiente propiedad de Leibnitz

$$X_p(f \cdot g) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_p \quad (4.3)$$

El conjunto de vectores tangentes en $p \in U(p)$ se llama espacio tangente en p y lo designamos mediante \mathcal{T}_p

Comentario 4.1. *A las aplicaciones que verifican la propiedad (4.3) se les llama derivaciones.*

Veamos una propiedad esencial de las derivaciones:

Propiedad 4.1. *Sea X_p un vector tangente en p . Si c es la función constante entonces $X_p(c) = 0$*

Demostración:

Basta probar que $X_p(f_1) = 0$ para la función constante $f_1(x) = 1$ para todo $x \in U(p)$. En efecto para $f(x) = c$ para todo $x \in U(p)$ tendremos

$$X_p(f) = X_p(c \cdot f_1) = cX_p(f_1)$$

y bastará probar que $X_p(f_1) = 0$: Como $f_1 = f_1 \cdot f_1$ tenemos

$$X_p(f_1) = X_p(f_1 \cdot f_1) = f_1(p) \cdot X_p(f_1) + f_1(p) \cdot X_p(f_1) = 2X_p(f_1)$$

de donde $X_p(f_1) = 0$. ■

La siguiente propiedad de los vectores tangentes es también una consecuencia de la propiedad de Leibnitz (4.3)

Propiedad 4.2. *Si $f(p) = g(p) = 0$ entonces $X_p(f \cdot g) = 0$*

Demostración:

De la propiedad del producto (4.3) tenemos

$$X_p(f \cdot g) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) = 0$$
■

Teorema 4.1. \mathcal{T}_p tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} con la operación suma

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}_p \quad (4.4)$$

y la operación producto por un escalar

$$(\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Demostración:

Con las definiciones anteriores de suma de vectores tangentes y producto de un escalar por un vector tangente se prueba inmediatamente que $X_p + Y_p$ es una aplicación lineal de $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$. Probemos la propiedad de Leibnitz (4.3) para la suma:

$$\begin{aligned} (X_p + Y_p)(f \cdot g) &= X_p(f \cdot g) + Y_p(f \cdot g) \\ &= f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) + f(p)Y_p(g) + g(p)Y_p(f) \\ &= f(p)(X_p + Y_p)(g) + g(p)(X_p + Y_p)(f) \end{aligned}$$

y para el producto por un escalar:

$$\begin{aligned} (\lambda X_p)(f \cdot g) &= \lambda X_p(f \cdot g) \\ &= \lambda(f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)) \\ &= \lambda f(p)X_p(g) + \lambda g(p)X_p(f) \\ &= f(p)(\lambda X_p)(g) + g(p)(\lambda X_p)(f) \end{aligned}$$

■

Vamos a ver algunos ejemplos de vectores tangentes. En particular veremos los vectores tangentes asociados a un sistema de coordenadas. Consideremos un sistema de funciones coordenadas en \mathbb{R}^d : Sean $\{x^1, \dots, x^d\}$ un conjunto de funciones coordenadas independientes de clase C^∞ , es decir un conjunto de d aplicaciones

$$\begin{aligned} x^i : U(p) &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\rightarrow x^i(q) \end{aligned}$$

de modo que a cada punto $q \in \mathbb{R}^d$ le corresponde un único valor de sus coordenadas $(x^1(q), \dots, x^d(q))$. Sea $p \in \mathbb{R}^d$ y $U(p)$ un entorno de p . La derivada parcial en el punto p con respecto a cada función coordenada x^i

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p &: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned}$$

es un vector tangente pues es una aplicación lineal ya que verifica las propiedades (4.1) y (4.2 y también la propiedad de Leibnitz (4.3).

Propiedad 4.3. *El conjunto*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p \right\}$$

forman un sistema de vectores tangentes linealmente independientes.

Demostración:

Sea $X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \dots + \lambda^d \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p = 0$. Evaluemos $X_p(x^i)$. Tendremos

$$X_p(x^i) = \lambda^1 \frac{\partial x^i}{\partial x^1}(p) + \dots + \lambda^i \frac{\partial x^i}{\partial x^i}(p) + \dots + \lambda^d \frac{\partial x^i}{\partial x^d}(p) = \lambda^i = 0$$

■

Teorema 4.2. *El conjunto de vectores tangentes*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p \right\}$$

engendra \mathcal{T}_p , es decir teniendo en cuenta la propiedad anterior, es una base de \mathcal{T}_p que tiene por lo tanto dimensión d .

Demostración:

Utilizando la formula de Taylor con resto integral (véase teorema 1.11) podemos poner para $x \in U(p)$

$$f(x) = f(p) + Df(p)(x-p) + \int_0^1 (1-t)(D^2 f(p+th)(x-p, x-p)) dt$$

Expresando las diferenciales en coordenadas

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1, \dots, d} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) \\ &+ \sum_{i, j=1, \dots, d} (x^i - p^i)(x^j - p^j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p+th) dt \end{aligned}$$

Entonces aplicado X_p al desarrollo anterior de la función f , obtenemos

$$\begin{aligned} X_p(f) &= X_p(f(p)) + \sum_{i=1, \dots, d} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(X_p(x^i) - X_p(p^i)) \\ &+ \sum_{i, j=1, \dots, d} X_p((x^i - p^i)(x^j - p^j)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p+th) dt \end{aligned}$$

donde observamos que $X_p(f(p)) = 0$ porque $f(p)$ es una función constante de $x \in U(p)$. Por el mismo motivo $X_p(p^i) = 0$. Por otra parte el último sumando también se anula en virtud de la propiedad (4.2) ya que cada término de este sumando es el producto de dos funciones de x que se anulan en $x = p$.

Así pues para toda función $f \in \mathcal{F}_p$ podemos escribir

$$X_p f = \sum_{i=1, \dots, d} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) X_p(x^i)$$

de donde

$$X_p = \sum_{i=1, \dots, d} \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

siendo $\lambda^i = X_p(x^i)$. ■

Comentario 4.2. De manera equivalente se puede definir el espacio tangente en un punto $p \in \mathbb{R}^d$ como el conjunto

$$p \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}_p^d = \{(p, v); v \in \mathbb{R}^d\}$$

con la suma

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$$

y el producto por un escalar

$$\lambda(p, v) = (p, \lambda v)$$

Si $\{e_i; i = 1, \dots, d\}$ es una base de \mathbb{R}^d está claro que $\{(p, e_i); i = 1, \dots, d\}$ es una base de \mathbb{R}_p^d .

Finalmente podemos identificar el espacio tangente de las derivaciones \mathcal{T}_p con el anterior \mathbb{R}_p^d identificando dos bases, así por ejemplo si $\{e_i; i = 1, \dots, d\}$ es una base ortonormal y $\{x^1, \dots, x^d\}$ es un sistema de coordenadas cartesianas, el vector tangente $X_p = \sum_{i=1}^d \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ lo identificamos con el vector de \mathbb{R}_p^d dado por $(p, v) = \sum_{i=1}^d \lambda^i (p, e_i)$. En definitiva un vector tangente en p es un vector de \mathbb{R}^d cuyo origen se ha trasladado al punto p .

Esta es la definición de vector tangente utilizada en [6].

4.1.1. Ejemplos de vectores tangentes

Vector tangente a una curva

Sea \mathbb{R}^d el espacio vectorial de dimensión d sobre \mathbb{R} . Y sea $\{x^1, \dots, x^d\}$ un sistema de coordenadas en \mathbb{R}^d . Una curva en \mathbb{R}^d es una aplicación (que consideraremos diferenciable)

$$c :]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$t \rightarrow c(t) = (x^1(t), \dots, x^d(t))$$

donde hemos simplificado la notación poniendo $c(t) = (c^1(t), \dots, c^d(t))$ y $x^i(t) = (x^i \circ c^i)(t)$.

Sea $p \in \mathbb{R}^d$ un punto de la curva, es decir, existe un $t_0 \in]a, b[$ tal que $p = c(t_0)$. Consideremos un entorno de p , $U(p)$ en \mathbb{R}^d . Llamaremos vector tangente a la curva c en el punto p a:

$$\begin{aligned} X_p : \mathcal{F}_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow X_p(f) = (f \circ c)'(t_0) \end{aligned}$$

Expresando en coordenadas $(f \circ c)'(t_0)$

$$X_p(f) = \sum_i^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t_0)) \frac{dx^i}{dt}(t_0)$$

para toda $f \in \mathcal{F}_p$ por lo que

$$X_p = \sum_i^d \frac{dx^i}{dt}(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

En las aplicaciones mientras no tengamos problemas de definición en los puntos extremos (frontera de $]a, b[$) o a la hora de calcular los vectores tangentes en estos puntos extremos, podemos sustituir el intervalo abierto $]a, b[$ por el intervalo cerrados $[a, b]$ o los intervalos semiabiertos $[a, b[$ o $]a, b]$.

Superficies en \mathbb{R}^3

Sea \mathbb{R}^3 el espacio vectorial de dimensión 3 sobre \mathbb{R} con el sistema de coordenadas $\{x^1, x^2, x^3\}$. Sea un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$. Definimos una superficie en \mathbb{R}^3 como una aplicación

$$\begin{aligned} \phi : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (\phi^1(u, v), \phi^2(u, v), \phi^3(u, v)) \end{aligned}$$

donde $\phi^i(u, v) = (x^i \circ \phi)(u, v)$ $i = 1, 2, 3$. Sea $p = \phi(u_0, v_0)$ un punto de la superficie. Dada la función $f \in \mathcal{F}_p$ la función compuesta $f \circ \phi$ es una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$ a valores en \mathbb{R}

$$\begin{aligned} f \circ \phi : D \subset \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\phi} U(p) \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow \phi(u, v) \longrightarrow f(\phi(u, v)) \end{aligned}$$

Con el sistema de coordenadas $\{u, v\}$ en \mathbb{R}^2 y $\{x^1, x^2, x^3\}$ en \mathbb{R}^3 la matriz jacobiana $(f \circ \phi)'((u_0, v_0))$ es una matriz de 1 fila \times 2 columnas que es el producto de matrices jacobianas $(f'(\phi(u_0, v_0))) \cdot \phi'(u_0, v_0)$. Desarrollando este producto tenemos

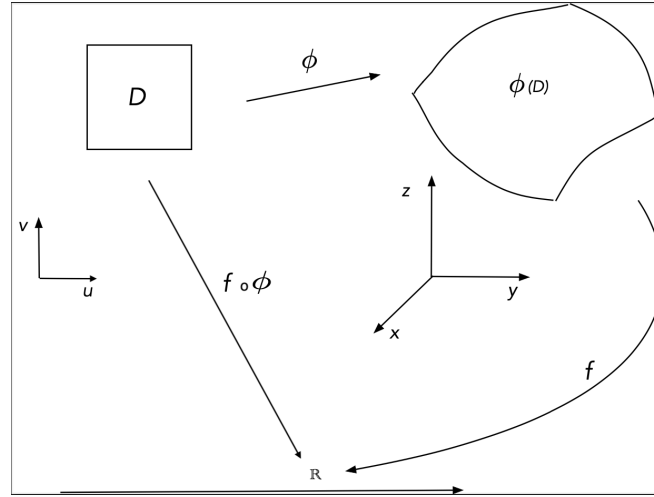


Figura 4.1 Definición de superficie en \mathbb{R}^3

$$(f \circ \phi)'(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(\phi(p)), \frac{\partial f}{\partial x^2}(\phi(p)), \frac{\partial f}{\partial x^3}(\phi(p)) \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial u}(p) & \frac{\partial \phi^1}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial \phi^2}{\partial u}(p) & \frac{\partial \phi^2}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial \phi^3}{\partial u}(p) & \frac{\partial \phi^3}{\partial v}(p) \end{bmatrix}.$$

de modo que

$$(f \circ \phi)'(p) = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial \phi^i}{\partial u}(p) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial \phi^i}{\partial v}(p) \right]$$

A las 2 columnas de $(f \circ \phi)'(p)$ las llamamos $(Tu)_p(f)$ y $(Tv)_p(f)$ y asociados a p y a la superficie. Consideramos los siguientes vectores tangentes

$$(Tu)_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial u}(p) = \sum_{i=1, \dots, 3} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial \phi^i}{\partial u}(p)$$

$$(Tv)_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial v}(p) = \sum_{i=1, \dots, 3} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial \phi^i}{\partial v}(p)$$

de modo que

$$(Tu)_p = \sum_{i=1, \dots, 3} \frac{\partial \phi^i}{\partial u}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{p=\phi(p)}$$

$$(Tv)_p = \sum_{i=1, \dots, 3} \frac{\partial \phi^i}{\partial v}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{p=\phi(p)}$$

4.1.2. Cambios de base

Sea $p \in \mathbb{R}^d$, $U(p)$ un entorno de p y dos sistemas de funciones coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ y $\{y^1, \dots, y^d\}$ relacionados algebraicamente por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(y^1, y^2, \dots, y^d) \\ &\dots \\ x^d &= x^d(y^1, y^2, \dots, y^d) \end{aligned}$$

Sea \mathcal{T}_p el espacio tangente en p . Asociados a estos dos sistemas de coordenadas tendremos dos bases en \mathcal{T}_p :

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p ; i = 1, \dots, d \right\} \quad ; \quad \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p ; i = 1, \dots, d \right\}$$

Vamos a deducir la relación entre las respectivas bases de \mathcal{T}_p : Un vector tangente X_p se podrá expresar en cada una de las bases,

$$X_p = \sum_{i=1}^d \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum_{j=1}^d \mu^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \quad (4.6)$$

Expresando los vectores de la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p ; i = 1, \dots, d \right\}$ en función de la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p ; i = 1, \dots, d \right\}$, es decir

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p = \sum_{i=1}^d a_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (4.7)$$

donde

$$a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \quad (4.8)$$

con expresión matricial la ley de transformación de las bases se escribe

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^d} \right)_p \right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p \right] \cdot \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_d^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^d & \dots & a_d^d \end{bmatrix}$$

La matriz del cambio A es

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_d^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^d & \dots & a_d^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^d}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^d}{\partial y^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^d}{\partial y^d}(p) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión (4.6)

$$X_p = \sum_{i=1}^d \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \mu^j a_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

identificando los coeficientes de $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$

$$\lambda^i = \sum_{j=1}^d \mu^j a_j^i = \sum_{i=1}^d a_j^i \mu^j$$

obtenemos los coeficientes correspondientes al vector X_p en la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p ; i = 1, \dots, d \right\}$ en función de los coeficientes del vector X_p en la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p ; i = 1, \dots, d \right\}$. Matricialmente la ley de transformación de las componentes se escribe

$$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \dots \\ \lambda^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_d^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^d & \dots & a_d^d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \dots \\ \mu^d \end{bmatrix}$$

Comentario 4.3. Sustituyendo el valor de a_j^i dado por (4.8) en (4.7)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p = \sum_{i=1}^d \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

Con la notación $x = (x^1, \dots, x^d)$ para las coordenadas de un punto en el sistema $\{x^1, \dots, x^d\}$ e $y = (y^1, \dots, y^d)$ para las coordenadas de un punto en el sistema $\{y^1, \dots, y^d\}$ las ecuaciones del cambio de coordenadas la expresaremos como $x = x(y)$ (resp. $y = y(x)$). Dada una función $f \in \mathcal{F}_p$ llamemos f_y (resp. f_x) a la función f cuando utilizamos el sistema de coordenadas $\{y\}$ (resp. $\{x\}$). Podemos poner entonces $f_y(y) = f_x(x(y))$, es decir $f_y = (f_x \circ x)$. De modo que en un punto p de coordenadas $y(p)$ en el sistema de coordenadas $\{y\}$ (resp. de coordenadas $x(p)$ en

el sistema de coordenadas $\{x\}$ el valor de $\frac{\partial f_y}{\partial y^i}(y(p))$ es

$$\frac{\partial f_y}{\partial y^j}(y(p)) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y(p)) \frac{\partial f_x}{\partial x^i}(x(p))$$

que es la regla de la cadena.

Ejemplos de cambios de base

Ejemplo 1: Coordenadas polares

En \mathbb{R}^2 consideremos dos sistemas de coordenadas. El sistema de coordenadas cartesianas $\{x, y\}$ y el sistema de coordenadas polares $\{r, \theta\}$ en un entorno de un punto $p = (x_0, y_0)_{x,y} = (r_0, \theta_0)_{r,\theta}$. Los dos sistemas de coordenadas están relacionadas por

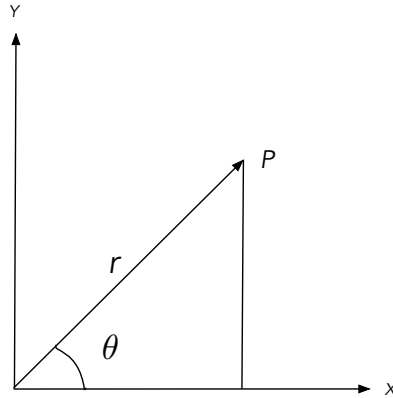


Figura 4.2 Coordenadas polares en \mathbb{R}^2

la ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

En \mathcal{T}_p consideraremos las dos bases asociadas

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p \right\}$$

La matriz del cambio de base de un vector tangente dado en coordenadas polares a coordenadas cartesianas será:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(p) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(p) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -r_0 \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & r_0 \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

La matriz A relaciona la base correspondiente a coordenadas polares en función de la base correspondiente a coordenadas cartesianas,

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p \right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(p) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(p) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) \end{bmatrix}$$

y permite calcular las coordenadas cartesianas de un vector tangente dado en coordenadas polares,

$$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(p) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(p) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{bmatrix}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p &= \frac{\partial x}{\partial r}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial y}{\partial r}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p = \cos \theta_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + \sin \theta_0 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p &= \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p = -r_0 \sin \theta_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + r_0 \cos \theta_0 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p \end{aligned}$$

Por ejemplo un vector tangente dado en coordenadas polares

$$X_p = 3 \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + 5 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p$$

En la base cartesiana se expresará

$$X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p$$

donde

$$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -r_0 \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & r_0 \cos \theta_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\lambda^1 = 3 \cos \theta_0 - 5r_0 \sin \theta_0$$

$$\lambda^2 = 3 \sin \theta_0 - 5r_0 \cos \theta_0$$

Recíprocamente consideremos el paso de un vector dado en coordenadas cartesianas a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

La matriz del cambio de base es

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(p) & \frac{\partial r}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(p) & \frac{\partial \theta}{\partial y}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2+y_0^2}} \\ -\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} & \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} \end{bmatrix}$$

La matriz $B = A^{-1}$ (véase ejercicio 4.1) relaciona la base correspondiente a coordenadas cartesianas en función de la base correspondiente a coordenadas polares:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p \right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(p) & \frac{\partial r}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(p) & \frac{\partial \theta}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p &= \frac{\partial r}{\partial x}(p) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \frac{\partial \theta}{\partial x}(p) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p - \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p &= \frac{\partial r}{\partial y}(p) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \frac{\partial \theta}{\partial y}(p) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p \end{aligned}$$

Un vector tangente dado en coordenadas cartesianas, por ejemplo

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + 8 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p$$

se escribirá en coordenadas polares como

$$X_p = \mu^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p$$

donde

$$\begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2+y_0^2}} \\ -\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} & \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} + \frac{8y_0}{\sqrt{y_0^2+y_0^2}} \\ -\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} + \frac{8x_0}{x_0^2+y_0^2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 viene dado en función del sistema de coordenadas cilíndricas mediante:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

La matriz para el paso de un vector dado en coordenadas polares a sus coordenadas cartesianas en un punto $p = (x_0, y_0, z_0)_{xyz} = (r_0, \theta_0, z_0)_{r,\theta,z}$ es

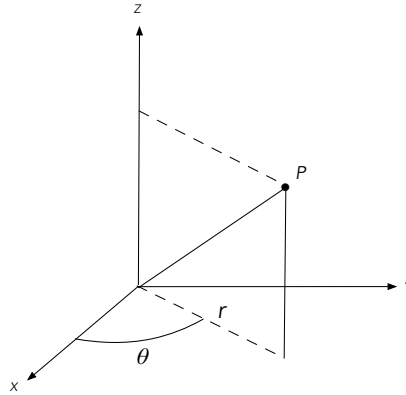


Figura 4.3 Coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(p) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial x}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(p) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial y}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(p) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial z}{\partial z}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -r_0 \sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & r_0 \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 viene dado en función del sistema de coordenadas esféricas mediante:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \sin \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

La matriz del cambio de base de un vector tangente dado en coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas en un punto $p = (x_0, y_0, z_0)_{x,y,z} = (r_0, \theta_0, \varphi_0)_{r,\theta,\varphi}$ es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(p) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(p) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(p) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & -r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 & 0 & -r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo en el punto $p = (1, 1, 1)_{xyz} = (\sqrt{3}, \pi/4, \pi/4)_{r,\theta,\varphi}$ la matriz de cambio de base A es

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

Sea ahora el vector tangente

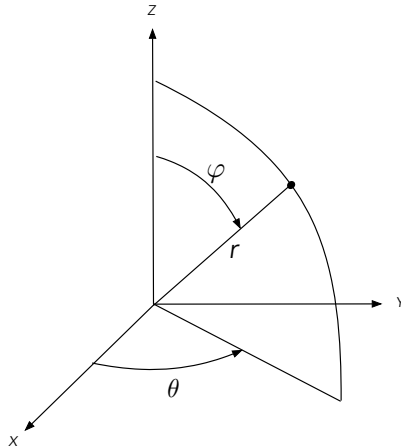


Figura 4.4 Coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3

$$X_p = 2\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)_p$$

dado en coordenadas esféricas. Sus coordenadas cartesianas serán:

$$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

y finalmente X_p en coordenadas cartesianas es

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$$

Véanse los ejercicios 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 para otros ejemplos de cambios de base y vectores tangentes.

4.1.3. Aplicaciones entre espacios tangentes

Sea $U(p)$ un entorno de $p \in \mathbb{R}^m$ y ϕ una aplicación de $U(p)$ en \mathbb{R}^d diferenciable:

$$\phi : U(p) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$$

La aplicación ϕ induce una aplicación ϕ_* entre los espacios tangentes \mathcal{T}_p y $\mathcal{T}_{\phi(p)}$

$$\begin{aligned}\phi_* : \mathcal{T}_p &\rightarrow \mathcal{T}_{\phi(p)} \\ X_p &\rightarrow \phi_*(X_p)\end{aligned}$$

definida por la relación

$$\phi_*(X_p)(f) = X_p(f \circ \phi) \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\phi(p)} \quad (4.9)$$

La aplicación ϕ_* así definida es lineal. (La demostración se deja como ejercicio 4.7)

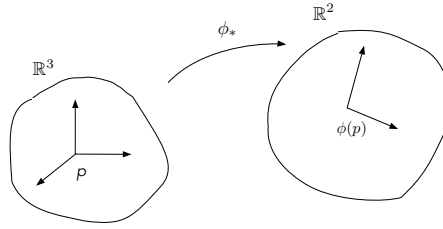


Figura 4.5 Aplicación entre espacios tangentes

Cálculo de la matriz asociada

Sean $\{\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m\}$ un sistema de coordenadas en $U(p) \subset \mathbb{R}^m$ y sea $\{x^1, \dots, x^d\}$ un sistema de coordenadas en un entorno de $\phi(p)$, $V(\phi(p)) \subset \mathbb{R}^d$, y las correspondientes bases $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^m}\right)_p\right\}$ de \mathcal{T}_p y $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\phi(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_{\phi(p)}\right\}$ de $\mathcal{T}_{\phi(p)}$. La matriz $A = (a_i^j)_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, d}$ representativa de ϕ_* asociada a estas bases es la matriz de d filas \times m columnas donde la i -ésima columna son las componentes de $\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\right)_p$ en la base de $\mathcal{T}_{\phi(p)}$:

$$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\right)_p = a_i^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\phi(p)} + \dots + a_i^d \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_{\phi(p)}$$

a_i^j viene dada por

$$a_i^j = \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\right)_p(x^j) = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\right)_p(x^j \circ \phi) = \left(\frac{\partial(x^j \circ \phi)}{\partial \hat{x}^i}\right)(p)$$

Comentario 4.4. Abusando del lenguaje, la notación habitual es poniendo

$$(x^i \circ \phi)(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m) = x^i(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m) \quad \forall i = 1, \dots, d$$

$$\begin{aligned}\phi : U(p) \subset \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m) &\rightarrow (x^1(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m), \dots, x^d(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m))\end{aligned}$$

y escribimos simplificando la notación

$$a_i^j = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}(p) \quad \forall i = 1, \dots, d; j = 1, \dots, m$$

Comentario 4.5. Si identificamos \mathcal{T}_p con \mathbb{R}^m y $\mathcal{T}_{\phi(p)}$ con \mathbb{R}^d entonces ϕ_* es la diferencial de ϕ en el punto p :

$$\phi_* = D\phi(p)$$

En el ejercicio 4.8 se propone calcular $\phi_* X_p$ para un vector tangente X_p de \mathcal{T}_p .

Ejemplos

- Sea

$$\begin{aligned}c :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\rightarrow c(t) = (x^1(t), \dots, x^d(t))\end{aligned}$$

una curva en \mathbb{R}^d . Para $p \in]a, b[$ vamos a calcular $c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_p$: Tenemos

$$\begin{aligned}c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_p &= a^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{c(p)} + \dots + a^d \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_{c(p)} \\ a^i &= c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_p (x^i) = \left(\frac{d}{dt} \right)_p (x^i \circ c) = \frac{dx^i}{dt}(p)\end{aligned}$$

donde hemos simplificado la notación poniendo x^i en lugar de $(x^i \circ c)$. Finalmente concluimos que

$$c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_p = \frac{dx^1}{dt}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{c(p)} + \dots + \frac{dx^d}{dt}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_{c(p)}$$

es el vector tangente a la curva en el punto $c(p)$

- Sea

$$\begin{aligned}\phi :]0, 1[^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u, v &\rightarrow (x^1, x^2, x^3)\end{aligned}$$

una superficie en \mathbb{R}^3 y $p \in]0, 1[^2$. Vamos a calcular $\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_p$ y $\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_p$:

$$\begin{aligned}\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p &= a_u^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\phi(p)} + a_u^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\phi(p)} + a_u^3\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\phi(p)} \\ \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p &= a_v^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\phi(p)} + a_v^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\phi(p)} + a_v^3\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\phi(p)}\end{aligned}$$

y tendremos

$$a_u^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}(p)$$

y

$$a_v^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}(p)$$

es decir $\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p$ es el vector tangente $(T_u)_{\phi(p)}$ y $\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p$ es el vector tangente $(T_v)_{\phi(p)}$ que son los vectores tangentes asociados a la superficie.

4.2. Formas diferenciales en \mathbb{R}^d

4.2.1. Noción de forma diferencial

En \mathbb{R}^d sea $U(p)$ un entorno de un punto p , sea \mathcal{T}_p el espacio tangente en p y \mathcal{T}_p^* su espacio dual.

A los elementos ω_p de \mathcal{T}_p^* les llamamos formas diferenciales en el punto p . Es decir, una forma diferencial ω_p es una aplicación lineal de \mathcal{T}_p en \mathbb{R}

$$\begin{aligned}\omega_p : \mathcal{T}_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ X_p &\rightarrow \omega_p(X_p)\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\omega_p(X_p + Y_p) &= \omega_p(X_p) + \omega_p(Y_p) \quad \forall X_p, Y_p \in \mathcal{T}_p \\ \omega_p(\lambda X_p) &= \lambda \omega_p(X_p) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall X_p \in \mathcal{T}_p\end{aligned}$$

Ejemplo de forma diferencial

Dada una función $f : U(p) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , es decir $f \in \mathcal{F}_p$, definiremos una forma diferencial asociada que llamaremos diferencial de f en p y la escribiremos como df_p , de modo que

$$df_p(X_p) = X_p(f) \quad \forall X_p \in \mathcal{T}_p$$

Veamos que efectivamente df_p es una forma diferencial en p :

$$\begin{aligned} df_p(X_p + Y_p) &= (X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f) = df_p(X_p) + df_p(Y_p) \quad \forall X_p, Y_p \in \mathcal{T}_p \\ df_p(\lambda X_p) &= X_p(\lambda f) = \lambda X_p(f) = \lambda df_p(f) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall X_p \in \mathcal{T}_p \end{aligned}$$

Veamos la relación con el concepto de diferencial de una función en un punto introducido en el capítulo 1: Con la notación del capítulo 1 para la diferencial de una función en un punto, observemos que

$$df_p = DF(p)$$

En efecto, consideremos el sistema de coordenadas cartesiano y tomemos un vector tangente en p ,

$$X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \dots + \lambda^d \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p$$

tendremos

$$df_p(X_p) = X_p(f) = \lambda^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) + \dots + \lambda^d \frac{\partial f}{\partial x^d}(p)$$

Por otra parte según el concepto de diferencial en el punto p introducido en el capítulo 1 según el cual

$$DF(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

es una aplicación lineal, tendremos que para un vector $v \in \mathbb{R}^d$ de componentes

$$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \dots \\ \lambda^d \end{bmatrix}$$

resulta

$$Df(p)(v) = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) \dots \frac{\partial f}{\partial x^d}(p) \right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \dots \\ \lambda^d \end{bmatrix} = \lambda^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) + \dots + \lambda^d \frac{\partial f}{\partial x^d}(p)$$

4.2.2. Bases en el espacio de formas diferenciales

Sea $U(p) \in \mathbb{R}^d$ un entorno de un punto p . $\{x^1, \dots, x^d\}$ un sistema de coordenadas en $U(p) \subset \mathbb{R}^d$. Las coordenadas $x^i : U(p) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de \mathcal{F}_p . Podemos considerar sus formas diferenciales asociadas, es decir $\{dx_p^1, \dots, dx_p^d\}$ de modo que para un vector tangente $X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \dots + \lambda^d \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p$

$$dx_p^j(X_p) = dx_p^j \left(\sum_{i=1}^d \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{i=1}^d \lambda^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \lambda^j$$

nos da la j -ésima componente de X_p . Veamos que este conjunto de d formas diferenciales es precisamente la base dual de la base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\right\}$ de \mathcal{T}_p , en efecto

$$dx_p^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \delta_j^i$$

Tenemos pues que toda forma diferencial $\omega_p \in \mathcal{T}_p^*$ se podrá expresar como combinación lineal de las formas $\{dx_p^i; i = 1, \dots, d\}$,

$$\omega_p = \sum_{i=1}^d \lambda_i dx_p^i$$

donde

$$\lambda_j = \omega_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right)$$

en efecto,

$$\omega_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \sum_{i=1}^d \lambda_i dx_p^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \lambda_j$$

4.2.3. Cambios de base en el espacio de formas diferenciales

Sea $p \in \mathbb{R}^d$, $U(p)$ un entorno de p y dos sistemas de funciones coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ y $\{y^1, \dots, y^d\}$ en $U(p)$. Sean $\{dx_p^1, \dots, dx_p^d\}$ y $\{dy_p^1, \dots, dy_p^d\}$ las respectivas bases asociadas en \mathcal{T}_p^* . Dada $\omega_p \in \mathcal{T}_p^*$ podemos expresarla en cada una de las dos bases

$$\omega_p = \sum_{j=1}^d \lambda_j dx_p^j = \sum_{i=1}^d \mu_i dy_p^i$$

Expresando cada una de las dy_p^i , $i = 1, \dots, d$ en función de las formas diferenciales dx_p^j , $j = 1, \dots, d$ ponemos

$$dy_p^i = \sum_{j=1}^d b_j^i dx_p^j$$

donde

$$b_j^i = dy_p^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)$$

sustituyendo

$$\omega_p = \sum_{j=1}^d \lambda_j dx_p^j = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mu_i b_j^i dx_p^j$$

de modo que

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^d \mu_i b_j^i$$

Matricialmente la ley de transformación de coordenadas de una forma diferencial se escribe,

$$[\lambda_1 \dots \lambda_d] = [\mu_1 \dots \mu_d] \cdot \begin{bmatrix} b_1^1 & \dots & b_d^1 \\ \dots & & \dots \\ b_1^d & \dots & b_d^d \end{bmatrix}$$

La matriz del cambio de base B es

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & \dots & b_d^1 \\ \dots & & \dots \\ b_1^d & \dots & b_d^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^d}(p) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial y^d}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial y^d}{\partial x^d}(p) \end{bmatrix}$$

Por otra parte la ley de transformación de las bases se escribe :

$$\begin{bmatrix} dy_p^1 \\ \dots \\ dy_p^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^d}(p) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial y^d}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial y^d}{\partial x^d}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_p^1 \\ \dots \\ dx_p^d \end{bmatrix}$$

Véase el ejercicio 4.9 para la relación entre la matriz de cambio de base en el espacio tangente y la matriz de cambio de base en el espacio dual de las formas diferenciales.

Ejemplos de cambios de base

Ejemplo 1: Cambio de polares a cartesianas

La relación entre las coordenadas cartesianas y coordenadas polares es

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

La base de \mathcal{T}_p^* en cartesianas es

$$\{dx_p, dy_p\}$$

y la base en polares es

$$\{dr_p, d\theta_p\}$$

La relación entre las dos bases es

$$dx_p = \frac{\partial x}{\partial r}(p) dr_p + \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) d\theta_p = \cos \theta_0 dr_p - r_0 \sin \theta_0 d\theta_p$$

$$dy_p = \frac{\partial y}{\partial r}(p) dr_p + \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) d\theta_p = \sin \theta_0 dr_p + r_0 \cos \theta_0 d\theta_p$$

para un punto $p = (r_0, \theta_0)$ dado en coordenadas polares.

Se deja como ejercicio 4.10 calcular la relación entre las bases de formas diferenciales correspondientes a coordenadas esféricas y cartesianas.

Ejercicios del Capítulo 4

4.1. Verificar que las matrices de cambio de base A y B en el ejemplo 1 verifican $B = A^{-1}$.

4.2. Sea un punto $p \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas $p = (1, 1)$ en coordenadas cartesianas y $p = (\sqrt{2}, \pi/4)$ en coordenadas polares. Sea el vector tangente en el punto p dado en coordenadas cartesianas por

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$$

expresar X_p en coordenadas polares.

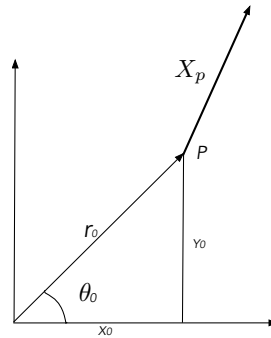


Figura 4.6 Vector tangente en \mathbb{R}^2

4.3. Hallar la expresión de un vector tangente en el punto p de una curva que se apoya en un cilindro de radio unidad.

Indicación: Una curva en \mathbb{R}^3 se escribe,

$$\begin{aligned} c :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

La ecuación del cilindro es

$$x^2 + y^2 = 1$$

por lo tanto los puntos de la curva dada verificarán

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad \forall t \in (a, b)$$

o trabajando con coordenadas cilíndricas, la ecuación del cilindro es $r = 1$ y los puntos de la curva verificarán $r(t) = 1$ para todo $t \in]a, b[$.

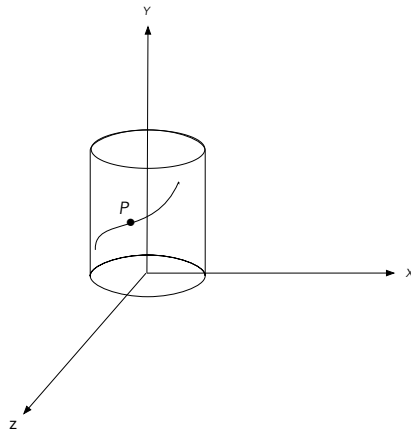


Figura 4.7 Curva sobre un cilindro

4.4. Hallar la expresión de un vector tangente en el punto p de una curva trazada sobre una superficie de revolución.

Indicación: Tomamos el eje de revolución el eje z y trabajando con coordenadas cilíndricas la ecuación de la superficie se puede poner de la forma $r = r(z)$.

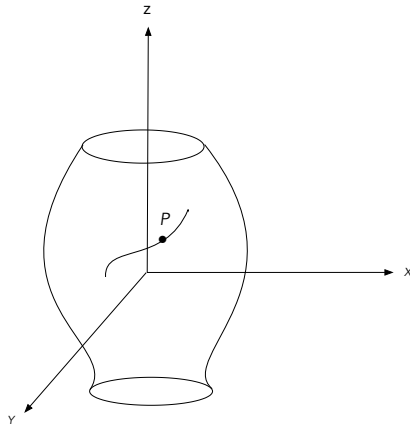


Figura 4.8 Curva sobre una superficie de revolución

4.5. Hallar la expresión de un vector tangente en el punto p de una curva trazada sobre un toro de ecuación, en coordenadas cilíndricas, $r = r(z)$ donde $r(z)$ está definido implícitamente por la ecuación

$$(r - R)^2 + z^2 = 1$$

despejando $r = r(z)$ tenemos que la parte exterior del toro es

$$r = R + \sqrt{1 - z^2}$$

y la parte interior del toro es

$$r = R - \sqrt{1 - z^2}$$

Considerar los tres casos siguientes:

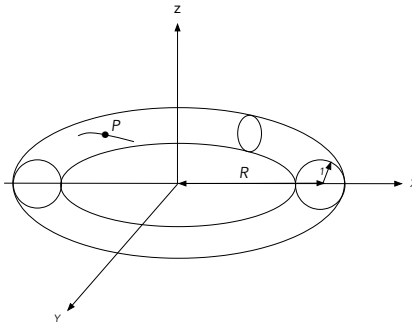


Figura 4.9 Curvas sobre un toro

a) La curva es la circunferencia de radio $R + 1$ y centro el origen de coordenadas, es decir

$$c : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow (r(t), \theta(t), z(t))$$

donde $r(t) = R + 1$, $\theta(t) = t$ y $z(t) = 0$.

b) Circunferencia que es la sección transversal según el plano $x - z$, es decir

$$c : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow (r(t), \theta(t), z(t))$$

donde $r(t) = R + \cos t$, $\theta(t) = 0$ y $z(t) = \sin t$.

c) La curva (una helicoides que se apoya sobre la superficie del toro) viene dada por

$$c : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow (r(t), \theta(t), z(t))$$

donde $r(t) = R + \cos t$, $\theta(t) = t$ y $z(t) = \sin t$.

4.6. Hallar el vector tangente en un punto p de la hélice

$$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow (x = \cos t, y = \sin t, z = t)$$

Dar el resultado en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas.

4.7. Demostrar que la aplicación ϕ_* definida por (4.9) es una aplicación lineal entre los espacios tangentes \mathcal{T}_p y $\mathcal{T}_{f(p)}$.

4.8. Sea $U(p)$ un entorno de $p \in \mathbb{R}^m$ y ϕ una aplicación de $U(p)$ en \mathbb{R}^d diferenciable:

$$\phi : U(p) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Dado un vector tangente en \mathcal{T}_p ,

$$X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^1} \right)_p + \cdots + \lambda^d \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^1} \right)_p$$

calcular $\phi_* X_p$.

4.9. Establecer la relación entre la matriz de cambio de base en el espacio tangente y la matriz de cambio de base en el espacio dual de las formas diferenciales.

4.10. En \mathbb{R}^3 hallar en un entorno $U(p)$ de $p = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ la relación entre las bases de formas diferenciales en coordenadas esféricas y en coordenadas cartesianas.

Capítulo 5

Campos y Formas

En este capítulo construimos primero los tensores sobre el espacio tangente introduciendo la noción de campo vectorial, formas y más en general campos tensoriales. Un campo vectorial es una aplicación definida en un abierto de \mathbb{R}^d que asigna a cada punto un vector del espacio tangente en este punto. Una forma es una aplicación que en cada punto asigna una forma diferencial del espacio de formas diferenciales en el punto. Del mismo modo un campo tensorial será una aplicación que asigna a cada punto un tensor en el espacio de tensores construido a partir del espacio tangente y el espacio de formas diferenciales en este punto.

La referencias básicas son [6] y [3]. Véase también [5] para un desarrollo más sencillo.

5.1. Tensores sobre el espacio tangente y el espacio de formas diferenciales

En \mathbb{R}^d sea $U(p)$ un entorno de un punto $p \in \mathbb{R}^d$ y sea \mathcal{T}_p el espacio tangente en p . Por otra parte sea \mathcal{T}_p^* el espacio dual del espacio tangente de las formas diferenciales en el punto p . A partir de estos dos espacios se construyen los respectivos espacios de tensores, covariantes, contravariantes y mixtos.

A continuación en cada punto $p \in \mathbb{R}^d$ consideraremos los espacios de tensores covariantes de orden k , $\mathcal{M}_k(\mathcal{T}_p)$ y los correspondientes espacios de tensores anti-simétricos de orden k , $\Lambda_k(\mathcal{T}_p)$. En particular los tensores de orden $k = 1$ son las formas diferenciales. A los elementos de $\Lambda_k(\mathcal{T}_p)$ se les llama formas diferenciales de orden k .

Ejemplos de espacios de tensores diferenciales y bases respectivas

Recordemos las bases de \mathcal{T}_p : Sean x^1, \dots, x^d un conjunto de funciones coordenadas independientes. Sea $p \in \mathbb{R}^d$ y $U(p)$ un entorno de p y las derivadas parciales en el punto p con respecto a cada función coordenada x^i

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : \mathcal{F}_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned}$$

Según vimos en el capítulo 4 el conjunto de derivadas parciales en el punto p

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p; i = 1, \dots, d\right\}$$

es una base de \mathcal{T}_p . Por otra parte el conjunto de las diferenciales en el punto p

$$\{dx_p^i; i = 1, \dots, d\}$$

es una base de \mathcal{T}_p^* .

Tensores de orden 2

El espacio $\mathcal{M}_2(\mathcal{T}_p)$ de tensores de orden 2 tiene dimensión 3^2 . Una base es

$$\{dx_p^i \otimes dx_p^j; i, j = 1, 2, 3\}$$

Un ejemplo de tensor de orden 2 es el producto escalar de dos vectores, o tensor métrico fundamental. Su expresión en un sistema de coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ es

$$T_p = dx_p \otimes dx_p + dy_p \otimes dy_p + dz_p \otimes dz_p$$

Aplicando este tensor a dos vectores tangentes

$$\begin{aligned} X_p &= \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \lambda^3 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ Y_p &= \mu^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \mu^3 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \end{aligned}$$

resulta

$$T_p(X_p, Y_p) = \lambda^1 \mu^1 + \lambda^2 \mu^2 + \lambda^3 \mu^3$$

Sea ahora $\{y^1, \dots, y^d\}$ otro sistema de coordenadas y $\{dy_p^1, \dots, dy_p^d\}$ la base del espacio dual \mathcal{T}_p^* asociada a este sistema de coordenadas. Veamos como expresar el tensor T_p en esta otra base, es decir queremos hallar los $(T_{ij})_{i,j=1}^d$ tales que

$$T_p = \sum_{i,j=1}^d T_{ij} dy_p^i \otimes dy_p^j$$

Vamos a ver que

$$T_{ij} = T_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \right) \quad \forall i, j = 1, \dots, d$$

En efecto aplicando T_p a estos vectores

$$\begin{aligned} T_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \right) &= \sum_{k,l=1}^d T_{kl} dy_p^k \otimes dy_p^l \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^d T_{kl} \delta_i^k \delta_j^l = T_{ij} \end{aligned}$$

En el ejercicio 5.1 se propone calcular el tensor métrico en coordenadas cilíndricas y en el ejercicio 5.2 en coordenadas esféricas.

Tensores antisimétricos

Sea $\{x^1, \dots, x^d\}$ el sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^d y $\{dx_p^i; i = 1, \dots, d\}$ la base correspondiente \mathcal{T}_p^* . La base de $\Lambda_k(\mathcal{T}_p)$ es el conjunto

$$\{dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k}; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq d\}$$

de modo que $\Lambda_k(\mathcal{T}_p)$ tiene dimensión $\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!}$. Un tensor $\omega_p \in \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$ se escribirá de la forma

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq d} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_k} dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k}$$

Por ejemplo el elemento de volumen en un punto p de \mathbb{R}^d es el tensor $\omega_p \in \Lambda_d(\mathcal{T}_p)$ tal que $\omega_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p \right) = 1$ donde $\{x^1, \dots, x^d\}$ son las coordenadas cartesianas. Es decir

$$\omega_p = dx_p^1 \wedge \dots \wedge dx_p^d$$

Sean ahora otro sistema de coordenadas $\{y^1, \dots, y^d\}$. En este nuevo sistema de coordenadas el elemento de volumen se expresará como

$$\omega_p = dx_p^1 \wedge \dots \wedge dx_p^d = \lambda dy_p^1 \wedge \dots \wedge dy_p^d$$

donde $\lambda = \det(A)$ siendo $A = \left[\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \right]$: En efecto, poniendo

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda dy_p^1 \wedge \cdots \wedge dy_p^d \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^d} \right)_p \right) \\ &= dx_p^1 \wedge \cdots \wedge dx_p^d \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^d} \right)_p \right) = \det(A)\end{aligned}$$

donde A es la matriz de cambio de base

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^d}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^d}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^d}{\partial y^d}(p) \end{bmatrix}$$

En el ejercicio 3.11 se relaciona el elemento de volumen con la matriz asociada al tensor métrico $T_p = dx_p \otimes dx_p + dy_p \otimes dy_p + dz_p \otimes dz_p$: El elemento de volumen ω_p en coordenadas cartesianas es $\omega_p = dx_p^1 \wedge \cdots \wedge dx_p^d$ y en las coordenadas $\{y^1, \dots, y^d\}$ es $\omega_p = \lambda dy_p^1 \wedge \cdots \wedge dy_p^d$ donde $\lambda = \sqrt{\det(G)}$ siendo $G = (T_{ij})_{i,j=1}^d$.

Ejemplos

Por ejemplo el elemento de volumen en \mathbb{R}^3 en coordenadas cartesianas x, y, z es

$$\omega_p = dx_p \wedge dy_p \wedge dz_p$$

En coordenadas cilíndricas, en un punto p de coordenadas (r, θ, z) es

$$\omega_p = r dr_p \wedge d\theta_p \wedge dz_p$$

y en coordenadas esféricas

$$\omega_p = r^2 \sin \varphi dr_p \wedge d\varphi_p \wedge d\theta_p$$

(véanse ejercicios 5.3 y 5.4)

Nota: Para simplificar la notación y mientras no de lugar a confusión omitiremos el punto p en el que se evalúan los coeficientes. Por ejemplo ponemos r en lugar de $r(p)$.

Producto vectorial

Sea $\{y^1, y^2, y^3\}$ un sistema ortogonal de coordenadas (no necesariamente el sistema cartesiano) con el tensor métrico

$$T_p = E_1 dy_p^1 \otimes dy_p^1 + E_2 dy_p^2 \otimes dy_p^2 + E_3 dy_p^3 \otimes dy_p^3$$

y sean dos vectores en el espacio tangente \mathcal{T}_p

$$X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)_p + \lambda^3 \left(\frac{\partial}{\partial y^3} \right)_p$$

$$Y_p = \mu^1 \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p + \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)_p + \mu^3 \left(\frac{\partial}{\partial y^3} \right)_p$$

Vamos a calcular el producto vectorial $X_p \times Y_p$ en este sistema de coordenadas: Pongamos

$$Z_p = X_p \times Y_p = z^1 \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p + z^2 \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)_p + z^3 \left(\frac{\partial}{\partial y^3} \right)_p$$

Por la definición de producto vectorial

$$T_p(Z_p, W_p) = \omega_p(X_p, Y_p, W_p) \quad \forall W_p \in \mathcal{T}_p$$

La coordenada i -ésima de Z_p , z^i la obtenemos de

$$T_p \left(Z_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p \right) = \omega_p \left(X_p, Y_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p \right)$$

En las coordenadas $\{y^1, y^2, y^3\}$ el elemento de volumen es (teorema 3.9 y ejercicio 3.11)

$$\omega_p = \lambda dy_p^1 \wedge \cdots \wedge dy_p^d = \sqrt{\det(G)} dy_p^1 \wedge \cdots \wedge dy_p^d = \sqrt{E_1 E_2 E_3} dy_p^1 \wedge \cdots \wedge dy_p^d$$

de modo

- Para $i = 1$:

$$E_1 z^1 = \sqrt{E_1 E_2 E_3} \det \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & 1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 0 \\ \lambda^3 & \mu^3 & 0 \end{bmatrix}; \quad z^1 = \frac{\sqrt{E_1 E_2 E_3}}{E_1} \det \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & 1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 0 \\ \lambda^3 & \mu^3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para $i = 2$:

$$E_2 z^2 = \sqrt{E_1 E_2 E_3} \det \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & 0 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 1 \\ \lambda^3 & \mu^3 & 0 \end{bmatrix}; \quad z^2 = \frac{\sqrt{E_1 E_2 E_3}}{E_2} \det \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & 0 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 1 \\ \lambda^3 & \mu^3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para $i = 3$

$$E_3 z^3 = \sqrt{E_1 E_2 E_3} \det \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & 0 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 0 \\ \lambda^3 & \mu^3 & 1 \end{bmatrix}; \quad z^3 = \frac{\sqrt{E_1 E_2 E_3}}{E_3} \det \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & 0 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 0 \\ \lambda^3 & \mu^3 & 1 \end{bmatrix}$$

y formalmente podemos escribir

$$X_p \times Y_p = \sqrt{E_1 E_2 E_3} \det \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p \\ \lambda^2 & \mu^2 & \frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)_p \\ \lambda^3 & \mu^3 & \frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial}{\partial y^3} \right)_p \end{bmatrix}$$

5.2. Campos vectoriales y tensoriales

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^d y en cada punto $p \in \Omega$ consideremos el campo tangente \mathcal{T}_p . Designamos mediante $\mathcal{T} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{T}_p$. A esta unión de espacios tangentes se le llama fibrado tangente.

Definición 5.1. *Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^d . Un campo vectorial definido en el abierto Ω es una aplicación que asigna a los puntos de Ω un elemento del fibrado tangente \mathcal{T} , más precisamente:*

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathcal{T} \\ p &\rightarrow F(p) = F_p \end{aligned}$$

donde $F_p \in \mathcal{T}_p$. Es decir la imagen de p por F , $F(p) = F_p$ es un vector del espacio tangente en p .

Cada operación posible en un espacio vectorial tangente se puede traducir en una operación de campos vectoriales. Por ejemplo, sean F_1, F_2, \dots, F_{d-1} campos vectoriales en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ podemos definir el producto vectorial de $d-1$ campos mediante

$$(F_1 \times \cdots \times F_{d-1})(p) = F_1(p) \times \cdots \times F_{d-1}(p) \quad \forall p \in \Omega$$

Del mismo modo se definen el producto escalar de dos campos F y G ,

$$(F, G)(p) = (F(p), G(p)) \quad \forall p \in \Omega$$

Comentario 5.1. *Recordemos que en el contexto en que estamos trabajando el espacio tangente en un punto p se identifica con el espacio $p \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}_p^d$ (véase el comentario 4.2). Los vectores v_p de \mathbb{R}_p^d son los pares (p, v) con $v \in \mathbb{R}^d$. Cada vector de \mathbb{R}_p^d se compone de un punto $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ y un vector $v \in \mathbb{R}^d$. Un campo vectorial asigna a cada punto $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ un vector en \mathbb{R}_p^d y por tanto las imágenes de un campo F pertenecen a espacios vectoriales diferentes.*

De manera más general definimos la noción de campo tensorial:

Definición 5.2. *Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^d . En cada punto p consideramos el espacio tangente \mathcal{T}_p . A partir de este espacio tangente podemos construir los espacios de tensores $\mathcal{M}_k(\mathcal{T}_p)$. Un campo tensorial covariante de orden k definido en el abierto Ω es una aplicación que asigna a cada punto $p \in \Omega$ un tensor de $\mathcal{M}_k(\mathcal{T}_p)$:*

$$T : \Omega \rightarrow \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{M}_k(\mathcal{T}_p)$$

$$p \rightarrow T(p) = T_p$$

donde $T_p \in \mathcal{M}_k(\mathcal{T}_p)$. Del mismo modo se definen los campos tensoriales contravariantes y mixtos. En particular llamaremos forma de orden k en Ω o simplemente k -forma sobre Ω a una aplicación ω que asigna a cada punto $p \in \Omega$ una forma diferencial ω_p en $\Lambda_k(\mathcal{T}_p)$:

$$\omega : \Omega \rightarrow \bigcup_{p \in \Omega} \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$$

$$p \rightarrow \omega(p) = \omega_p$$

donde $\omega_p \in \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$.

Comentario 5.2. En [3] se introduce la noción de forma diferencial como una aplicación de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ en $\Lambda_k(\mathbb{R}^d)$ sin hacer referencia al punto origen del espacio tangente $\mathbb{R}_p^d = \mathcal{T}_p$.

Comentario 5.3. En el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sea un sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ y en cada punto $p \in \Omega$ consideremos la base del espacio \mathcal{T}_p^* asociada $\{dx_p^1, \dots, dx_p^d\}$. Sea $\Lambda_k(\mathcal{T}_p)$, la correspondiente base es $\{dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k}; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d\}$. Sobre Ω definimos las 1-formas

$$dx^1 : p \in \Omega \rightarrow dx_p^1 \in \Lambda_1(\mathcal{T}_p)$$

$$\dots$$

$$dx^d : p \in \Omega \rightarrow dx_p^d \in \Lambda_1(\mathcal{T}_p)$$

de modo que para todo $p \in \Omega$

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k}$$

y toda k -forma ω definida sobre Ω se podrá expresar como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

que queda determinada por la funciones

$$\omega_{i_1 \dots i_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow \omega_{i_1 \dots i_k}(p)$$

Definición 5.3. Sean ω y η k -formas definidas en un abierto Ω de \mathbb{R}^d y sea f una función de Ω en \mathbb{R} , definimos la suma de dos k -formas $\omega + \eta$ mediante

$$(\omega + \eta)(p) = \omega(p) + \eta(p) \quad \forall p \in \Omega \quad (5.1)$$

y definimos el producto de una k -forma ω por una función f mediante

$$(f\omega)(p) = f(p)\omega(p) \quad \forall p \in \Omega \quad (5.2)$$

Como el conjunto de funciones es un anillo (y no un cuerpo) el conjunto de formas con la suma de formas y el producto por una función es un A -módulo (y no un espacio vectorial).

Ejemplo de una 1-forma

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto Ω , entonces $Df(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, es decir $Df(p) \in \Lambda_1(\mathbb{R}^d)$. Un vector tangente X_p en p lo podemos representar de la forma $X_p = (p, v)$ con $v \in \mathbb{R}^d$. Definimos entonces una 1-forma en los puntos p de Ω mediante

$$df(p)(X_p) = Df(p)(v)$$

donde $X_p = (p, v) \in \mathbb{R}_p^d = \mathcal{T}_p$, es decir

$$\begin{aligned} df : \Omega \subset \mathbb{R}^d &\rightarrow \bigcup_{p \in \Omega} \Lambda_1(\mathcal{T}_p) \\ p &\rightarrow df(p) \end{aligned}$$

En particular si tomamos como función f las funciones coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ obtenemos las 1-formas $dx^i, i = 1, \dots, d$. Observemos que con las notaciones anteriores $dx^i(p) = dx_p^i$. Vamos a expresar la df en función de las formas $dx^i, i = 1, \dots, d$.

Teorema 5.1. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^d} dx^d$$

Demostración:

Para todo $p \in \Omega$ y para todo $v_p = (p, v) \in \mathcal{T}_p$

$$\begin{aligned} df(p)(v_p) &= Df(p)(v) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^d}(p)v^d \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)dx_p^1(v_p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^d}(p)dx_p^d(v_p) \end{aligned}$$

De modo que en todo punto p

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)dx_p^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^d}(p)dx_p^d$$

y por lo tanto

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^d}dx^d$$

■

Ejemplos de formas

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^d

1. Una 0-forma la identificamos con una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. La dimensión del espacio de 0 formas es 0.
2. Una 1-forma en Ω en un sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$:

$$\omega = \sum_{i=1}^d \omega_i dx^i$$

La dimensión del espacio de 1-formas en \mathbb{R}^d es $\binom{d}{1} = d$. En \mathbb{R}^3 tomando las coordenadas cartesianas x, y, z se escribe

$$\omega = a dx + b dy + c dz$$

que se puede identificar con un campo en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathcal{T} \\ p &\rightarrow F(p) = (a(p), b(p), c(p))^t \end{aligned}$$

3. Una 2-forma en \mathbb{R}^3 se escribe en las coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$

$$\omega = a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy$$

que se puede identificar con un campo vectorial en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathcal{T} \\ p &\rightarrow F(p) = (a(p), b(p), c(p))^t \end{aligned}$$

La dimensión del espacio de 2-formas en \mathbb{R}^3 es $\binom{3}{2} = 3$.

4. Una 3-forma en \mathbb{R}^3 se escribe en las coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$

$$\omega = a dx \wedge dy \wedge dz$$

que se puede identificar con la función

$$\begin{aligned} a : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\rightarrow a(p) \end{aligned}$$

La dimensión del espacio de 3-formas en \mathbb{R}^3 es $\binom{3}{3} = 1$.

Comentario 5.4. En el apartado 5.2.2 veremos con más generalidad la correspondencia entre campos y formas.

5.2.1. Aplicaciones entre campos tangentes y espacios de formas

Aplicaciones entre campos vectoriales

Recordemos la aplicación entre espacios tangentes inducida por una función ϕ diferenciable en un abierto Ω de \mathbb{R}^m a valores en \mathbb{R}^d .

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y ϕ una aplicación de Ω en \mathbb{R}^d diferenciable

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\rightarrow \phi(p) \end{aligned}$$

En cada punto $p \in \Omega$ la aplicación ϕ induce una aplicación ϕ_* entre los espacios tangentes \mathcal{T}_p y $\mathcal{T}_{\phi(p)}$

$$\begin{aligned} \phi_* : \mathcal{T}_p &\rightarrow \mathcal{T}_{\phi(p)} \\ X_p &\rightarrow \phi_*(X_p) \end{aligned}$$

definida por la relación

$$\phi_*(X_p)(f) = X_p(f \circ \phi) \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\phi(p)} \quad (5.3)$$

La aplicación ϕ_* así definida es lineal (Véase ejercicio 4.7 del capítulo 4).

Observación 5.1. Identificando \mathcal{T}_p con \mathbb{R}^m y $\mathcal{T}_{\phi(p)}$ con \mathbb{R}^d entonces ϕ_* es la diferencial de ϕ en el punto p :

$$\phi_* = D\phi(p)$$

En efecto dado $p \in \Omega$ se tiene una transformación lineal

$$D\phi(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$$

que nos lleva a la aplicación entre espacios tangentes

$$\begin{aligned} \phi_* : \mathcal{T}_p &\rightarrow \mathcal{T}_{\phi(p)} \\ v_p &\rightarrow \phi_*(v_p) = (D\phi(p)(v))_{\phi(p)} \end{aligned}$$

donde $v_p = (p, v) \in \mathcal{R}_p^d = \mathcal{T}_p$.

Sean $\{\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m\}$ un sistema de coordenadas en $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ y sea $\{x^1, \dots, x^d\}$ un sistema de coordenadas en $\phi(\Omega)$, y las correspondientes bases $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^m}\right)_p\right\}$ de \mathcal{T}_p y $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\phi(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_{\phi(p)}\right\}$ de $\mathcal{T}_{\phi(p)}$. La matriz $A = (a_i^j)_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, d}$ representando ϕ_* asociada a estas bases es la matriz de d filas y m columnas (véase el capítulo 4, subsección 4.1.3) dada por

$$a_i^j = \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \right)_p (x^j) = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \right)_p (x^j \circ \phi) = \left(\frac{\partial (x^j \circ \phi)}{\partial \hat{x}^i} \right)_p$$

Pasemos a campos: Sea X un campo en Ω es decir una aplicación que a cada $p \in \Omega$ le asigna un vector tangente X_p en \mathcal{T}_p . Definimos ahora $\phi_* X$ como el campo en $\phi(\Omega)$ tal que

$$(\phi_* X)_{\phi(p)} = \phi_* X_p$$

Observemos que en la anterior definición estamos utilizando la notación ϕ_* para dos conceptos distintos: El primer miembro es la definición de ϕ_* aplicada a un campo y el segundo miembro es la aplicación a un vector tangente.

Ejemplos

1. Campo tangente a una curva: Sea una curva en \mathbb{R}^d y sean $\{x^1, \dots, x^d\}$ un sistema de coordenadas.

$$c :]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \\ t \rightarrow c(t) = (x^1(t), \dots, x^d(t))$$

donde abusando del lenguaje hemos escrito $x^i(t) = (x^i \circ c)(t)$. Vamos a calcular $c_* \frac{d}{dt}$. Para cada punto $c(t)$ de la curva

$$\left(c_* \frac{d}{dt} \right)_{c(t)} = c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t$$

$$c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t = a^1(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{c(t)} + \dots + a^d(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_{c(t)}$$

Para $i = 1, \dots, d$ resulta

$$a^i(t) = \left(c_* \frac{d}{dt} \right)_t (x^i) = \left(\frac{d}{dt} \right)_t (x^i \circ c) = \frac{dx^i}{dt}(t)$$

de modo que

$$c_* \frac{d}{dt} = (x^1)' \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + (x^d)' \frac{\partial}{\partial x^d}$$

2. Campos tangentes a una superficie: Sea

$$\begin{aligned}\phi :]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u, v &\rightarrow (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))\end{aligned}$$

una superficie en \mathbb{R}^3 . Vamos a calcular la imagen por ϕ_* de los campos de la base $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$, es decir $\phi_* \frac{\partial}{\partial u}$ y $\phi_* \frac{\partial}{\partial v}$. Para cada punto $\phi(p)$ de la superficie

$$\left(\phi_* \frac{\partial}{\partial u}\right)_{\phi(p)} = \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p$$

y

$$\left(\phi_* \frac{\partial}{\partial v}\right)_{\phi(p)} = \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p$$

Para los campos resulta,

$$\begin{aligned}\phi_* \frac{\partial}{\partial u} &= a_u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_u^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a_u^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \phi_* \frac{\partial}{\partial v} &= a_v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a_v^3 \frac{\partial}{\partial x^3}\end{aligned}$$

donde los coeficientes son las funciones para $i = 1, 2, 3$

$$a_u^i = \left(\phi_* \frac{\partial}{\partial u}\right)(x^i) = \frac{\partial(x^i \circ \phi)}{\partial u} = \frac{\partial x^i}{\partial u}$$

y

$$a_v^i = \left(\phi_* \frac{\partial}{\partial v}\right)(x^i) = \frac{\partial(x^i \circ \phi)}{\partial v} = \frac{\partial x^i}{\partial v}$$

Aplicaciones entre formas

La aplicación $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ induce la aplicación entre tensores

$$\phi^* : \Lambda_k(\mathcal{T}_{\phi(p)}) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$$

y vamos a ver que ésta a su vez induce una aplicación que a cada k -forma ω de \mathbb{R}^d le hace corresponder una k -forma $\phi^* \omega$ de \mathbb{R}^m . En efecto basta poner

$$(\phi^* \omega)(p) = \phi^*(\omega(\phi(p)))$$

que escribiremos

$$(\phi^* \omega)_p = \phi^*(\omega_{\phi(p)})$$

Observemos que en la anterior definición estamos utilizando la notación ϕ^* para dos conceptos distintos: El primer miembro es la definición de una aplicación entre formas y en el segundo miembro ϕ^* es una aplicación entre tensores antisimétricos. Esto significa que si v_1, \dots, v_k son vectores tangentes en \mathcal{T}_p se tiene

$$(\phi^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\phi(p)}(\phi_*(v_1), \dots, \phi_*(v_k))$$

Para las formas de orden 0, es decir las funciones, convenimos $\phi^* g = g \circ \phi$.

En el siguiente teorema se dan las propiedades más importantes de la aplicación ϕ^* entre formas.

Teorema 5.2. Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^m y $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ una aplicación diferenciable, entonces

a)

$$\phi^* dx^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi^i}{\partial \hat{x}^j} d\hat{x}^j \quad \forall i = 1, \dots, d$$

b)

$$\phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \phi^*(\omega_1) + \phi^*(\omega_2)$$

c)

$$\phi^*(g \cdot \omega) = (g \circ \phi) \cdot \phi^* \omega$$

d)

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^* \omega \wedge \phi^* \eta$$

Demostración:

a) Tenemos

$$\begin{aligned} \phi : \Omega \subset \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\rightarrow \phi(p) \end{aligned}$$

y sean $\{\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m\}$ el sistema de coordenadas en \mathbb{R}^m y $\{x^1, \dots, x^d\}$ el sistema de coordenadas en \mathbb{R}^d y

$$\phi^* : \omega_{\phi(p)} \in \Lambda_k(\mathcal{T}_{\phi(p)}) \rightarrow \phi^*(\omega_{\phi(p)}) = (\phi^* \omega)_p \in \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$$

Para todo $p \in \Omega$ y para todo $v_p = (p, v) \in \mathcal{T}_p = \mathbb{R}_p^m$:

$$\begin{aligned} (\phi^* dx^i)_p(v_p) &= \phi^*(dx^i_{\phi(p)})(v_p) = dx^i_{\phi(p)}(\phi_* v_p) \\ &= dx^i_{\phi(p)}(D\phi(p)(v)) = dx^i_{\phi(p)}(D\phi^1(p)v, \dots, D\phi^d(p)v) \\ &= dx^i_{\phi(p)}\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi^1}{\partial \hat{x}^j}(p)v^j, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi^d}{\partial \hat{x}^j}(p)v^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi^i}{\partial \hat{x}^j}(p)v^j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi^i}{\partial \hat{x}^j}(p) d\hat{x}^j_p(v_p) \end{aligned}$$

b) Para todo $p \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
(\phi^*(\omega_1 + \omega_2))_p &= \phi^*((\omega_1 + \omega_2)_{\phi(p)}) = \phi^*((\omega_1)_{\phi(p)} + (\omega_2)_{\phi(p)}) \\
&= \phi^*((\omega_1)_{\phi(p)}) + \phi^*((\omega_2)_{\phi(p)}) = (\phi^*\omega_1)_p + (\phi^*\omega_2)_p \\
&= (\phi^*(\omega_1) + \phi^*(\omega_2))_p
\end{aligned}$$

c) Para todo $p \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
(\phi^*(g.\omega))_p &= \phi^*(g(\phi(p))\omega_{\phi(p)}) = g(\phi(p))\phi^*(\omega_{\phi(p)}) \\
&= (g \circ \phi)(p)(\phi^*\omega)_p
\end{aligned}$$

d) Para todo $p \in \Omega$: Aplicamos la propiedad 3.2 (e) del producto exterior.

$$\begin{aligned}
(\phi^*(\omega \wedge \eta))_p &= \phi^*((\omega \wedge \eta)_{\phi(p)}) = \phi^*(\omega_{\phi(p)} \wedge \eta_{\phi(p)}) \\
&= \phi^*\omega_{\phi(p)} \wedge \phi^*\eta_{\phi(p)} = (\phi^*\omega)_p \wedge (\phi^*\eta)_p
\end{aligned}$$

■

Como aplicación de las anteriores propiedades véase el ejercicio 5.5.

Teorema 5.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y ϕ una aplicación de Ω en \mathbb{R}^d diferenciable entonces

$$\phi^*(h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d) = (h \circ \phi) \det(\phi')(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d)$$

Demostración:

Puesto que

$$\phi^*(h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d) = (h \circ \phi) \phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d)$$

basta probar que

$$\phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d) = \det(\phi')(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d)$$

Vamos a dar dos demostraciones :

- **Primera demostración:** Sea $p \in \Omega$ y sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base en \mathcal{T}_p dada por $e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ y respectivamente $e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\phi(p)}$ la base en $\mathcal{T}_{\phi(p)}$. Sea $(a_i^j)_{i,j=1}^d$ la matriz correspondiente a $\phi_* : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_{\phi(p)}$. Las columnas de esta matriz son las componentes de $\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ en la base de $\mathcal{T}_{\phi(p)}$. De modo que $a_i^j = \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}(p)$. En definitiva la matriz $(a_i^j)_{i,j=1}^d$ es la matriz jacobiana $\phi'(p)$. Tendremos

$$\phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d) = \lambda dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d$$

Evaluemos λ :

$$\begin{aligned}
& \left(\phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d) \right)_p (e_1, \dots, e_d) = (dx^1_{\phi(p)} \wedge \cdots \wedge dx^d_{\phi(p)}) (\phi_* e_1, \dots, \phi_* e_d) \\
& = (dx^1_{\phi(p)} \wedge \cdots \wedge dx^d_{\phi(p)}) \left(\sum_{j=1}^d a_1^j e_j, \dots, \sum_{j=1}^d a_d^j e_j \right) \\
& = \det(a_i^j(p)) = \det \phi'(p)
\end{aligned}$$

- Segunda demostración: Utilizaremos las propiedades (a) y (d) del teorema 5.2.

$$\begin{aligned}
& \phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d) = \phi^* dx^1 \wedge \cdots \wedge \phi^* dx^d \\
& = \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \phi^1}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \phi^d}{\partial x^j} dx^j \right) \\
& = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\partial \phi^{\sigma(1)}}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial \phi^{\sigma(d)}}{\partial x^d} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \det(\phi') (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d)
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la antisimetría del producto exterior. ■

En el ejercicio 5.6 se proponen distintos cálculos donde se aplican las propiedades anteriores.

5.2.2. Relación entre campos y formas

Vamos a estudiar en un contexto general la relación entre campos y formas. Más precisamente, en un abierto Ω de \mathbb{R}^d asignaremos a cada forma un campo y recíprocamente.

Nos situamos en \mathbb{R}^d con un sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ ortogonal aunque no necesariamente el sistema ortonormal cartesiano. Sea $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}\}$ la base de campos vectoriales y $\{dx^1, \dots, dx^d\}$ la correspondiente base dual. Sea T el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^d que en el sistema de coordenadas ortogonal anterior tendrá la expresión

$$T = E_1 dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + E_d dx^d \otimes dx^d$$

La norma de los vectores de la base del campo vectorial es

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x^i} \right\| = \sqrt{T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)} = \sqrt{E_i}$$

Eligiendo

$$e_i = \frac{1}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^i} \right\|} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \forall i = 1, \dots, d$$

obtenemos la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_d\}$. Tendremos la relación $dx^i(e_j) = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \delta_j^i$

Campo asociado a una 1-forma

Habitualmente y mientras no de lugar a confusión escribiremos (F, V) en lugar de $T(F, V)$ para designar el valor del tensor métrico aplicado a dos campos F y V . Dado un campo en F le asociamos una forma ω_F mediante la siguiente relación

$$\omega_F(V) = (F, V) \quad \forall V \in \mathcal{T} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{T}_p$$

Sea el campo $F = F^1 e_1 + \dots + F^d e_d$, vamos a calcular la 1-forma asociada $\omega_F = \lambda_1 dx^1 + \dots + \lambda_d dx^d$: Tomando $V = e_i$ para $i = 1, \dots, d$

$$\omega_F(e_i) = (F, e_i)$$

Por una parte

$$\omega_F(e_i) = \lambda_1 dx^1 \left(\frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \dots + \lambda_d dx^d \left(\frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{E_i}}$$

por otra parte

$$(F, e_i) = F^i$$

de modo que $\lambda_i = F^i \sqrt{E_i}$. Es decir finalmente la 1-forma asociada al campo F es

$$\omega_F = F^1 \sqrt{E_1} dx^1 + \dots + F^d \sqrt{E_d} dx^d$$

Ejemplo

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea df la 1-forma dada por $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^d} dx^d$ en el sistema de coordenadas ortogonal $\{x^1, \dots, x^d\}$. El campo asociado se llama gradiente de f y se escribe ∇f que en la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_d\}$, donde $e_i = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i}$, se escribirá

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x^1} e_1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{E_d}} \frac{\partial f}{\partial x^d} e_d$$

Por ejemplo en coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

El campo tensorial métrico fundamental en coordenadas cilíndricas es (véase ejercicio 5.1).

$$T = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz$$

Tendremos

$$e_r = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$e_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

Sea

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \varphi, z) \rightarrow f(r, \theta, z)$$

la diferencial de f es

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

el campo asociado es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

Dejamos como ejercicio 5.7 el cálculo ∇f en coordenadas esféricas. Abusando del lenguaje nos referiremos al campo tensorial asociado al tensor métrico fundamental también como tensor métrico fundamental cuando el contexto no lleve a confusión.

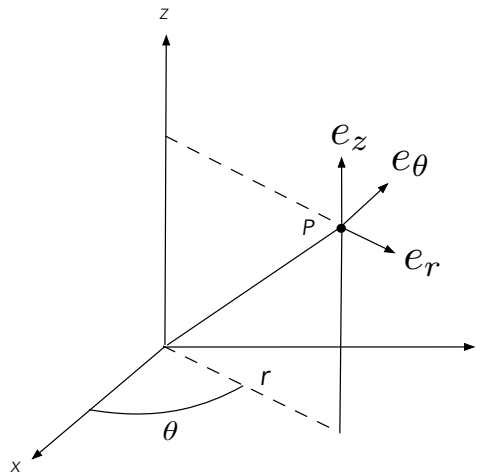


Figura 5.1 Base ortonormal en coordenadas cilíndricas

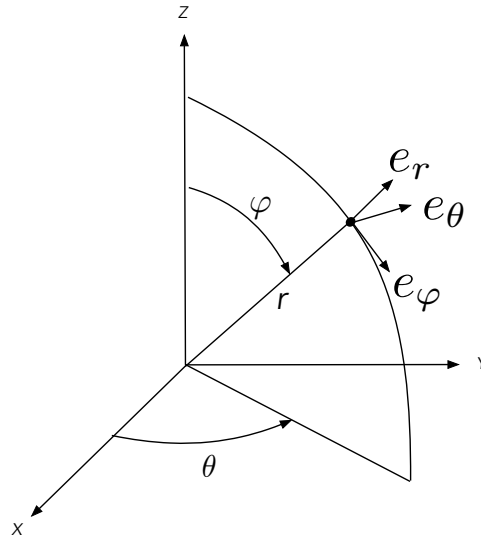


Figura 5.2 Base ortonormal en coordenadas esféricas

Campo asociado a una 2-forma en \mathbb{R}^3

Nos limitamos aquí al caso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dado un campo vectorial F en $\mathcal{T} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{T}_p$ le asociaremos una 2-forma ω_F definida por

$$\omega_F(V, W) = (F, V \times W) \quad \forall V, W \in \mathcal{T} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{T}_p$$

Tendremos

$$\omega_F = \alpha_1 dx^2 \wedge dx^3 + \alpha_2 dx^3 \wedge dx^1 + \alpha_3 dx^1 \wedge dx^2$$

Tomando sucesivamente en el lugar de V y de W los campos de la base ortonormal e_1, e_2, e_3 tenemos

$$\omega_F(e_1, e_2) = (F, e_1 \times e_2) = (F, e_3) = F^3$$

$$\omega_F(e_2, e_3) = (F, e_2 \times e_3) = (F, e_1) = F^1$$

$$\omega_F(e_3, e_1) = (F, e_3 \times e_1) = (F, e_2) = F^2$$

y

$$\begin{aligned}\omega_F(e_1, e_2) &= \alpha_3(dx^1 \wedge dx^2)(e_1, e_2) = \alpha_3 \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{1}{\sqrt{E_2}} = F^3 \\ \omega_F(e_2, e_3) &= \alpha_1(dx^2 \wedge dx^3)(e_2, e_3) = \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{1}{\sqrt{E_3}} = F^1 \\ \omega_F(e_3, e_1) &= \alpha_2(dx^3 \wedge dx^1)(e_3, e_1) = \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{1}{\sqrt{E_1}} = F^2\end{aligned}$$

de donde

$$\omega_F = F^1 \sqrt{E_2} \sqrt{E_3} dx^2 \wedge dx^3 + F^2 \sqrt{E_3} \sqrt{E_1} dx^3 \wedge dx^1 + F^3 \sqrt{E_1} \sqrt{E_2} dx^1 \wedge dx^2$$

Comentario 5.5. En el caso de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dado un campo vectorial F podemos asociarle siempre una $(d-1)$ -forma ω_F de la siguiente manera:

$$\omega_F(V_1, \dots, V_{d-1}) = (F, V_1 \times \dots \times V_{d-1}) \quad \forall V_1, \dots, V_{d-1} \in \mathcal{T} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{T}_p$$

Función asociada a una d -forma en \mathbb{R}^d

Sea la d -forma $\omega = \lambda dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d$ le asociamos la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f = \omega(e_1, \dots, e_d) = \lambda dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d(e_1, \dots, e_d) = \frac{\lambda}{\sqrt{E_1 \dots E_d}}$$

5.3. Diferencial exterior

Vamos a definir la diferencial exterior de una k -forma a partir de su expresión en coordenadas.

Definición 5.4. Sea $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ una k -forma.

Se define una $(k+1)$ -forma $d\omega$ que llamaremos diferencial exterior de ω mediante

$$\begin{aligned}d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\end{aligned}$$

Observación 5.2. Observemos que si ω es una 0-forma, es decir una función la definición anterior coincide con la diferencial de una función dada anteriormente (teorema 5.1).

Las principales propiedades de la diferencial exterior se recogen en el siguiente teorema:

Teorema 5.4. -

a) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$

b) Si ω es una k -forma y η es una l -forma entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

c)

$$d(d\omega) = 0$$

d) Si ω es una k -forma en \mathbb{R}^d y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ diferenciable en el abierto Ω de \mathbb{R}^m , entonces

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

Demostración:

a) Sean

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\eta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

entonces

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$d\eta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

y por otra parte

$$d(\omega + \eta) = d \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} + \eta_{i_1 \dots i_k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^d \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

de donde el resultado.

b) Sean

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\eta = \sum_{j_1 < \dots < j_l} \eta_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$$

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} \omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$$

Ahora bien

$$d(\omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_l}) = d\omega_{i_1 \dots i_k} \cdot \eta_{j_1 \dots j_l} + \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot d\eta_{j_1 \dots j_l}$$

entonces

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \eta_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + \omega_{i_1 \dots i_k} d\eta_{j_1 \dots j_l} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \eta_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + (-1)^k \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge d\eta_{j_1 \dots j_l} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

c) Sea $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ y

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Tomando la diferencial exterior de esta última

$$d(d\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^d \sum_{\beta=1}^d \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0$$

pues los términos $\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ y $\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$ se anulan dos a dos.

d) Razonamos por inducción: Si ω es una 0-forma, es decir una función, llamémosla g . Por definición $f^*g = g \circ f$, entonces para todo $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ y todo $(p, v) \in \mathcal{T}_p = \mathbb{R}_p^m$

$$\begin{aligned} d(f^*g)_p(v_p) &= d(g \circ f)_p(v_p) = D(g \circ f)(p)(v) = (Dg(f(p)) \circ Df(p))(v) \\ &= Dg(f(p))(f_*v_p) = (dg)_{f(p)}(f_*v_p) = (f^*dg)_p(v_p) \end{aligned}$$

esto demuestra $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ para una 0-forma ω .

Supongamos ahora cierta la propiedad para k -formas, demostraremos que es válida para $(k+1)$ -formas del tipo $\omega \wedge dx^i$, en efecto teniendo en cuenta las propiedades (a), (b) y (c) y la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} f^*d(\omega \wedge dx^i) &= f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) = f^*(d\omega \wedge dx^i) \\ &= f^*d\omega \wedge f^*dx^i = d(f^*\omega) \wedge f^*dx^i \end{aligned}$$

Ahora bien

$$d(f^* \omega) \wedge f^* dx^i = d(f^* \omega \wedge f^* dx^i)$$

pues

$$d(f^* \omega \wedge f^* dx^i) = d(f^* \omega) \wedge f^* dx^i + (-1)^k f^* \omega \wedge d(f^* dx^i) = d(f^* \omega) \wedge f^* dx^i$$

ya que $d(f^* dx^i) = d\left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{\alpha=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\alpha \partial x^j} dx^\alpha \wedge dx^j = 0$ por lo que finalmente

$$f^* d(\omega \wedge dx^i) = d(f^* \omega \wedge f^* dx^i) = d(f^*(\omega \wedge dx^i))$$

■

El siguiente es un recíproco del anterior teorema.

Teorema 5.5. *Sea ω una k -forma definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y sea d un operador que a ω le asigna una $(k+1)$ -forma $d\omega$ definida en Ω que verifica las siguientes propiedades:*

a) *Si f es una 0-forma, es decir una función, entonces*

$$df = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (5.4)$$

b) *Si ω y η son k -formas*

$$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta \quad (5.5)$$

c) *Si ω es una k -forma y η es l -formas*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \quad (5.6)$$

En particular si f es una 0-forma y ω una k -forma, convenimos

$$f\omega = f \wedge \omega$$

y en este caso la propiedad 5.6 se escribe

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + (-1)^0 f \wedge d\omega = df \wedge \omega + f d\omega \quad (5.7)$$

d) *Si ω es una k -forma*

$$d(d\omega) = 0 \quad (5.8)$$

Entonces para toda k -forma $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

Demostración:

Por la propiedad (5.5) basta probar la fórmula para una k -forma $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$.

Primeramente observamos que por la propiedad (5.8) $d(dx^i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, d$. Entonces por la propiedad (5.6) $d(dx^1 \wedge dx^2) = d(dx^1) \wedge dx^2 + (-1)^1 dx^1 \wedge d(dx^2) = 0$. Recursivamente probamos $d(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) = 0$.

Aplicando (5.7) al producto de la 0-forma f y de la k -forma $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ tenemos

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k + (-1)^0 f \wedge d(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \left(\sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \end{aligned}$$

■

Comentario 5.6. Podemos dar una definición intrínseca de la diferencial exterior (consultar el libro de Cartan [3]) como se indica a continuación.

Para ello vamos a considerar una forma como aplicación de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ en $\Lambda_k(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \omega : \Omega &\rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow \omega(p) = \omega_p \end{aligned}$$

de la siguiente manera: Si $p \in \Omega$, el espacio tangente \mathcal{T}_p lo identificamos con \mathbb{R}_p^d de la forma indicada en el capítulo 4, es decir $v_p \in \mathcal{T}_p$ se identifica con (p, v) donde $v \in \mathbb{R}^d$. Podemos de esa forma considerar ω_p como un elemento de $\Lambda_k(\mathbb{R}^d)$ poniendo para $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$

$$\omega_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_p(v_{1p}, \dots, v_{kp})$$

donde $v_{ip} = (p, v_i)$ para $i = 1, \dots, k$. Una k -forma es una expresión de la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^k \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

donde ω_{i_1, \dots, i_k} son funciones diferenciables en Ω a valores reales. Podemos calcular la diferencial en p (en el sentido definido en el capítulo 1)

$$D\omega(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^d)$$

que es una aplicación lineal, es decir

$$D\omega(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \Lambda_k(\mathbb{R}^d))$$

de modo que

$$D\omega : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \Lambda_k(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R}^d)$$

Definimos entonces la diferencial exterior $d\omega$ como la aplicación que a todo $p \in \Omega$ le hace corresponder el tensor antisimetrizado de $D\omega(p)$ multiplicado por el factor de normalización $k+1$. Para verificar que esta definición coincide con la definición 5.4 vamos a dar una expresión explícita de la misma y en el teorema 5.6 se verifica que esta expresión de la diferencial exterior verifica las propiedades del teorema 5.5.

La diferencial $D\omega(p)$ es una aplicación lineal en su primer argumento y multilineal alternada en sus k últimos argumentos. Al antisimetrizarlo de este tensor, multiplicado por $(k+1)$, le llamamos $(d\omega)_p$

$$(d\omega)_p(v_0, v_1, \dots, v_k) = (k+1) \text{Ant}(D\omega(p))(v_0)(v_1, \dots, v_k) \quad (5.9)$$

Las permutaciones de los $k+1$ índices las separamos en $k+1$ grupos, donde en cada uno de los grupos el término del primer argumento permanece fijo:

$$\begin{aligned} (d\omega)_p(v_0, v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+1}} \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_{\sigma(0)})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+1}; \sigma(0)=0} \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_0)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+1}; \sigma(0)=1} \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_1)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &+ \dots + \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+1}; \sigma(0)=k} \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_k)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \end{aligned}$$

Como el tensor es antisimétrico con respecto a los k últimos argumentos los $k!$ sumandos de cada grupo son iguales por lo tanto resulta eligiendo $\sigma(0) = i$ y $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ en la siguiente expresión

$$\begin{aligned} (d\omega)_p(v_0, v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i=0}^k \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_{\sigma(0)=i})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i D\omega(p)(v_i)(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) \quad (5.10) \end{aligned}$$

y definimos la diferencial exterior de una k forma ω como la aplicación

$$\begin{aligned} d\omega : \Omega &\rightarrow \Lambda_{k+1}(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow d\omega(p) = (d\omega)_p \end{aligned}$$

donde $(d\omega)_p$ está definida por la expresión (5.10) y donde el término \hat{v}_i indica que éste se ha suprimido de la secuencia.

Teorema 5.6. Sea $(d\omega)$ la $(k+1)$ -forma

$$\begin{aligned} d\omega : \Omega &\rightarrow \Lambda_{k+1}(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow d\omega(p) = (d\omega)_p \end{aligned}$$

donde $(d\omega)_p$ viene dada por la expresión 5.10. Entonces $d\omega$ verifica las propiedades (5.4), (5.5), (5.6), (5.7) y (5.8) del teorema 5.5.

Demostración:

- Propiedad (5.4): Si $\omega = f$ es una 0-forma, es decir una función, la definición de $d\omega$ dada por (5.10) (que en este caso se reduce a $(df)_p(v_0) = Df(p)(v_0)$) es justamente el ejemplo de una 1-forma dada en 5.2 y el teorema 5.1 nos da la propiedad (5.4).
- Propiedad (5.5): Esta propiedad es inmediata pues $D(\omega + \eta)(p) = D\omega(p) + D\eta(p)$ de donde

$$\begin{aligned} (d(\omega + \eta))_p(v_0, v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i D(\omega + \eta)(p)(v_i)(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (D(\omega(p)) + D\eta(p))(v_i)(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (D(\omega(p)))(v_i)(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) + \sum_{i=0}^k (-1)^i (D(\eta(p)))(v_i)(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) \\ &= (d\omega)_p(v_0, v_1, \dots, v_k) + (d\eta)_p(v_0, v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

- Propiedad (5.6): Consideramos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^d &\rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^d) \times \Lambda_l(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow (\omega_p, \eta_p) \end{aligned}$$

y la aplicación

$$\begin{aligned} \Lambda : \Lambda_k(\mathbb{R}^d) \times \Lambda_l(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \Lambda_{k+l}(\mathbb{R}^d) \\ (\omega_p, \eta_p) &\rightarrow \omega_p \wedge \eta_p \end{aligned}$$

la aplicación compuesta $\Lambda \circ \varphi = \omega \wedge \eta$ es

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta : \Omega \subset \mathbb{R}^d &\xrightarrow{\varphi} \Lambda_k(\mathbb{R}^d) \times \Lambda_l(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\Lambda} \Lambda_{k+l}(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow (\omega_p, \eta_p) \rightarrow \omega_p \wedge \eta_p \end{aligned}$$

Aplicamos la regla de la cadena para calcular $D(\omega \wedge \eta)(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \Lambda_{k+l}(\mathbb{R}^d))$: La aplicación Λ es bilineal, por lo tanto

$$D(\omega \wedge \eta)(p) = D(\Lambda \circ \varphi)(p) = D\Lambda(\varphi(p)) \circ D\varphi(p)$$

y para $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tendremos (véase ejercicio 1.6 del capítulo 1)

$$\begin{aligned} D(\omega \wedge \eta)(p)(v_0) &= D\Lambda(\omega(p), \eta(p))(D\omega(p), D\eta(p))(v_0) \\ &= D\Lambda(\omega(p), \eta(p))(D\omega(p)(v_0), D\eta(p)(v_0)) \\ &= \Lambda(D\omega(p)(v_0), \eta(p)) + \Lambda(\omega(p), D\eta(p)(v_0)) \\ &= D\omega(p)(v_0) \wedge \eta(p) + \omega(p) \wedge D\eta(p)(v_0) \end{aligned}$$

que también podemos escribir por la propiedad (d) en 3.2 del producto exterior

$$D(\omega \wedge \eta)(p)(v_0) = D\omega(p)(v_0) \wedge \eta_p + (-1)^{kl} D\eta(p)(v_0) \wedge \omega_p$$

y según la definición intrínseca 5.9

$$d(\omega \wedge \eta)_p = (k+l+1) \text{Ant}(D(\omega \wedge \eta)(p))$$

Tenemos pues las aplicaciones $(k+l+1)$ multilineales

$$\begin{aligned} T : (v_0, v_1, \dots, v_{k+l}) &\rightarrow D(\omega \wedge \eta)(p)(v_0)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ R : (v_0, v_1, \dots, v_{k+l}) &\rightarrow (D\omega(p)(v_0) \wedge \eta_p)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ S : (v_0, v_1, \dots, v_{k+l}) &\rightarrow (D\eta(p)(v_0) \wedge \omega_p)(v_1, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

relacionadas por

$$T = R + (-1)^{kl} S$$

y vamos a calcular

$$\text{Ant} T = \text{Ant} R + (-1)^{kl} \text{Ant} S$$

Primero observemos que $D\omega(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \Lambda_k(\mathbb{R}^d))$, por tanto es una aplicación $(k+1)$ -multilineal y podemos escribirla como

$$D\omega(p)(v_0, v_1, \dots, v_k) = D\omega(p)(v_0)(v_1, \dots, v_k)$$

$$\begin{aligned} \text{Ant} R(v_0, v_1, \dots, v_{k+l}) &= \text{Ant}(D\omega(p)(v_0) \wedge \eta_p)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \frac{1}{(k+l+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l+1}} \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_{\sigma(0)})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

Vamos ahora a simplificar la anterior expresión de $\text{Ant} R$ teniendo en cuenta la antisimetría de $D\omega(p)(\cdot)$ (obvia pues solo tiene un argumento), la antisimetría de $D\omega(p)(v_{\sigma(0)})$ y la antisimetría de η_p : Aplicando el teorema 3.3 resulta

$$\begin{aligned}
& \text{Ant } R(v_0, v_1, \dots, v_{k+l}) \\
&= \sum_{\sigma \in C_{1,k,l}} \text{sgn}(\sigma) R(v_{\sigma(0)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in C_{1,k,l}} \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_{\sigma(0)})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})
\end{aligned} \tag{5.11}$$

donde $C_{1,k,l}$ son las combinaciones de $k+l+1$ índices tomados de 1 en 1, k en k y l en l de manera que verifiquen

$$\begin{aligned}
& \sigma(0) \\
& \sigma(1) < \dots < \sigma(k) \\
& \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)
\end{aligned}$$

El número total de combinaciones posibles es

$$(k+l+1) \frac{(k+l)!}{k!l!} = \frac{(k+l+1)!}{k!l!}$$

Por otra parte aplicando de nuevo el teorema 3.3 podemos escribir para una permutación σ verificando $\sigma(0) < \dots < \sigma(k)$

$$\begin{aligned}
& (d\omega)_p(v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\tau \in C_{1,k}} \text{sgn}(\tau) D\omega(p)(v_{\tau(\sigma(0))})(v_{\tau(\sigma(1))}, \dots, v_{\tau(\sigma(k))})
\end{aligned} \tag{5.12}$$

donde $C_{1,k}$ corresponden a la elección de

$$\begin{aligned}
& \tau(\sigma(0)) = \sigma(i); i = 0, \dots, k \\
& \tau(\sigma(1)) < \dots < \tau(\sigma(k))
\end{aligned}$$

por tanto el sumatorio tiene $k+1$ sumandos.

Calculamos ahora $(d\omega)_p \wedge \eta_p$: Aplicando el teorema 3.3 a

$$((d\omega)_p \wedge \eta_p) = \frac{(k+l+1)!}{(k+1)!l!} \text{Ant}((d\omega)_p \otimes \eta_p)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
& ((d\omega)_p \wedge \eta_p)(v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\
&= \sum_{\sigma \in C_{k+1,l}} \text{sgn}(\sigma) (d\omega)_p(v_{\sigma(0)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}$$

donde $C_{k+1,l}$ son las combinaciones de $k+l+1$ elementos tomadas de $k+1$ en $k+1$ y de l en l tales que

$$\sigma(0) < \sigma(1) < \dots < \sigma(l)$$

$$\sigma(l+1) < \sigma(l+2) < \dots < \sigma(k+l)$$

Sustituyendo el valor de $(d\omega)_p$ dado por la ecuación (5.12) resulta

$$\begin{aligned} & ((d\omega)_p \wedge \eta_p)(v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= \sum_{\sigma \in C_{k+1,l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\tau \in C_{1,k}} \operatorname{sgn}(\tau) D\omega(p)(v_{\tau(\sigma(0))})(v_{\tau(\sigma(1))}, \dots, v_{\tau(\sigma(k))}) \right) \cdot \\ & \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

Consideramos τ extendida a los $k+l+1$ índices de modo que deja invariante los índices correspondientes a los l últimos argumentos, es decir,

$$\tau(\sigma(k+1)) = \sigma(k+1), \dots, \tau(\sigma(k+l)) = \sigma(k+l)$$

Llamando ahora $\sigma' = \tau \circ \sigma$, tenemos $\operatorname{sgn}(\sigma') = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$. El sumatorio exterior $(\sum_{\sigma \in C_{k+1,l}})$ corresponde a las combinaciones de $k+l+1$ elementos tomados de $k+1$ en $k+1$ (o de l en l) que son $\frac{(k+l+1)!}{(k+1)!l!}$. El sumatorio interior corresponde a la elección de $k+1$ elementos tomados de 1 en 1 . Por lo tanto cuando σ recorre las combinaciones $C_{k+1,l}$ y τ recorre las combinaciones $C_{1,k}$ entonces σ' recorre las combinaciones $C_{1,k+l}$. En total nos dan las

$$(k+1) \cdot \frac{(k+l+1)!}{(k+1)!l!} = \frac{(k+l+1)!}{k!l!}$$

combinación de sumandos en el sumatorio $\sum_{\sigma \in C_{1,k+l}}$ de la expresión (5.11). Por tanto

$$\begin{aligned} & ((d\omega)_p \wedge \eta_p)(v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= \sum_{\sigma' \in C_{1,k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma') D\omega(p)(v_{\sigma'(0)})(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \eta_p(v_{\sigma'(k+1)}, \dots, v_{\sigma'(k+l)}) \end{aligned}$$

que coincide con la expresión (5.11) cambiando σ por σ' . Hemos demostrado

$$\operatorname{Ant} R = (d\omega)_p \wedge \eta_p$$

Análogamente se demuestra

$$\operatorname{Ant} S = (d\eta)_p \wedge \omega_p = (-1)^l \omega_p \wedge d\eta_p$$

y finalmente obtenemos

$$(d(\omega \wedge \eta))_p = (d\omega)_p \wedge \eta_p + (-1)^k \omega_p \wedge (d\eta)_p$$

La propiedad (5.7) es un caso particular de la propiedad (5.6) considerando las funciones como 0-formas.

- Propiedad (5.8): Tenemos

$$d\omega : p \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow (d\omega)_p \in \Lambda_{k+1}(\mathbb{R}^d)$$

que se construye mediante la antisimetrización de la diferencial $D\omega(p)$ de la función

$$\omega : p \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \omega_p \in \Lambda_k(\mathbb{R}^d)$$

de modo que $D\omega(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \Lambda_k(\mathbb{R}^d))$. Entonces

$$\begin{aligned} (d\omega)_p(v_1, \dots, v_{k+1}) &= (k+1) \text{Ant}(D\omega(p))(v_1)(v_2, \dots, v_{k+1}) \\ &= \sum_{\sigma \in C_{1,k}} \text{sgn}(\sigma) D\omega(p)(v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) \end{aligned}$$

donde $C_{1,k}$ son las combinaciones σ de los índices $1, \dots, k+1$ tal que $\sigma(1) = i; i = 1, \dots, k+1$ y $\sigma(2) < \dots < \sigma(k+1)$ y

$$\begin{aligned} d\omega : \Omega &\rightarrow \Lambda_{k+1}(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow d\omega(p) = (d\omega)_p \end{aligned}$$

Ahora para calcular $d(d\omega)$, se calcula primero $(D(d\omega))(p)$ que es una aplicación lineal de \mathbb{R}^d en $\Lambda_{k+1}(\mathbb{R}^d)$, es decir, $(D(d\omega))(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \Lambda_{k+1}(\mathbb{R}^d))$. El siguiente paso es antisimetrizar

$$(d(d\omega))_p(v_0, \dots, v_{k+1}) = (k+2) \text{Ant}(D(d\omega))(p)(v_0)(v_1, \dots, v_{k+1})$$

Ahora identificando $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \Lambda_k(\mathbb{R}^d)))$ con el espacio de aplicaciones bilineales

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \Lambda_k(\mathbb{R}^d))$ podemos escribir (véase el comentario 5.7)

$$\begin{aligned} (D(d\omega))(p)(v_0)(v_1, \dots, v_{k+1}) &= \sum_{\sigma \in C_{1,k}} \text{sgn}(\sigma) (D(D\omega))(p)(v_0)(v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) \\ &= \sum_{\sigma \in C_{1,k}} \text{sgn}(\sigma) (D^2\omega)(p)(v_0, v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) \end{aligned}$$

y finalmente antisimetrizando

$$\begin{aligned} (d(d\omega))(p)(v_0, \dots, v_{k+1}) &= (k+2) \text{Ant}(D(d\omega))(p)(v_0)(v_1, \dots, v_{k+1}) \\ &= \sum_{\tau \in C_{1,k+1}} \text{sgn}(\tau) (D(d\omega))(p)(v_{\tau(0)})(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k+1)}) \\ &= \sum_{\tau \in C_{1,k+1}} \text{sgn}(\tau) \left(\sum_{\sigma \in C_{1,k}} \text{sgn}(\sigma) (D^2\omega)(p)(v_{\tau(0)}, v_{\tau(\sigma(1))}(v_{\tau(\sigma(2))}, \dots, v_{\tau(\sigma(k+1))}) \right) \end{aligned}$$

El número de sumandos totales es $\binom{k+2}{1} \times \binom{k+1}{1} = (k+2)(k+1)$.

Extendiendo las permutaciones σ a $k+2$ índices, poniendo $\sigma(0) = 0$ y llamando $\sigma' = \tau \circ \sigma$ podemos escribir

$$\begin{aligned} & (d(d\omega))(p)(v_0, \dots, v_{k+1}) \\ &= \sum_{\sigma' \in C_{1,1,k}} \text{sgn}(\sigma') (D^2\omega)(p)(v_{\sigma'(0)}, v_{\sigma'(1)})(v_{\sigma'(2)}, \dots, v_{\sigma'(k+1)}) \end{aligned}$$

donde en la última expresión $C_{1,1,k}$ son las combinaciones σ' de los índices $0, \dots, k+1$ tales que $\sigma'(0) = i; i = 0, \dots, k+1, \sigma'(1) = j; j = 0, \dots, k+1$ y $\sigma'(2) < \dots < \sigma'(k+1)$. Comprobemos el número de sumandos; el número de sumandos es $\frac{(k+2)!}{k!1!1!} = (k+2)(k+1)$. Se trata pues de los mismos sumandos reordenados de distinta forma.

Finalmente observemos que para $\sigma'(2), \dots, \sigma'(k+1)$ fijados tenemos los sumandos

$$\begin{aligned} & (D^2\omega)(p)(v_{\sigma'(0)}, v_{\sigma'(1)})(v_{\sigma'(2)}, \dots, v_{\sigma'(k+1)}) \\ & - (D^2\omega)(p)(v_{\sigma'(1)}, v_{\sigma'(0)})(v_{\sigma'(2)}, \dots, v_{\sigma'(k+1)}) = 0 \end{aligned}$$

puesto que la diferencial segunda $(D^2\omega)(p)$ es una aplicación bilineal simétrica (véase el capítulo 1). En el ejercicio 5.8 se propone realizar estos cálculos con detalle en el caso $k = 2$.

■

Comentario 5.7. Para calcular $D(d\omega)(p)$ se ha tenido en cuenta la siguiente propiedad: Introducimos la función

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow d\omega(p)(v_1, \dots, v_{k+1}) \end{aligned}$$

Tenemos $Df(p)(v_0) = (D(d\omega))(p)(v_0)(v_1, \dots, v_{k+1})$. En efecto

$$\begin{aligned} & \frac{\|f(p+v_0) - f(p) - Df(p)(v_0)\|}{\|v_0\|} \\ &= \frac{\|d\omega(p+v_0)(v_1, \dots, v_{k+1}) - d\omega(p)(v_1, \dots, v_{k+1}) - (D(d\omega))(p)(v_0)(v_1, \dots, v_{k+1})\|}{\|v_0\|} \\ &\leq \frac{\|d\omega(p+v_0) - d\omega(p) - (D(d\omega))(p)(v_0)\| \cdot \|v_1\| \dots \|v_{k+1}\|}{\|v_0\|} \end{aligned}$$

y la última expresión tiende a cero cuando $\|v_0\| \rightarrow 0$

Ejemplos

1. Sea una forma de orden 0, es decir una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. La diferencial df en coordenadas cartesianas $\{x^1, \dots, x^d\}$ es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^d} dx^d$$

A esta diferencial le hacemos corresponder el campo vectorial

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^d} \right)^t$$

al que llamamos gradiente de f .

2. Sea ω una 1-forma en \mathbb{R}^3

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

en coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$. A esta diferencial le asociamos el campo vectorial

$$F = (F^1, F^2, F^3)^t$$

donde $F^1 = F_1$, $F^2 = F_2$, $F^3 = F_3$. La diferencial $d\omega$ será la 2-forma

$$d\omega = dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz$$

donde

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz$$

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz$$

$$dF_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x} dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz$$

Tendremos

$$dF_1 \wedge dx = \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy$$

$$dF_2 \wedge dx = \frac{\partial F_2}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial F_2}{\partial z} dy \wedge dz$$

$$dF_3 \wedge dx = \frac{\partial F_3}{\partial y} dy \wedge dz - \frac{\partial F_3}{\partial x} dz \wedge dx$$

y finalmente

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

El campo asociado a $d\omega$ se llama rotacional de F

$$\text{rot}F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y}\right)^t$$

3. Sea ω una 2-forma en \mathbb{R}^3

$$\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

el campo asociado es

$$F = (F^1, F^2, F^3)^t$$

donde $F^1 = F_1$, $F^2 = F_2$, $F^3 = F_3$ y $d\omega$ es la 3-forma en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} d\omega &= dF_1 \wedge dy \wedge dz + dF_2 \wedge dz \wedge dx + dF_3 \wedge dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

al que se le asocia la función divergencia de F ,

$$\text{div}F = \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z}$$

Ejemplos en coordenadas generales ortogonales

Como en la subsección 5.2.2 nos situamos en \mathbb{R}^3 con un sistema de coordenadas $\{x^1, x^2, x^3\}$ ortogonal aunque no necesariamente el sistema ortonormal cartesiano. Sea $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\}$ la base de campos vectoriales y $\{dx^1, dx^2, dx^3\}$ la correspondiente base dual. Sea T el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^3 que en el sistema de coordenadas ortogonal anterior tendrá la expresión

$$T = E_1 dx^1 \otimes dx^1 + E_2 dx^2 \otimes dx^2 + E_3 dx^3 \otimes dx^3$$

La norma de los vectores de la base del campo vectorial es

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x^i} \right\| = \sqrt{T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)} = \sqrt{E_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Eligiendo

$$e_i = \frac{1}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^i} \right\|} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \forall i = 1, 2, 3$$

obtenemos la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dado un campo $F = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3$ de coordenadas F^1, F^2, F^3 en la base e_1, e_2, e_3 . La 1-forma asociada es

$$\omega_F = F^1 \sqrt{E_1} dx^1 + F^2 \sqrt{E_2} dx^2 + F^3 \sqrt{E_3} dx^3$$

1. Operador gradiente: Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea df la 1-forma dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3$$

en el sistema de coordenadas ortogonal $\{x^1, x^2, x^3\}$. Llamamos gradiente de f al campo ∇f definido por

$$\omega_{\nabla f} = df$$

En la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, donde $e_i = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, 2, 3$ se escribirá

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x^1} e_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial f}{\partial x^2} e_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{\partial f}{\partial x^3} e_3$$

2. Operador rotacional: Definimos el campo $rot F$ como el campo asociado a la forma $d\omega_F$. Es decir

$$\omega_{rot F} = d\omega_F$$

Tendremos pues

$$\begin{aligned} d\omega_F &= \left(\frac{\partial F^3 \sqrt{E_3}}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2 \sqrt{E_2}}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \left(\frac{\partial F^1 \sqrt{E_1}}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3 \sqrt{E_3}}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \\ &+ \left(\frac{\partial F^2 \sqrt{E_2}}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1 \sqrt{E_1}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \omega_{rot F} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} rot F &= \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}} \left(\frac{\partial F^3 \sqrt{E_3}}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2 \sqrt{E_2}}{\partial x^3} \right) e_1 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{E_3 E_1}} \left(\frac{\partial F^1 \sqrt{E_1}}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3 \sqrt{E_3}}{\partial x^1} \right) e_2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial F^2 \sqrt{E_2}}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1 \sqrt{E_1}}{\partial x^2} \right) e_3 \end{aligned}$$

simbólicamente escribiremos

$$\text{rot}F = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} F^1 \sqrt{E_1} & \sqrt{E_1} e_1 \\ \frac{\partial}{\partial x^2} F^2 \sqrt{E_2} & \sqrt{E_2} e_2 \\ \frac{\partial}{\partial x^3} F^3 \sqrt{E_3} & \sqrt{E_2} e_3 \end{bmatrix}$$

3. Operador divergencia: Sea el campo $F = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3$. La 2-forma asociada es

$$\omega_F = F^1 \sqrt{E_2 E_3} dx^2 \wedge dx^3 + F^2 \sqrt{E_3 E_1} dx^3 \wedge dx^1 + F^3 \sqrt{E_1 E_2} dx^1 \wedge dx^2$$

Definimos la divergencia de F como la función tal que

$$\omega_{\text{div}F} = d\omega_F$$

Es decir,

$$\text{div}F = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial F^1 \sqrt{E_2 E_3}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2 \sqrt{E_3 E_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3 \sqrt{E_1 E_2}}{\partial x^3} \right)$$

4. Operador Laplaciano: El operador Laplaciano, Δ , de una función f es $\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f))$. De modo que en coordenadas generales ortogonales se escribe

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{\frac{E_2 E_3}{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{E_3 E_1}{E_2}} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_3}} \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \right)$$

Resumiendo, en un abierto del espacio tridimensional a cada campo vectorial F le corresponde una 1-forma, ω_F^1 y una 2-forma ω_F^2 . Por lo tanto la diferencial exterior se traslada a una operación sobre campos. La diferencial exterior de 0-formas (funciones), de 1-formas y de 2-formas se corresponde con los operadores de gradiente, rotacional y divergencia, definidas por las relaciones:

$$df = \omega_{\nabla f}^1, \quad d\omega_F^1 = \omega_{\text{rot}F}^2, \quad d\omega_F^2 = \text{div}(F)\omega^3$$

donde ω^3 es el elemento de volumen.

A modo de ejemplo calcular el operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas (ejercicio 5.9).

5.4. Formas cerradas y exactas

Definición 5.5. Una forma ω se llama cerrada si $d\omega = 0$ y una k -forma se llama exacta si existe una $k-1$ -forma η tal que $\omega = d\eta$.

En la sección anterior hemos definido los operadores gradiente de una función, rotacional de un campo y la divergencia de un campo y asociado a cada uno de ellos la forma correspondiente. Consecuencias de la propiedad de la diferencial exterior $d(d\omega) = 0$ son las siguientes propiedades de estos operadores.

Propiedades 5.1. -

a) En un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, tenemos

$$\text{rot}(\nabla f) = 0 \quad (5.13)$$

b) En un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sea un campo vectorial F en $\mathcal{T} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{T}_p$

$$\text{div}(\text{rot}F) = 0 \quad (5.14)$$

Demostración:

- a) $\text{rot}(\nabla f)$ es el campo asociado a la 0-forma $d(d\omega^0)$ donde $\omega^0 = f$.
 b) $\text{div}(\text{rot}F)$ es la función asociada a la 3-forma $d(d\omega_F^1)$ donde ω_F^1 es la 1-forma asociada al campo F .

■

Hemos visto que toda forma exacta es cerrada pues si $\omega = d\eta$ entonces $d\omega = d(d\eta) = 0$. Nos preguntamos ahora si toda forma cerrada es exacta. Vamos a ver que haciendo algunas hipótesis suplementarias esto es cierto. Veamos en primer lugar un ejemplo sencillo:

Sea $\omega = Pdx + Qdy$ una forma de orden 1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que ω es cerrada es decir

$$\begin{aligned} 0 = d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

tenemos pues

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Veamos que ω es exacta, es decir que existe una función f tal que $\omega = df$. En efecto basta poner

$$f(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt$$

y verifiquemos que $df = \omega$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) dt \\
 &= P(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial P}{\partial y}(x, t) dt \\
 &= P(x, 0) + P(x, y) - P(x, 0) = P(x, y)
 \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y Q(x, t) dt = Q(x, y)$$

Se deja como ejercicio 5.10 el caso de 1-formas en \mathbb{R}^3 . Veamos el caso general conocido como lema de Poincaré. El cálculo anterior presupone que ω y por tanto las funciones P y Q están definidas en todo el segmento que va del origen al punto (x, y) . Una manera de asegurar esto es que el conjunto Ω sea un conjunto con forma de estrella, noción que precisamos a continuación.

Definición 5.6. Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ diremos que es un conjunto con forma de estrella si existe un punto $p_0 \in \Omega$ tal que para todos los puntos $p \in \Omega$ el segmento que une p con p_0 se encuentra en Ω .

Diremos que el conjunto Ω es un conjunto con forma de estrella respecto a p_0 .

En los conjuntos con forma de estrella con respecto a un punto p_0 las semirectas que parten de este punto solo cortan a la frontera del conjunto en un solo punto.

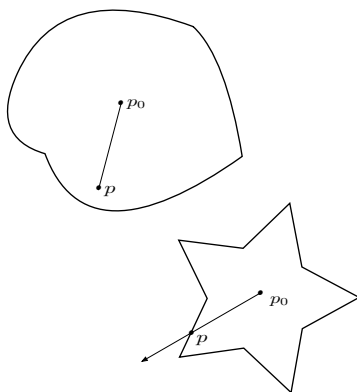


Figura 5.3 Conjuntos con forma de estrella

Teorema 5.7. Lema de Poincaré.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto en forma de estrella, entonces toda forma cerrada en Ω es exacta.

Demostración:

Sea Ω un conjunto en forma de estrella con respecto al punto p_0 . Mediante una traslación del origen al punto p_0 podemos suponer que Ω es en forma de estrella respecto al origen.

Definimos una aplicación I que a cada l -forma le hace corresponder una $(l-1)$ -forma tal que $I(0) = 0$ y

$$\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$$

Deduciremos entonces que si $d\omega = 0$ entonces $\omega = d(I\omega)$. Sea

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \omega_{i_1, \dots, i_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}$$

una l -forma. Puesto que Ω tiene forma de estrella se puede definir

$$I\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{\alpha=1}^l (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{(l-1)} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}$$

donde $\widehat{dx^{i_\alpha}}$ significa que el término dx^{i_α} se omite.

Mediante cálculo vamos a comprobar que $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$. En efecto, llamemos

$$f(x) = \left(\int_0^1 t^{(l-1)} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right)$$

y observemos que $d(f x^{i_\alpha}) = x^{i_\alpha} df + f dx^{i_\alpha}$. Como

$$\begin{aligned} df &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\int_0^1 t^{(l-1)} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx^j \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\int_0^1 t^l \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx^j \end{aligned}$$

y además se tiene

$$f dx^{i_\alpha} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} = (-1)^{\alpha-1} f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\alpha} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= l \sum_{i_1 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 t^{(l-1)} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{j=1}^d (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_l}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}$$

de modo que aplicamos la definición de I a la $l+1$ -forma siguiendo el orden, primero respecto a x^j y después con respecto a las l variables restantes x^{i_1}, \dots, x^{i_l} , tendremos

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^d \left(\int_0^1 t^l \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^d \sum_{\alpha=1}^l (-1)^\alpha \left(t^l \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \end{aligned}$$

como $(-1)^\alpha = -(-1)^{\alpha-1}$ resulta sumando

$$\begin{aligned} I(d\omega) + d(I\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^d \left(\int_0^1 t^l x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_l} I \left(\int_0^1 t^{(l-1)} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^l \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx)) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \omega_{i_1, \dots, i_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} = \omega \end{aligned}$$

■

Veamos algunas consecuencias del lema de Poincaré (teorema 5.7). A continuación $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ será un conjunto con forma de estrella.

a) Sea $F = (F^1, F^2, F^3)^t$ un campo vectorial en Ω tal que $\text{rot} F = 0$. Un campo que cumple esta propiedad se llama irrotacional. Entonces existe una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$.

En efecto sea $\omega = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$ la 1-forma asociada a F . Tendremos

$$d\omega = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0$$

por lo tanto ω es cerrada y existe una función f tal que

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

y se tiene

$$F^1 = \frac{\partial f}{\partial x}, F^2 = \frac{\partial f}{\partial y}, F^3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

es decir $F = \nabla f$.

Un ejemplo en física es el campo electrostático. Otro ejemplo en mecánica de fluidos es el caso de un fluido irrotacional. Véase al respecto el ejercicio 5.11.

- b) Sea $F = (F^1, F^2, F^3)^t$ un campo vectorial en Ω tal que $\operatorname{div} F = 0$. Entonces existe un campo A en Ω tal que $F = \operatorname{rot} A$.

En efecto, sea $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$, la diferencial exterior de ω es $d\omega = \operatorname{div} F dx \wedge dy \wedge dz = 0$ por lo tanto gracias al lema de Poincaré (teorema 5.7) existe una 1-forma η tal que $\eta = A^1 dx + A^2 dy + A^3 dz$ de modo que $\omega = d\eta$ y tenemos $F = \operatorname{rot} A$. Al campo $A = (A^1, A^2, A^3)^t$ se le llama potencial vector del campo F . Un ejemplo en física es el campo magnético.

- c) Aquí Ω es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 con forma de estrella. Sea $V = (V^1, V^2)^t$ un campo en Ω tal que $\operatorname{div} V = 0$. Pongamos $\omega = -V^2 dx + V^1 dy$. Tenemos

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial V^2}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial V^1}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial V^1}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \operatorname{div} V dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto existe una 0-forma (es decir una función) ψ tal que

$$\omega = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

es decir $V^1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ y $V^2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. A esta función ψ se le llama función de corriente. Un ejemplo en mecánica de fluidos es el campo de velocidades plano de un fluido incompresible. Se puede ver que el campo $V = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^t$ es un campo tangente a las líneas de corriente. (Véase el ejercicio 5.12)

Comentario 5.8. Un campo vectorial plano en \mathbb{R}^3 es un campo $V = (V^1, V^2, V^3)^t$ en el que una de las coordenadas es nula y las otras dos coordenadas no dependen de ésta. Por ejemplo $V = (V^1, V^2, 0)^t$ y $\frac{\partial V^1}{\partial z} = 0$ y $\frac{\partial V^2}{\partial z} = 0$. En este caso el rotacional del campo V solo tiene una componente no nula por lo que podemos asimilarlo a un escalar.

$$\operatorname{rot} V = \left(0, 0, \frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{\partial V^1}{\partial y} \right)^t$$

Así se escribe habitualmente para un campo plano $V = (V^1, V^2)^t$,

$$\operatorname{rot} V = \frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{\partial V^1}{\partial y}$$

Ejercicios del Capítulo 5

5.1. Hallar la expresión del tensor métrico fundamental en coordenadas cilíndricas

5.2. Hallar la expresión del tensor métrico fundamental en coordenadas esféricas

5.3. Hallar la expresión del elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

5.4. Hallar la expresión del elemento de volumen en coordenadas esféricas.

5.5. Calcular

$$\phi^*(P dx^1 \wedge dx^2 + Q dx^2 \wedge dx^3)$$

donde P y Q son funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} .

5.6. Calcular $\omega \wedge \eta$ en los casos siguientes

a)

$$\begin{aligned}\omega &= 2x dx + y dy \\ \eta &= x^3 dx + y^2 dy\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\omega &= x dx - y dy \\ \eta &= y dx + x dy\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\omega &= x dx + y dy + z dz \\ \eta &= z dx \wedge dy + x dy \wedge dz + y dz \wedge dx\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\omega &= e^{xyz} dx \wedge dy \\ \eta &= e^{-xyz} dz\end{aligned}$$

5.7. Calcular ∇f en coordenadas esféricas.

5.8. Dada una forma 2 forma ω

$$\begin{aligned}\omega : \Omega &\rightarrow \Lambda_2(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow \omega(p) = \omega_p\end{aligned}$$

1. Calcular $d\omega$
2. $D(d\omega)$
3. $d(d\omega)$

5.9. Calcular el operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

5.10. Sea $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ con $d\omega = 0$. Demostrar que existe una función f tal que $\omega = df$.

5.11. -

1. Sea $V = (V^1, V^2)^t$ un campo plano de velocidades en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ conjunto con forma de estrella, irrotacional es decir $rot V = 0$. Demostrar que existe una función φ , llamada función potencial, tal que $V = \nabla\varphi$. Si además el fluido es incompresible, es decir $div V = 0$ (véase subsección 8.4.4 en el capítulo 8 para una deducción de esta condición) concluir que $\Delta\varphi = 0$.
2. Demostrar que el vector V es perpendicular a las líneas equipotenciales

$$\varphi(x, y) = constante$$

5.12. Sea $V = (V^1, V^2)^t$ un campo plano de velocidades en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ conjunto con forma de estrella, tal que $div V = 0$. Sea la función ψ , llamada función de corriente, tal que $V^1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $V^2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$. Demostrar que el vector V es tangente a las líneas de corriente $\psi(x, y) = constante$. Si el campo V es irrotacional concluir que la función de corriente ψ verifica $\Delta\psi = 0$.

Capítulo 6

Integración en cadenas

Resumen

En primer lugar introducimos la noción de cadenas de cubos singulares de forma elemental para después desarrollar la integración en cadenas. La referencia básica es [6].

6.1. Cubos singulares y cadenas

Cubos singulares

Empezamos con la definición de cubo singular:

Definición 6.1. *Un cubo singular k -dimensional o brevemente k -cubo en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es una función, que supondremos continua,*

$$c : [0, 1]^k \rightarrow \Omega$$

donde $[0, 1]^k = [0, 1] \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times [0, 1]$

Ejemplos

1. Un 0-cubo en Ω es

$$c : \{0\} \rightarrow \Omega$$

es decir un punto en Ω identificando el cubo con su imagen.

2. Un 1-cubo en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d \geq 1$ es

$$c : [0, 1] \rightarrow \Omega$$

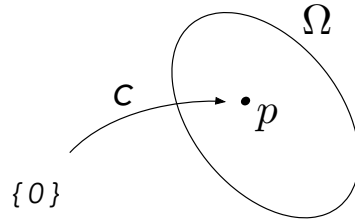


Figura 6.1 Un 0-cubo

es decir un segmento de curva en Ω . Si $d = 1$ es un segmento en $\Omega \subset \mathbb{R}$

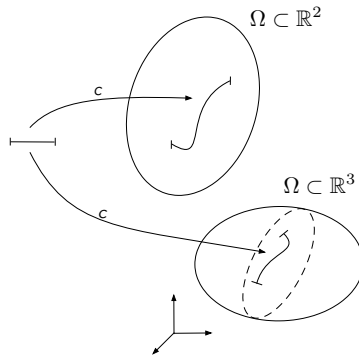


Figura 6.2 Un 1-cubo en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3

3. Un 2-cubo en Ω , con $d \geq 2$ es

$$c : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$$

es decir una porción de superficie en Ω .

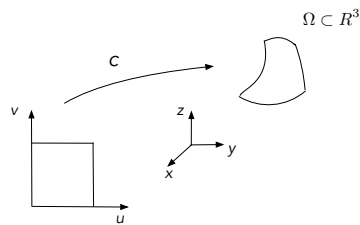


Figura 6.3 Un 2-cubo

4. Un 3-cubo en Ω , con $d \geq 3$ es

$$c : [0, 1]^3 \rightarrow \Omega$$

es decir un cuboide en Ω .

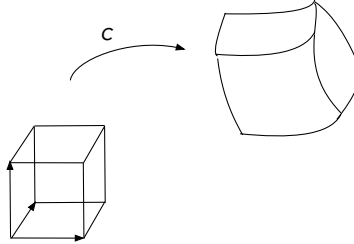


Figura 6.4 Un 3-cubo

Llamaremos k -cubo típico a la aplicación identidad

$$I^k : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$x \rightarrow x$$

Cadenas

Definición 6.2. Llamaremos cadenas de dimensión k a una expresión de la forma

$$c = \sum_i a_i c_i$$

donde a_i es un número entero, es decir, $a_i \in \mathbb{Z}$ y c_i k -cubos singulares.

Las sumas de cadenas se realizan sumando los coeficientes de la siguiente manera:
Si

$c = 2c_1 + 3c_2 - 4c_3 - c_5$ y $c' = 3c_1 + 2c_3 + 8c_5$ son dos k cadenas, entonces

$$c + c' = 5c_1 + 3c_2 - 2c_3 + 7c_5$$

Y también el producto de una cadena por un número entero se realiza multiplicando cada coeficiente por este número entero. Así el producto por 2 de la cadena $c = c_1 + c_2$ es $2c = 2c_1 + 2c_2$. La visualización geométrica que damos a las cadenas es la yuxtaposición de las imágenes de c . En los siguientes ejemplos se ilustra este significado geométrico.

Comentario 6.1. En la práctica y mientras no de lugar a confusión abusaremos del lenguaje matemático y nos referiremos a un cubo singular como la imagen de dicho cubo en \mathbb{R}^d y del mismo modo para las cadenas singulares \mathbb{R}^d . Así por ejemplo para expresar que un punto p pertenece a la imagen de una cadena c escribiremos abusando del lenguaje $p \in c$.

Ejemplos de cadenas

- Sean c_1 , c_2 y c_3 tres 1-cubos singulares de modo que $c_1(1) = c_2(0)$ y $c_2(1) = c_3(0)$ En el figura 6.5 representamos la cadena $c = c_1 + c_2 + c_3$ y la cadena $c = -c_1 + c_2 + c_3$

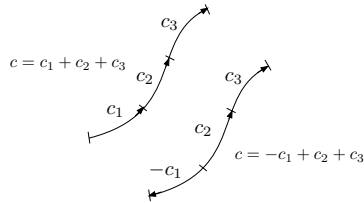


Figura 6.5 Ejemplo de dos 1-cadenas

- En la figura 6.6 mostramos el ejemplo del producto de la cadena $c = c_1 + c_2$ por 2, es decir $c' = 2c = 2c_1 + 2c_2$.

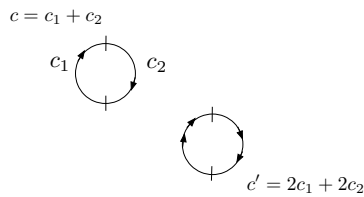


Figura 6.6 Ejemplo de producto de una cadena por 2

- Véase en la figura 6.7 un ejemplo de una 2-cadena.

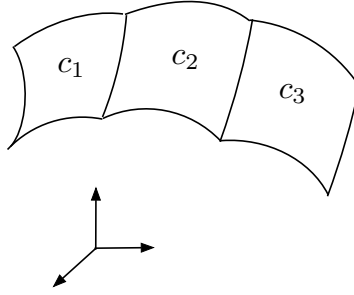


Figura 6.7 Ejemplo de una 2-cadena en \mathbb{R}^3

Fronteras

Para cada k -cadena c vamos a definir una $k-1$ cadena denominada frontera de c y que designaremos mediante la notación ∂c . Veamos primero un ejemplo: sea I^2 el 2-cubo típico. Sea $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = (1, 1)$ y $p_4 = (0, 1)$ los vértices de $[0, 1]^2$. La frontera de I^2 será la cadena formada por cuatro 1-cubos formados por los segmentos $\langle p_1, p_2 \rangle$, $\langle p_2, p_3 \rangle$, $\langle p_3, p_4 \rangle$ y $\langle p_4, p_1 \rangle$ donde tenemos en cuenta el orden en el que se dan los puntos. Escribiendo $c_1 = \langle p_1, p_2 \rangle$, $c_2 = \langle p_2, p_3 \rangle$, $c_3 = \langle p_3, p_4 \rangle$ y $c_4 = \langle p_4, p_1 \rangle$ escribiremos la frontera de I^2 como la cadena $\partial I^2 = c_1 + c_2 - c_3 - c_4$.

Vamos a definir la frontera de una cadena de manera general. Empezamos definiendo la frontera del k -cubo típico:

Para $1 \leq i \leq k$ se definen dos $(k-1)$ -cubos singulares (caras), $I_{(i,0)}^k$ y $I_{(i,1)}^k$ como sigue

$$I_{(i,0)}^k : [0, 1]^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$x = (x^1, \dots, x^{k-1}) \rightarrow I_{(i,0)}^k(x) = I^k(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{k-1})$$

es decir, fijamos la i -ésima coordenada al valor 0.

$$I_{(i,1)}^k : [0, 1]^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$x = (x^1, \dots, x^{k-1}) \rightarrow I_{(i,1)}^k(x) = I^k(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{k-1})$$

es decir, fijamos la i -ésima coordenda al valor 1.

$I_{(i,0)}^k$ se llama la $(i, 0)$ -cara de I^k .

$I_{(i,1)}^k$ se llama la $(i, 1)$ -cara de I^k .

La frontera ∂I^k se define como

$$\partial I^k = \sum_{i=1}^k (-1)^i I_{(i,0)}^k + (-1)^{i+1} I_{(i,1)}^k = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^k$$

Ejemplos

1. Frontera del 1-cubo típico:

$$\partial I^1 = -I_{(1,0)}^1 + I_{(1,1)}^1$$

donde

$$\begin{aligned} I_{(1,0)}^1 : \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ 0 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I_{(1,1)}^1 : \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ 0 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

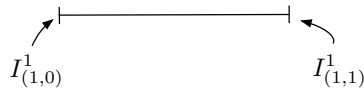


Figura 6.8 Frontera del 1-cubo típico

2. La frontera del 2-cubo típico I^2 es

$$\partial I^2 = -I_{(1,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 + I_{(2,0)}^2 - I_{(2,1)}^2$$

donde

$$\begin{aligned} I_{(1,0)}^2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow (0, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(1,1)}^2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow (1, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(2,0)}^2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow (x, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(2,1)}^2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow (x, 1) \end{aligned}$$

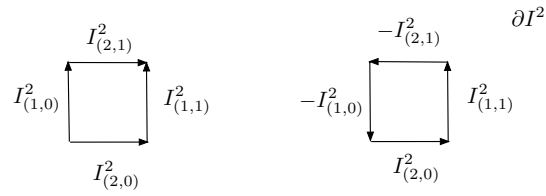


Figura 6.9 Frontera del 2- cubo típico

3. La frontera del 3-cubo típico I^3 es

$$\partial I^3 = -I_{(1,0)}^3 + I_{(1,1)}^3 + I_{(2,0)}^3 - I_{(2,1)}^3 - I_{(3,0)}^3 + I_{(3,1)}^3$$

donde por ejemplo $I_{(2,1)}^3$ es la aplicación

$$I_{(2,1)}^3 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x^1, x^2) \rightarrow I^3(x^1, 1, x^2) = (x^1, 1, x^2)$$

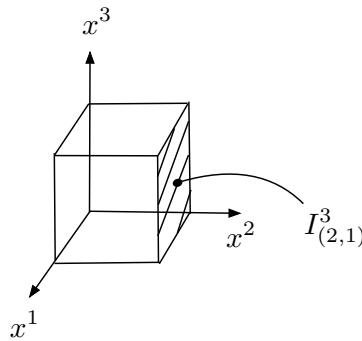


Figura 6.10 Cara (2,1) del 3- cubo típico

Vamos ahora a definir la frontera de un k -cubo singular $c : [0, 1]^k \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d$: En primer lugar se define la (i, α) -cara $c_{(i, \alpha)}$ mediante la composición de funciones,

$$c_{(i, \alpha)} = c \circ I_{(i, \alpha)}^k$$

y finalmente definimos la frontera de un k -cubo singular c

$$\partial c = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{(i, \alpha)}$$

Terminamos definiendo la frontera de una k -cadena $c = \sum a_i c_i$ mediante

$$\partial c = \sum a_i \partial c_i$$

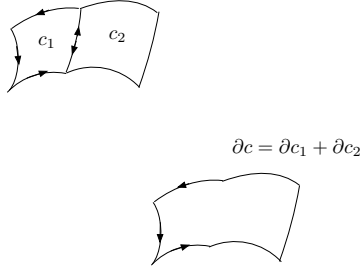


Figura 6.11 Frontera de una 2-cadena

La siguiente propiedad del operador frontera es esencial:

Teorema 6.1. Si c es una k -cadena en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ entonces

$$\partial(\partial c) = 0$$

Antes de la demostración vamos a considerar para fijar las ideas el caso del 3-cubo típico y en particular la cara $(2, 1)$. Calcularemos las caras de esta cara $(2, 1)$. Observemos la figura 6.12. La cara $(2, 1)$ es el 2-cubo singular que denominamos $I_{(2,1)}^3$. Este 2-cubo singular aplica el cuadrado unidad $[0, 1]^2$ en \mathbb{R}^3 y es la aplicación como hemos visto anteriormente

$$\begin{aligned} I_{(2,1)}^3 : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x = (x^1, x^2) &\rightarrow (x^1, 1, x^2) \end{aligned}$$

La cara $(1, 0)$ de la cara $I_{(2,1)}^3$ se calcula mediante la composición de funciones

$$\begin{aligned} [0, 1] &\xrightarrow{I_{(1,0)}^2} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{I_{(2,1)}^3} \mathbb{R}^3 \\ x &\rightarrow (0, x) \rightarrow (0, 1, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I_{(2,1)}^3)_{(1,0)} &= (I_{(2,1)}^3 \circ I_{(1,0)}^2)(x) = I_{(2,1)}^3(I_{(1,0)}^2(x)) \\ &= I_{(2,1)}^3(I^2(0, x)) = I_{(2,1)}^3(0, x) = (0, 1, x) \end{aligned}$$

Ahora las cuatro caras (aristas en este caso) del 2-cubo singular $I_{(2,1)}^3$ son 1-cubo singulares. Las cuatro caras son las aplicaciones

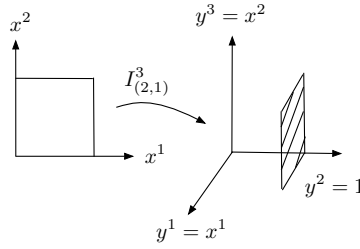


Figura 6.12 Cara $I_{(2,1)}^3$ del 3-cubo típico

$$\begin{aligned}
 (I_{(2,1)}^3)_{(1,0)} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 x = (x^1) &\rightarrow (0, 1, x^1) \\
 (I_{(2,1)}^3)_{(1,1)} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 x = (x^1) &\rightarrow (1, 1, x^1) \\
 (I_{(2,1)}^3)_{(2,0)} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 x = (x^1) &\rightarrow (x^1, 1, 0) \\
 (I_{(2,1)}^3)_{(2,1)} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 x = (x^1) &\rightarrow (x^1, 1, 1)
 \end{aligned}$$

Damos paso a la demostración del teorema.

Demostración:

Empezamos estudiando el caso del k -cubo típico $\partial(\partial I^k)$. Para ello tendremos que calcular primero las caras de I^k . Cada cara de I^k es un $(k-1)$ -cubo singular. Sea $c' = I_{(i,\alpha)}^k$ la cara (i, α) de I^k y sea $(I_{(i,\alpha)}^k)_{(j,\beta)}$ la cara (j, β) de $c' = I_{(i,\alpha)}^k$. c' es un $(k-1)$ -cubo singular, entonces la cara (j, β) de c' es $c'_{(j,\beta)} = c' \circ I_{(j,\beta)}^{k-1}$. Sea $i \leq j$, veamos que $(I_{(i,\alpha)}^k)_{(j,\beta)} = (I_{(j+1,\beta)}^k)_{(i,\alpha)}$, en efecto para $x = (x^1, \dots, x^{k-2}) \in \mathbb{R}^{k-2}$

$$\begin{aligned}
 (I_{(i,\alpha)}^k)_{(j,\beta)}(x) &= I_{(i,\alpha)}^k(I_{(j,\beta)}^{k-1}(x)) \\
 &= I_{(i,\alpha)}^k(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{k-2}) \\
 &= I^k(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{k-2})
 \end{aligned}$$

del mismo modo

$$\begin{aligned}
(I_{(j+1,\beta)}^k)_{(i,\alpha)}(x) &= I_{(j+1,\beta)}^k(I_{(i,\alpha)}^{k-1}(x)) \\
&= I_{(j+1,\beta)}^k(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{k-2}) \\
&= I^k(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{k-2})
\end{aligned}$$

Ahora para las caras de un k -cubo singular c tendremos

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^k$$

y para la cara (j,β) de $c_{(i,\alpha)}$ tendremos para $i \leq j$

$$\begin{aligned}
(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} &= c_{(i,\alpha)} \circ I_{(j,\beta)}^{k-1} = c \circ I_{(i,\alpha)}^k \circ I_{(j,\beta)}^{k-1} \\
&= c \circ I_{(j+1,\beta)}^k \circ I_{(i,\alpha)}^{k-1} = c_{(j+1,\beta)} \circ I_{(i,\alpha)}^{k-1} = (c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}
\end{aligned}$$

Para una k -cubo singular

$$\begin{aligned}
\partial(\partial c) &= \partial\left(\sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^1 (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

En estas sumas $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ y $(c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ aparecen con signos opuestos y se anulan dos a dos de modo que $\partial(\partial c) = 0$. Finalmente una k -cadena es combinación lineal de k -cubos singulares y junto con la definición de frontera de una cadena (operador lineal) tenemos también el resultado para k cadenas. ■

Comentario 6.2. Para cada valor de $j = 1, \dots, k-1$ y cada valor de $i \leq j$ y para cada par de valores fijos de $\alpha, \beta = 0, 1$ tendremos un número $\frac{k(k-1)}{2}$ de sumandos del tipo $(I_{(i,\alpha)}^k)_{(j,\beta)}(x)$. Podemos hacer corresponder cada uno de estos con los sumandos $(I_{(j+1,\beta)}^k)_{(i,\alpha)}(x)$ que son un número igual a $\frac{k(k-1)}{2}$. En total tendremos $k(k-1)$ sumandos los cuales se anulan dos a dos para cada valor de α y cada valor de β . Se traducen en la expresión (6.1) en $2 \times 2 \times k(k-1) = 4k(k-1)$ sumandos.

Por ejemplo en el caso del cubo típico de dimensión 3 tenemos 6 caras de dimensión 2 y cada una de estas caras tiene 4 caras de dimensión 1. En total al calcular $\partial\partial c$, tenemos 24 sumandos en la expresión (6.1).

Veámoslo con detalle, para $k = 3$, $k(k-1) = 6$ y para cada valor de $\alpha = 0, 1$ y de $\beta = 0, 1$ tendremos los términos

1. Para $j = 1$, $(I_{(1,\alpha)}^3)_{(1,\beta)}(x)$ que se cancela con el término $(I_{(2,\beta)}^3)_{(1,\alpha)}(x)$
2. Para $j = 2$ tenemos el término

$$(I_{(1,\alpha)}^3)_{(2,\beta)}(x)$$

que se cancela con el término

$$(I_{(3,\beta)}^3)_{(1,\alpha)}(x)$$

y el término

$$(I_{(2,\alpha)}^3)_{(2,\beta)}(x)$$

que se cancela con el término

$$(I_{(3,\beta)}^3)_{(2,\alpha)}(x)$$

Un total de seis sumandos que se cancelan dos a dos para cada par de valores fijos de α y β . Considerando todos los valores 0 y 1 para α y β obtenemos en la expresión (6.1) $2 \times 2 \times k(k-1) = 4k(k-1) = 24$ sumandos.

Comprobar que $\partial(\partial c) = 0$ en el caso $c = I^2$ (Ejercicio 6.1)

6.2. Integración en cadenas

Empezaremos con las definiciones básicas que nos llevarán a la integración en cadenas de formas diferenciales.

Definición 6.3. Sea ω una k -forma en $[0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$, dada por $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$. Se define

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^k} \omega &= \int_{[0,1]^k} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) dx^1 \dots dx^k \\ &= \int_{[0,1]^k} f dx^1 \dots dx^k \end{aligned}$$

Comentario 6.3. También se escribe

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k$$

Definición 6.4. Sea ω una k -forma en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y c un k -cubo singular en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ se define la integral de la k -forma en c mediante

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega$$

Definición 6.5. Sea ω una k -forma en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y c una k -cadena, es decir

$$c = \sum_{i=1}^n a_i c_i$$

donde c_i son k -cubos singulares en Ω . Si $k \geq 1$ definimos la integral de ω en c mediante

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^n a_i \int_{c_i} \omega$$

Si $k = 0$, $c : \{0\} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un 0-cubo singular y f es una 0-forma, es decir una función, definiremos

$$\int_c f = f(c(0))$$

Observación 6.1. Sea ω una k -forma y c una k -cadena. En el cálculo de $\int_c \omega$ solo intervienen los valores de ω sobre los espacios tangentes.

Demostración:

En efecto, bastará verlo para c un k -cubo singular

$$\begin{aligned} \int_c \omega &= \int_{[0,1]^k} c^* \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \int_{[0,1]^k} \omega \left(c_* \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, c_* \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \end{aligned}$$

Los campos $c_* \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, c_* \frac{\partial}{\partial x^k}$ son campos tangentes en $c([0,1]^k)$ ■

Ejemplos y significado geométrico o físico

En los ejemplos que siguen consideraremos \mathbb{R}^d con un sistema de coordenadas ortogonal $\{x^1, \dots, x^d\}$. Sea $T = \sum_{i=1}^d E_i dx^i \otimes dx^i$ el tensor métrico fundamental (campo tensorial). Escribimos como anteriormente para dos campos X e Y , (X, Y) en lugar de $T(X, Y)$. Recordemos que dado un campo vectorial X en \mathbb{R}^d la norma de este campo es $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$.

La base de campos tangentes asociada al sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ es $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}\}$. La norma de los elementos de esta base será para cada $i = 1, \dots, d$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x^i} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right)} = \sqrt{E_i}$$

Entonces el conjunto $e_i = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i}$ $i = 1, \dots, d$ es una base ortonormal de campos.

Dado un campo vectorial $F = F^1 e_1 + \dots + F^d e_d$ expresado en esta base su norma será

$$\|F\| = \sqrt{(F, F)} = \sqrt{(F^1)^2 + \dots + (F^d)^2}$$

Véase el ejercicio 6.2 para cálculos concretos.

En los ejemplos que siguen utilizaremos la relación entre campos y formas estudiada en el apartado 5.2.2.

1. Integral de una 1-forma sobre un 1-cubo singular o integral de un campo a lo largo de una curva:

Sea

$$\begin{aligned} c : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\rightarrow (x^1(t), \dots, x^d(t)) \end{aligned}$$

un 1-cubo singular en \mathbb{R}^d . Asociamos c a la curva imagen en \mathbb{R}^d entre los puntos $c(0)$ y $c(1)$. Consideramos además un campo $F = F^1 e_1 + \dots + F^d e_d$ en \mathbb{R}^d . La 1-forma ω_F asociada a F es

$$\omega_F = F^1 \sqrt{E_1} dx^1 + \dots + F^d \sqrt{E_d} dx^d$$

La integral de ω_F en c .

$$\begin{aligned} \int_c \omega_F &= \int_{[0,1]} c^* \omega_F \left(\frac{d}{dt} \right) dt \\ &= \int_{[0,1]} \omega_F \left(c_* \frac{d}{dt} \right) dt = \int_{[0,1]} (F, T) dt \end{aligned}$$

donde T es el campo tangente asociado a la curva c .

Vamos a interpretar esta integral para distintas elecciones de F :

- Sea T el campo tangente asociado a la curva c y elegimos $F = \tau = \frac{T}{\|T\|}$ el campo unitario tangente a la curva. Entonces,

$$\int_c \omega_\tau = \int_{[0,1]} (\tau, T) dt = \int_{[0,1]} \|T\| dt$$

A la 1-forma

$$\omega_\tau = \tau^1 \sqrt{E_1} dx^1 + \dots + \tau^d \sqrt{E_d} dx^d$$

se le llama elemento de longitud que se expresa en la variable t como $\|T\| dt$.

La integral

$$\int_c \omega_\tau = \int_{[0,1]} \|T\| dt$$

es la longitud de la curva c entre los puntos $c(0)$ y $c(1)$ (véase ejercicio 6.3).

- Si F es un campo de fuerzas: $(F, T) = (F, \tau) \|T\|$ y (F, τ) representa el trabajo realizado por unidad de longitud de modo que $\int_c \omega_F$ es el trabajo de F a lo largo de la curva c . A la 1-forma

$$\omega_F = F^1 \sqrt{E_1} dx^1 + \dots + F^d \sqrt{E_d} dx^d$$

se le llama elemento de trabajo que expresado en la variable t es $(F, \tau) \|T\| dt$.

- Si F es un campo vectorial general: ω_F es la circulación de F a lo largo de c y a la 1-forma

$$\omega_F = F^1 \sqrt{E_1} dx^1 + \cdots + F^d \sqrt{E_d} dx^d$$

se la llama elemento de circulación a lo largo de c que expresada en la variable t es $(F, \tau) \|T\| dt$.

En coordenadas cartesianas $\{x^1, \dots, x^d\}$:

El elemento de longitud es $\omega_\tau = \tau^1 dx^1 + \cdots + \tau^d dx^d$

El elemento de circulación es $\omega_F = F^1 dx^1 + \cdots + F^d dx^d$

Comentario 6.4. Al elemento de longitud se le denota a menudo impropriadamente ds . Esta notación es impropia pues no necesariamente ω_τ es la diferencial de una función s .

Propiedad 6.1. Sea $\tau = \tau^1 e_1 + \cdots + \tau^d e_d$ el campo tangente unitario a la curva c y sea $\omega_\tau = \tau^1 \sqrt{E_1} dx^1 + \cdots + \tau^d \sqrt{E_d} dx^d$ el elemento de longitud asociado a la curva c .

Se verifica la siguiente propiedad:

$$\tau^i \omega_\tau = \sqrt{E_i} dx^i \quad i = 1, \dots, d$$

Demostración:

Véase el ejercicio 6.4 ■

- Integral de una 2-forma sobre un 2-cubo singular o integral de un campo sobre de una superficie:

Tomaremos $d = 3$. Sea \mathbb{R}^3 con un sistema de coordenadas ortogonal $\{x^1, x^2, x^3\}$.

Sea $T = \sum_{i=1}^3 E_i dx^i \otimes dx^i$ el tensor métrico fundamental (campo tensorial).

Sea

$$c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u, v \rightarrow (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$$

un 2-cubo singular representando una superficie en \mathbb{R}^3 .

Sea $F = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3$ un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y

$$\eta_F = F^1 \sqrt{E_2 E_3} dx^2 \wedge dx^3 + F^2 \sqrt{E_1 E_3} dx^3 \wedge dx^1 + F^3 \sqrt{E_1 E_2} dx^1 \wedge dx^2$$

la 2-forma asociada.

Vamos a interpretar la integral de η_F en c .

$$\begin{aligned}\int_c \eta_F &= \int_{[0,1]^2} c^* \eta_F = \int_{[0,1]^2} c^* \eta_F \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) du dv \\ &= \int_{[0,1]^2} \eta_F \left(c_* \frac{\partial}{\partial u}, c_* \frac{\partial}{\partial v} \right) du dv = \int_{[0,1]^2} (F, T_u \times T_v) du dv\end{aligned}$$

donde T_u y T_v son los campos tangentes asociados a la superficie c . A $(F, T_u \times T_v)$ se le llama producto mixto de los campos F, T_u, T_v .
Introduciendo el campo normal unitario a la superficie

$$n = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

podemos escribir

$$\int_c \eta_F = \int_{[0,1]^2} (F, n) \|T_u \times T_v\| du dv = \int_{[0,1]^2} (F, T_u \times T_v) du dv$$

La integral $\int_c \eta_F$ es el flujo total de F a través de la superficie c y a la 2-forma η_F se le llama elemento de flujo.

En particular tomando $F = n$

$$\int_c \eta_n = \int_{[0,1]^2} \|T_u \times T_v\| du dv$$

obtenemos el área total de la superficie. (Véase ejercicio 6.5). A la 2-forma η_n se le llama elemento de área.

En coordenadas cartesianas x, y, z :

El elemento de flujo es $\eta_F = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$

El elemento de área es $\eta_n = n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy$

Comentario 6.5. Al elemento de área η_n se le denota a menudo impropiamente mediante dA . Esta notación es impropia pues no necesariamente η_n es la diferencial de una función A .

Propiedad 6.2. Sea $n = n^1 e_1 + n^2 e_2 + n^3 e_3$ el campo normal unitario a la superficie c y sea

$$\eta_n = n^1 \sqrt{E_2 E_3} dx^2 \wedge dx^3 + n^2 \sqrt{E_1 E_3} dx^3 \wedge dx^1 + n^3 \sqrt{E_1 E_2} dx^1 \wedge dx^2$$

el elemento de área asociado a la superficie c .

Se verifican las siguientes propiedades:

$$n^1 \eta_n = \sqrt{E_2 E_3} dx^2 \wedge dx^3$$

$$n^2 \eta_n = \sqrt{E_3 E_1} dx^3 \wedge dx^1$$

$$n^3 \eta_n = \sqrt{E_1 E_2} dx^1 \wedge dx^2$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 6.6 ■

Véase el ejercicio 6.7 para cálculos explícitos del campo normal y del elemento de área.

3. Integral de una 3-forma sobre un 3-cubo singular:

Sea

$$c : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rightarrow (x(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), y(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), z(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}))$$

un 3-cubo singular representando un cuboide en \mathbb{R}^3 . Se han considerado coordenadas cartesianas $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ y $\{x, y, z\}$.

Sea $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ es decir el elemento de volumen. Vamos a interpretar la integral de ω en c .

$$\begin{aligned} \int_c \omega &= \int_{[0,1]^3} c^* \omega = \int_{[0,1]^3} c^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial}{\partial \hat{y}}, \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z} \\ &= \int_{[0,1]^3} \omega \left(c_* \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, c_* \frac{\partial}{\partial \hat{y}}, c_* \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z} \\ &= \int_{[0,1]^3} \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} \right] d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z} = \pm \int_{c([0,1]^3)} dx dy dz \\ &= \pm \text{Volumen de } c([0, 1]^3) \end{aligned}$$

Se ha utilizado la notación

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial z}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial z}{\partial \hat{z}} \end{bmatrix}$$

y en el penúltimo paso hemos aplicado el teorema 2.6. El signo dependerá de que la aplicación que define el cubo singular cambie o no cambie la orientación, es decir el signo viene determinado por el signo de

$$\det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} \right]$$

Sea ahora la 3-forma $\omega = \rho dx \wedge dy \wedge dz$ donde ρ es la densidad de masa o la densidad de carga eléctrica. Entonces $\int_c \omega$ es la masa total o la carga eléctrica en $c([0, 1]^3)$ respectivamente.

6.3. Ejemplos prácticos de integración en cadenas

En esta sección veremos ejemplos prácticos de integración de formas en cadenas:

- **Ejemplo 1:** Sea $F = (F^1, F^2, F^3)^t = (6xy, 3x^2 - 3y^2, 0)^t$ un campo vectorial (un posible campo eléctrico).
- a) Calcular la integral curvilínea de F desde el punto $(0,0,0)$ al punto $(x_1, y_1, 0)$ a lo largo del camino que va en línea recta de $(0,0,0)$ a $(x_1, 0, 0)$ y luego al $(x_1, y_1, 0)$. Pongamos $\omega = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$ y vamos a calcular

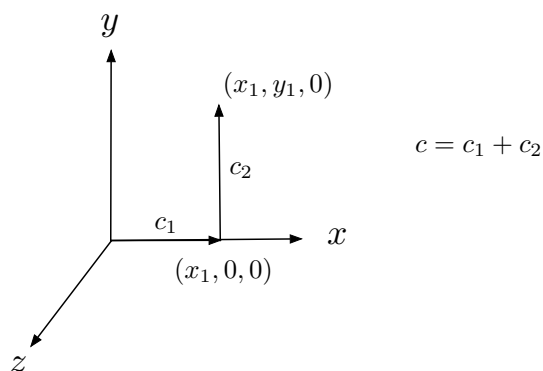


Figura 6.13 Definición del camino

$$\int_c \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega$$

Tenemos

$$\begin{aligned} c_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

$$\text{con } x(t) = x_1 t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0$$

$$\begin{aligned} c_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

$$\text{con } x(t) = x_1, \quad y(t) = y_1 t, \quad z(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{c_1} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz &= \int_{c_1} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy + 0 dz \\ &= \int_{[0,1]} 6x_1 t \cdot 0 c_1^* dx + (3x_1^2 t^2 - 0) c_1^* dy = 0 \end{aligned}$$

pues $c_1^* dy = \frac{\partial y}{\partial t} = y'(t) = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{c_2} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz &= \int_{c_2} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy + 0 dz \\ &= \int_{[0,1]} 6x_1 y_1 t c_2^* dx + (3x_1^2 - 3y_1^2 t^2) c_2^* dy \end{aligned}$$

como $c_2^* dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt = 0$ y $c_2^* dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt = y_1 dt$ resulta

$$\int_{c_2} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz = \int_{[0,1]} (3x_1^2 y_1 - 3y_1^3 t^2) dt = 3x_1^2 y_1 - y_1^3$$

b) Efectuar un cálculo similar para el camino que va por el otro lado del rectángulo por el punto $(0, y_1, 0)$. Tenemos

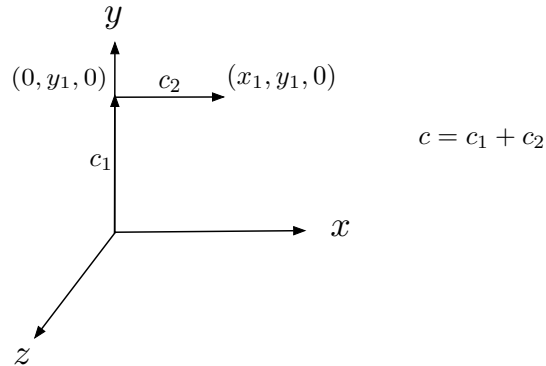


Figura 6.14 Definición de un segundo camino

$$\begin{aligned} c_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

con $x(t) = 0$, $y(t) = y_1 t$, $z(t) = 0$

$$\begin{aligned} c_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

con $x(t) = x_1 t$, $y(t) = y_1$, $z(t) = 0$

$$\begin{aligned}
\int_{c_1} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz &= \int_{c_1} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy + 0 dz \\
&= \int_{[0,1]} 6 \cdot 0 \cdot y_1 t c_1^* dx + (3 \cdot 0^2 - 3y_1^2 t^2) c_1^* dy \\
&= \int_{[0,1]} (-3y_1^2 t^2) \frac{\partial y}{\partial t} dt = \int_{[0,1]} (-3y_1^2 t^2) y_1 dt \\
&= -3y_1^2 \frac{1}{3} y_1 = -y_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{c_2} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz &= \int_{c_2} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy + 0 dz \\
&= \int_{[0,1]} 6x_1 t y_1 c_2^* dx + (3x_1^2 t^2 - 3y_1^2) c_2^* dy \\
&= \int_{[0,1]} (6x_1 t y_1) \frac{\partial x}{\partial t} dt + \int_{[0,1]} (3x_1^2 t^2 - 3y_1^2) \frac{\partial y}{\partial t} dt \\
&= \int_{[0,1]} 6x_1 t y_1 x_1 dt + \int_{[0,1]} (3x_1^2 t^2 - 3y_1^2) \cdot 0 dt \\
&= 6x_1^2 y_1 \frac{1}{2} = 3x_1^2 y_1
\end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{c_1} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz = 3x_1^2 y_1 - y_1^3$$

- c) Comprobar que F es irrotacional: En efecto, como el campo F es plano basta ver que

$$-\frac{\partial(6xy)}{\partial y} + \frac{\partial(3x^2 - 3y^2)}{\partial x} = -6x + 6x = 0$$

Calculemos φ tal que $F = \nabla\varphi$. Podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 6xy \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 3x^2 - 6y^2
\end{aligned}$$

Integrando la primera respecto a x :

$$\varphi(x, y) = 3x^2 y + C(y)$$

de donde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3x^2 + C'(y)$$

Tendremos $3x^2 + C'(y) = 3x^2 - 3y^2$ de donde $C'(y) = -3y^2$, integrando $C(y) = -y^3 + Cte$ de modo que

$$\varphi(x, y) = 3x^2y - y^3 + Cte$$

donde $Cte \in \mathbb{R}$

d) Calcular

$$\int_c F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$$

donde c es un camino cualquiera entre $(0, 0, 0)$ y $(x_1, y_1, 0)$.

Tenemos, gracias a que F es irrotacional, $F = \nabla\varphi$ y $\omega_F = d\varphi$. De modo que

$$\begin{aligned} \int_c F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz &= \int_c d\varphi = \int_{[0,1]} c^* d\varphi \int_{[0,1]} d(\varphi \circ c) \\ &= \varphi(c(1)) - \varphi(c(0)) = \varphi(x_1, y_1, 0) - \varphi(0, 0, 0) = 3x_1^2 y_1 - y_1^3 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado $c^* d\varphi = d(c^* \varphi)$ (propiedad (d) en el teorema 5.4) y el convenio $c^* \varphi = \varphi \circ c$ para 0-formas es decir funciones.

Definición 6.6. Un campo vectorial para el cual la integral de línea entre dos puntos no depende del camino se llama conservativo.

Corolario 6.1. Todo campo irrotacional es conservativo.

Comentario 6.6. En el ejercicio 7.12 del capítulo 7 se demuestra que todo campo conservativo es irrotacional.

e) Aplicación en electrostática:

Sea un campo eléctrico producido por una carga puntual q ,

$$F = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \right)$$

Consideremos la 1-forma asociada

$$\omega = \frac{q}{4\pi} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} dx + \frac{q}{4\pi} \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} dy$$

Calculemos $d\omega$ o lo que es equivalente $rot F$. Al ser F un campo plano el rotacional es un escalar (dicho más precisamente solo tiene una componente no nula):

$$rot F = \frac{\partial F^2}{\partial y} - \frac{\partial F^1}{\partial x} = \frac{2xy}{2(\sqrt{x^2 + y^2})^{5/2}} - \frac{2xy}{2(\sqrt{x^2 + y^2})^{5/2}} = 0$$

es decir $d\omega = 0$ por lo tanto $\omega = d\varphi$ y tendremos $F = \nabla\varphi$. En consecuencia la integral de F a lo largo de un camino entre dos puntos a y b no depende del camino y vale $\varphi(b) - \varphi(a)$ y físicamente representa el trabajo realizado por el campo eléctrico al trasladar la unidad de carga desde el punto a hasta el punto b .

■ Ejemplo 2: Sea

$$c : [0, 1]^k \rightarrow c([0, 1]^k) = A \subset \mathbb{R}^k$$

y

$$\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^d$$

con $d \geq k$. Consideramos la cadena

$$\phi \circ c : [0, 1]^k \xrightarrow{c} A \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^d$$

y sea ω una k -forma en $\phi(A)$. Estudiar

$$\int_{\phi \circ c} \omega$$

Podemos escribir para la integral en el cubo singular $\phi \circ c$

$$\begin{aligned} \int_{\phi \circ c} \omega &= \int_{[0,1]^k} (\phi \circ c)^* \omega = \int_{[0,1]^k} (c^* \circ \phi^*) \omega \\ &= \int_{[0,1]^k} c^* (\phi^* \omega) = \int_c \phi^* \omega \end{aligned}$$

Esta última es una integral en el cubo singular c .

En muchas ocasiones se calcula directamente $\int_c \phi^* \omega$ que es una integral en \mathbb{R}^k extendida al cubo singular c de dimensión k .

Veamos un ejemplo con $k = 2$ y $d = 3$:

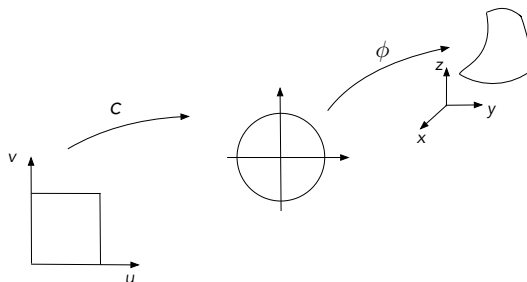


Figura 6.15 Ejemplo 2 con $k = 2$ y $d = 3$

Sea $S = S_1 + S_2$ la superficie cerrada que consta de la base circular de radio 1 dada por $S_1 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ y la semiesfera de radio 1, $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$. Sea $F = (2x, 2y, 2z)^t$ un campo eléctrico. Hallar el flujo de este campo eléctrico a través de S . Tendremos

$$\int_S (F, n) dA = \int_{S_1} (F, n) dA + \int_{S_2} (F, n) dA$$

a) Trabajando en coordenadas cartesianas:

$$(F, n) dA = F^1 n^1 dA + F^2 n^2 dA + F^3 n^3 dA = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$$

Introduciendo el cubo singular c

$$\begin{aligned} c : [0, 1]^2 &\rightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\rightarrow (\hat{x} = r \cos 2\pi\theta, \hat{y} = r \sin 2\pi\theta) \end{aligned}$$

y las superficies

$$\begin{aligned} \phi_1 : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\rightarrow (x = \hat{x}, y = \hat{y}, z = 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi_2 : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\rightarrow (x = \hat{x}, y = \hat{y}, z = \sqrt{1 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}) \end{aligned}$$

podemos describir S_1 y S_2 como los 2-cubos singulares $S_1 = \phi_1 \circ c$ y $S_2 = \phi_2 \circ c$.
Por una parte teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \phi_1^* dx &= d\hat{x} \\ \phi_1^* dy &= d\hat{y} \\ \phi_1^* dz &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (F, n) dA &= \int_{S_1} F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \\ &= \int_{S_1} 2x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + 2z dx \wedge dy \\ &= \int_c \phi_1^* (2x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + 2z dx \wedge dy) \\ &= \int_c 2\hat{x} d\hat{y} \wedge 0 + 2y 0 \wedge d\hat{x} + 0 d\hat{x} \wedge d\hat{y} = 0 \end{aligned}$$

por otra parte teniendo en cuenta que

$$\phi_2^* dx = d\hat{x}$$

$$\phi_2^* dy = d\hat{y}$$

$$\phi_2^* dz = -\frac{\hat{x}}{\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}} d\hat{x} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}} d\hat{y}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_2} (F, n) dA &= \int_{S_2} F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \\ &= \int_{S_2} 2x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + 2z dx \wedge dy \\ &= \int_c \phi_2^* (2x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + 2z dx \wedge dy) \\ &= \int_c 2\hat{x} \left(-\frac{\hat{x}}{\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}} \right) d\hat{y} \wedge d\hat{x} + 2\hat{y} \left(-\frac{\hat{y}}{\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}} \right) d\hat{y} \wedge d\hat{x} + 2\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2} d\hat{x} \wedge d\hat{y} \\ &= \int_c \left(\frac{2\hat{x}^2}{\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}} + \frac{2\hat{y}^2}{\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}} + 2\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2} \right) d\hat{x} \wedge d\hat{y} \\ &= \int_c \frac{2}{\sqrt{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}} d\hat{x} \wedge d\hat{y} = \int_{[0,1]^2} \frac{2}{\sqrt{1-r^2}} 2\pi r dr \wedge d\theta \\ &= 4\pi \int_0^1 \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 4\pi \int_0^1 [-\sqrt{1-r^2}]_0^1 d\theta = 4\pi \int_0^1 d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

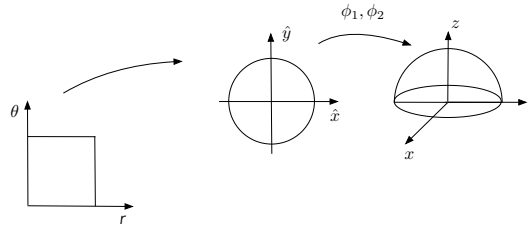


Figura 6.16 Ejemplo con $k = 2$ y $d = 3$

- b) Trabajando con coordenadas esféricas para la integral en S_2 : El sistema de coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 es (r, θ, φ) relacionadas con las coordenadas cartesianas mediante

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

Describimos S_2 como la 2-cadena singular

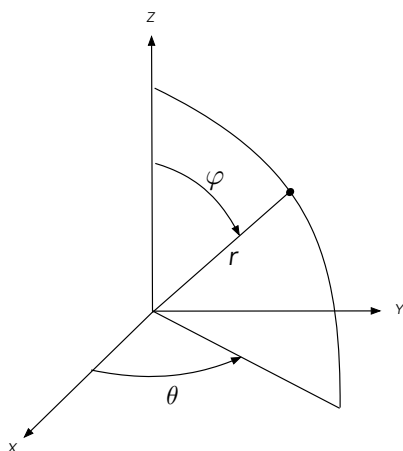


Figura 6.17 Coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3

$$S_2 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u, v \rightarrow (r = 1, \theta = 2\pi u, \varphi = \frac{\pi}{2}v)$$

El campo es $F = 2r \frac{\partial}{\partial r} = 2r e_r$, en efecto (véase los ejemplos de cambios de base en el capítulo 4)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z}$$

de modo que

$$2r \frac{\partial}{\partial r} = 2r \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + 2r \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + 2r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z}$$

El tensor métrico en coordenadas esféricas (véase los ejemplos de espacios de tensores en el capítulo 5), con las notaciones de ese capítulo es

$$M = E_1 dr \otimes dr + E_2 d\theta \otimes d\theta + E_3 d\varphi \otimes d\varphi$$

$$= dr \otimes dr + r^2 \sin^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

de modo que $E_1 = 1$, $E_2 = r^2 \sin^2 \varphi$, $E_3 = r^2$

$$\begin{aligned}\eta_F &= F^1 \sqrt{E_2 E_3} d\theta \wedge d\varphi + F^2 \sqrt{E_3 E_1} d\varphi \wedge dr + F^3 \sqrt{E_1 E_2} dr \wedge d\theta \\ &= 2r^3 \sin \varphi d\theta \wedge d\varphi\end{aligned}$$

Finalmente la integral resulta

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \eta_F &= \int_{S_2} 2r^3 \sin \varphi d\theta \wedge d\varphi = \int_{[0,1]^2} S_2^*(2r^3 \sin \varphi d\theta \wedge d\varphi) \\ &= 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) du dv = 2\pi^2 \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right) dv \\ &= 2\pi^2 \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}v\right)\right]_0^1 \frac{2}{\pi} = 4\pi \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0\right) = 4\pi\end{aligned}$$

En los ejercicios 6.8, 6.9, 6.10 y 6.11 se proponen distintos cálculos en la misma línea que los anteriores.

Ejercicios del Capítulo 6

6.1. Calcular $\partial(\partial I^2)$

6.2. Con las notaciones del texto, dado un campo vectorial X expresado mediante sus componentes en la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}; i = 1, \dots, d\}$, sea $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^d \frac{\partial}{\partial x^d}$.

1. Calcular $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$.
2. Expresar X en la base ortonormal $\{e_i = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i}; i = 1, \dots, d\}$
3. Calcular $\omega_X(X)$

6.3. Interpretar $\int_{[0,1]} \|T\| dt$ utilizando sumas de Riemann como la longitud de la curva c entre los puntos $c(0)$ y $c(1)$.

6.4. Demostrar la propiedad 6.1.

6.5. Interpretar

$$\int_{[0,1]^2} \|T_u \times T_v\| du dv$$

utilizando sumas de Riemann, como el área de la superficie

$$\begin{aligned}c : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u, v &\rightarrow (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))\end{aligned}$$

6.6. Demostrar la propiedad 6.2.

6.7. Sea

$$\begin{aligned}c : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u, v &\rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

un 2-cubo singular representando una superficie en \mathbb{R}^3 .

Para simplificar tomar $\{x, y, z\}$ el sistema cartesiano de coordenadas.

1. Calcular el campo normal unitario a la superficie representada por este 2-cubo.
2. Calcular el elemento de área en coordenadas x, y, z y en coordenadas u, v .
3. Dar la expresión $\int_c dA$

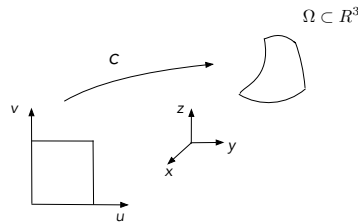


Figura 6.18 2-cubo singular

6.8. Determinar el flujo del campo V a través de la superficie S donde

$$V = (3x^2, xy, z)^t$$

y S es la superficie frontera del conjunto de \mathbb{R}^3 determinado por

$$x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

6.9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x \exp(y) \cos(\pi z)$

1. Calcular $F = \nabla f$
2. Evaluar

$$\int_c (F, \tau) ds$$

siendo $c(t) = (3 \cos^4 t, 5 \sin^7 t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$ y τ el campo unitario tangente a c .

6.10. Calcular el centro de gravedad $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un casquete esférico S de radio de la superficie esférica R y a el radio de la base del casquete, sabiendo que la definición del centro de gravedad es

$$\bar{r} = \frac{\int_S (x, y, z) dA}{\int_S dA}$$

6.11. Calcular el centro de gravedad de una catenaria c de ecuación

$$c : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (x = t, y = a \cosh \frac{t}{a})$$

sabiendo que la definición del centro de gravedad es

$$\bar{x} = \frac{\int_c x ds}{\int_c ds}$$

Capítulo 7

El teorema de Stokes

Resumen

En primer lugar demostramos el teorema de Stokes en el cubo típico. El caso general para cadenas resulta entonces inmediato. Después veremos las distintas variantes del teorema de Stokes cuando lo aplicamos a cadenas de distinto orden. Obtenemos como consecuencias inmediatas los teoremas de Riemann-Green, el teorema del rotacional de Stokes y el teorema de Gauss-Ostrograski. La referencia básica es [6] y [5] para los ejercicios de carácter más práctico.

7.1. El teorema de Stokes en cadenas

Empezamos enunciando el teorema de Stokes en cadenas que demostraremos a continuación en varios pasos.

Teorema 7.1. *Si ω es una $(k-1)$ -forma en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y c es una k -cadena en Ω entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \quad (7.1)$$

Observación 7.1. *El teorema es cierto en el caso $k=0$*

Demostración:

Una 0-forma es una función

$$\omega = f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Una 0-cadena

$$c : \{0\} \rightarrow \Omega$$

es un punto (nos referimos al punto imagen $c(0)$ en Ω).

Primero observemos que definimos la integral de una 0-forma (funciones) sobre una 0-cadena mediante

$$\int_c f = f(c(0))$$

Ahora si c es un 1-cubo singular

$$\begin{aligned} c &: [0, 1] \rightarrow \Omega \\ t &\rightarrow c(t) \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_c df &= \int_{[0,1]} c^* df = \int_{[0,1]} d(c^* f) = \int_{[0,1]} d(f \circ c) \\ &= \int_0^1 (f \circ c)'(t) dt = f(c(1)) - f(c(0)) \end{aligned}$$

por otra parte $\partial c = c(1) - c(0)$ es una 0-cadena y resulta

$$\int_{\partial c} f = \int_{c(1)-c(0)} f = f(c(1)) - f(c(0))$$

Tenemos que el caso $k = 0$ es consecuencia del convenio adoptado para la integral de una 0-forma sobre una 0-cadena. ■

Vamos a pasar al caso general con $k \geq 1$. Empezamos con un lema previo.

Lema 7.1. Sean I^k el k -cubo típico e $I_{(j,\alpha)}^k$ la cara (j, α) ; $1 \leq j \leq k$, $\alpha = 0, 1$ que es un $(k-1)$ -cubo singular. Tenemos

$$\text{Si } i \neq j \quad \int_{I_{(j,\alpha)}^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Si } i = j \quad \int_{I_{(j,\alpha)}^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k &= \int_{[0,1]^{k-1}} f(u^1, \dots, \alpha, \dots, u^{k-1}) du^1 \dots du^{k-1} \\ &= \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \end{aligned}$$

Demostración:

Sea la cara $I_{(j,\alpha)}^k$ para $1 \leq j \leq k$, $\alpha = 0, 1$ del k -cubo típico

$$\begin{aligned} I_{(j,\alpha)}^k &: [0, 1]^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k \\ u = (u^1, \dots, u^{k-1}) &\rightarrow x = (x^1 = u^1, \dots, x^{j-1} = u^{j-1}, x^j = \alpha, x^{j+1} = u^j, \dots, x^k = u^{k-1}) \end{aligned}$$

Tenemos

$$\int_{I_{(j,\alpha)}^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^{k-1}} (I_{(j,\alpha)}^k)^* f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

Ahora bien,

$$(I_{(j,\alpha)}^k)^* f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \quad (7.2)$$

$$= (f \circ I_{(j,\alpha)}^k) (I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^1 \wedge \cdots \wedge (\widehat{I_{(j,\alpha)}^k})^* dx^i \wedge \cdots \wedge (I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^k \quad (7.3)$$

donde

$$\begin{aligned} x^1 &= u^1 \Rightarrow (I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^1 = du^1 \\ &\dots \\ x^{j-1} &= u^{j-1} \Rightarrow (I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^{j-1} = du^{j-1} \\ x^j &= \alpha \Rightarrow (I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^j = 0 \\ x^{j+1} &= u^j \Rightarrow (I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^{j+1} = du^j \\ &\dots \\ x^k &= u^{k-1} \Rightarrow (I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^k = du^{k-1} \end{aligned}$$

En 7.3 si $i \neq j$ el término $(I_{(j,\alpha)}^k)^* dx^j = 0$ y por lo tanto la expresión es nula. En el caso $i = j$ el término que sería nulo es justamente el que falta y en ese caso

$$\begin{aligned} &\int_{I_{(i,\alpha)}^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} f(u^1, \dots, u^{i-1}, \alpha, u^i, \dots, u^{k-1}) du^1 \dots du^{k-1} \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k \int_0^1 dx^i \\ &= \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \end{aligned}$$

donde en el segundo paso hemos cambiado la notación escribiendo x^l en lugar de u^l para $l < i$ y x^{l+1} en lugar de u^l para $l > i$ y hemos multiplicado por una integral que vale 1 en el tercer paso. ■

Ver el ejercicio 7.1 para ilustrar el resultado del lema en casos concretos.

Vamos a pasar a la demostración del teorema de Stokes.

Demostración del teorema 7.1.

Lo demostramos en varios pasos:

1. Supongamos en primera lugar que $c = I^k$ es el k -cubo típico y que ω es una $(k-1)$ -forma en I^k del tipo

$$f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

queremos demostrar que

$$\int_{\partial I^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_{I^k} d(f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k)$$

La frontera ∂I^k es

$$\partial I^k = \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} I_{(j,\alpha)}^k$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{I_{(j,\alpha)}^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I_{(j,\alpha)}^k)^* f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \\ &= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, 1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos aplicado el lema 7.1.

Por otra parte

$$\begin{aligned} d(f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) &= \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^k \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \int_{I^k} d(f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k) \\
&= (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k \\
&\quad - (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k \\
&= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \\
&\quad + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos multiplicado ambos sumandos por $\int_0^1 dx^i = 1$. Como toda $(k-1)$ -forma en I^k es suma de $(k-1)$ -formas del tipo

$$f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k$$

el resultado es cierto para cualquier $(k-1)$ -forma en I^k .

2. Si c es un k -cubo singular arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}
\int_c d\omega &= \int_{I^k} c^* d\omega = \int_{I^k} d(c^* \omega) \\
&= \int_{\partial I^k} (c^* \omega) = \int_{c \circ \partial I^k} \omega = \int_{\partial c} \omega
\end{aligned}$$

3. Si c es una k -cadena, $c = \sum_i a_i c_i$ donde c_i son k -cubos singulares

$$\begin{aligned}
\int_c d\omega &= \int_{\sum_i a_i c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega \\
&= \int_{\sum_i a_i \partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega
\end{aligned}$$

■

7.2. Aplicaciones del teorema de Stokes

Vamos a ver ahora distintos teoremas clásicos que son consecuencia del teorema de Stokes general de la sección anterior.

Teorema 7.2. *Teorema de Riemann-Green.*

Sea c una 2-cadena en \mathbb{R}^2 (por tanto un conjunto en \mathbb{R}^2) y $\omega = \alpha dx + \beta dy$ una 1-forma en c tenemos

$$\int_{\partial c} \alpha dx + \beta dy = \int_c \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx dy \quad (7.4)$$

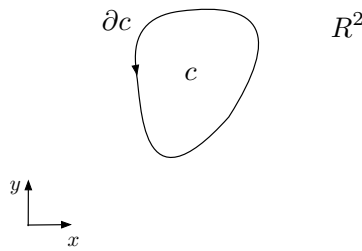


Figura 7.1 Superficie c y su frontera ∂c en \mathbb{R}^2

Demostración:

Aplicamos el teorema de Stokes 7.1. La diferencial de $\omega = \alpha dx + \beta dy$ es

$$d\omega = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

de donde

$$\int_{\partial c} \alpha dx + \beta dy = \int_c \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_c \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx dy$$

■

Teorema 7.3. *Teorema del rotacional de Stokes.*

Sea c una 2-cadena en \mathbb{R}^3 (por tanto una superficie en \mathbb{R}^3) y sea F un campo vectorial en c entonces la circulación de F a lo largo de la frontera ∂c de c es igual al flujo del rotacional $\text{rot } F$ a través de la superficie c . En coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ se expresa si

$$F = F^1 \frac{\partial}{\partial x} + F^2 \frac{\partial}{\partial y} + F^3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial c} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz \\ &= \int_c \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (7.5) \end{aligned}$$

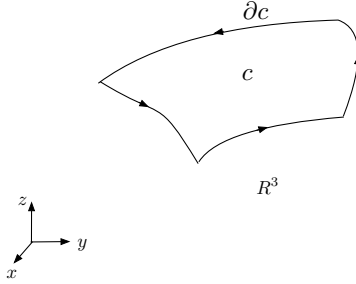


Figura 7.2 Superficie c y su frontera ∂c en \mathbb{R}^3

Demostración:

Sea ω_F la 1-forma asociada a F y sea $\eta_{rot F}$ la 2-forma asociada a $rot F$. Sabemos $d\omega_F = \eta_{rot F}$ de modo que

$$\int_{\partial c} \omega_F = \int_c d\omega_F = \int_c \eta_{rot F}$$

La expresión 7.5 se deduce de expresar ω_F y $\eta_{rot F}$ en coordenadas cartesianas. ■

Teorema 7.4. *Teorema de Gauss-Ostrogradski*

Sea c una 3-cadena en \mathbb{R}^3 (por tanto un conjunto en \mathbb{R}^3) y sea F un campo vectorial en c entonces el flujo de F a través de la frontera ∂c de c es igual a la integral en c de la divergencia $div F$ de F . En coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ se expresa si

$$\begin{aligned} F &= F^1 \frac{\partial}{\partial x} + F^2 \frac{\partial}{\partial y} + F^3 \frac{\partial}{\partial z} \\ \int_{\partial c} F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy &= \int_c \left(\frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

Demostración:

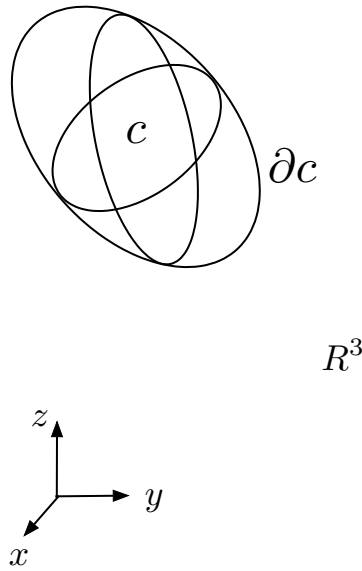


Figura 7.3 Volumen c y su frontera ∂c en \mathbb{R}^3

Sea η_F la 2-forma asociada a F . Sabemos $d\eta_F = \omega_{\text{div } F} = (\text{div } F)\omega$ donde ω es el elemento de volumen. Entonces

$$\int_{\partial c} \eta_F = \int_c d\eta_F = \int_c \omega_{\text{div } F} = \int_c (\text{div } F)\omega$$

La expresión 7.6 se deduce de expresar η_F y $\text{div } F$ en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy &= \int_c \text{div } F dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_c \text{div } F dx dy dz = \int_c \left(\frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

■

Comentario 7.1. El teorema de Gauss-Ostrogradski también lo podemos expresar

$$\int_{\partial c} (F, n) dA = \int_c \text{div } F dV$$

donde dA es el elemento de área y dV designa el elemento de volumen.

Corolario 7.1. Sea F un campo vectorial. Tenemos que la divergencia de F en un punto x se puede definir como

$$\text{div } F(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} (F, n) dA \quad (7.6)$$

donde $B_r(x)$ es la bola de centro x y radio r .

Demostración:

Tenemos por el teorema de Gauss-Ostrogradski 7.4

$$\int_{\partial B_r(x)} (F, n) dA = \int_{B_r(x)} \operatorname{div} F dV$$

dividiendo por el volumen de $B_r(x)$ y pasando al límite cuando $r \rightarrow 0$ obtenemos el resultado. ■

Comentario 7.2. En el corolario anterior se ha utilizado la propiedad del cálculo integral siguiente: Sea $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x - x_0\| \leq 1\}$ y $f: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces

$$f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x^1, \dots, x^d) dx^1 \dots dx^d$$

donde $V(B_r(x_0))$ es el volumen de $B_r(x_0)$. Véase la nota en la resolución del ejercicio 7.12 para la demostración de esta propiedad.

Acerca de la notación utilizada en física e ingeniería

Sean

- F un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y ω_F la 1-forma asociada
- c una 1-cadena en \mathbb{R}^3
- τ el campo tangente unitario de c y ω_τ el elemento de longitud que en Física se suele denotar mediante ds

Utilizando la propiedad 6.1

$$\omega_F = (F, \tau)\omega_\tau = (F, \tau) ds$$

En coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} (F, \tau)\omega_\tau &= (F^1\tau^1 + F^2\tau^2 + F^3\tau^3)\omega_\tau \\ &= F^1\tau^1\omega_\tau + F^2\tau^2\omega_\tau + F^3\tau^3\omega_\tau \\ &= F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz \end{aligned}$$

Sea ahora

- η_F la 2-forma asociada a F .

- c una 2-cadena en \mathbb{R}^3 .
- n el campo vectorial normal a c unitario y η_n el campo elemento de área (2-forma asociada a n) que se suele denotar en física mediante dA .

Utilizando la propiedad 6.2

$$\eta_F = (F, n)\eta_n = (F, n) dA$$

y en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} (F, n)\eta_n &= (F^1 n^1 + F^2 n^2 + F^3 n^3)\eta_n \\ &= F^1 n^1 \eta_n + F^2 n^2 \eta_n + F^3 n^3 \eta_n \\ &= F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \end{aligned}$$

En consecuencia el teorema del rotacional de Stokes se puede escribir como

$$\int_{\partial c} (F, \tau) ds = \int_c (\text{rot} F, n) dA \quad (7.7)$$

y el teorema de Gauss-Ostrogradski se puede escribir como

$$\int_{\partial c} (F, n) dA = \int_c \text{div} F dV \quad (7.8)$$

donde dV designa el elemento de volumen.

Vamos a ver tres consecuencias sencillas de los teoremas anteriores que se conocen habitualmente como fórmulas de Green o de integración por partes.

Corolario 7.2. *Dada c una 3-cadena en \mathbb{R}^3 , sean u y v dos funciones reales definidas sobre c . Se tienen las siguientes identidades de Green:*

a)

$$-\int_c \Delta u \cdot v dV = \int_c (\nabla u, \nabla v) dV - \int_{\partial c} v (\nabla u, n) dA \quad (7.9)$$

b)

$$\int_c (v \Delta u - u \Delta v) dV = \int_{\partial c} (v \nabla u - u \nabla v, n) dA \quad (7.10)$$

c) Llamemos $\{x^1, x^2, x^3\}$ el sistema de coordenadas cartesiano en \mathbb{R}^3 . Tenemos la siguiente fórmula de Green

$$\int_c u \frac{\partial v}{\partial x^i} dV = - \int_c \frac{\partial u}{\partial x^i} v dV + \int_{\partial c} u v n^i dA \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.11)$$

donde $n = n^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + n^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + n^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ es el campo unitario normal a la superficie c .

Demostración:

a) Utilizamos la identidad

$$\operatorname{div}(vF) = (F, \nabla v) + v \operatorname{div} F$$

que se prueba mediante derivación directa. En efecto, expresando la divergencia y el producto escalar en coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(vF) &= \frac{\partial(vF^1)}{\partial x} + \frac{\partial(vF^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vF^3)}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} F^1 + v \frac{\partial F^1}{\partial x} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial y} F^2 + v \frac{\partial F^2}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial z} F^3 + v \frac{\partial F^3}{\partial z} \right) \\ &= (F, \nabla v) + v \operatorname{div} F \end{aligned}$$

Ahora hacemos $F = \nabla u$, tenemos

$$\operatorname{div}(v\nabla u) = (\nabla u, \nabla v) + v \Delta u$$

y aplicamos la fórmula de Gauss-Ostrogradski 7.8 a $\operatorname{div}(v\nabla u)$.

- b) Para demostrar (b) expresamos 7.9 intercambiando los papeles de u y v y restamos las dos expresiones.
- c) Para demostrar (c) aplicamos la fórmula de Gauss-Ostrogradski 7.8 al campo vectorial $F = uv \frac{\partial}{\partial x^i}$ para $i = 1, 2, 3$. Tenemos entonces

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial(uv)}{\partial x^i} = u \frac{\partial v}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial x^i} v$$

y

$$(F, n) = uv n^i$$

y aplicando 7.8

$$\int_c \left(u \frac{\partial v}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial x^i} v \right) dV = \int_{\partial c} uv n^i dA$$

En los ejercicios 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, y 7.12 se proponen distintas aplicaciones de los teoremas anteriores. ■

Terminaremos con una aplicación del teorema de la divergencia a la demostración del teorema de Arquímedes y que es un sencillo ejercicio propuesto en [6].

Teorema 7.5. *Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado.*

Demostración:

Se define un campo $F = (0, 0, \rho g z)^t$ representando la presión (fuerza por unidad de superficie) ejercida por el fluido a una determinada profundidad z medida desde la superficie $\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3; z = 0)\}$ del fluido. ρ es la densidad del fluido, g es la aceleración de la gravedad por lo que ρg es el peso por unidad de volumen de fluido. Sea un objeto Ω sumergido en el fluido o si el cuerpo flota entonces Ω representa la parte sumergida del objeto. La presión del fluido actúa perpendicularmente a la superficie del cuerpo, es decir sobre cada elemento de área dA la fuerza que actúa sobre el cuerpo es $-(F, n)dA$. El signo menos se elige de manera que en los puntos en que (F, n) es positivo $-(F, n)dA$ indicará que el empuje es hacia arriba y si (F, n) es negativo $-(F, n)dA$ indicará que el empuje es hacia abajo. El empuje sobre la totalidad del cuerpo Ω será la suma de todas estas contribuciones elementales

$$-\int_{\partial\Omega} (F, n)dA$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_{\partial\Omega} (F, n)dA = \int_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \int_{\Omega} \rho g dV$$

es decir el empuje hacia arriba debida a la presión que ejerce el fluido sobre el cuerpo es

$$-\int_{\Omega} \rho g dV$$

es decir igual y de sentido contrario al peso del fluido desalojado. Observemos que se ha elegido el eje z de manera que $z > 0$ son los puntos por debajo de la superficie del fluido.

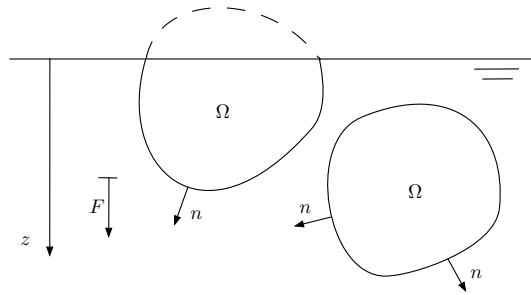


Figura 7.4 Cuerpo sumergido en un fluido

■

Ejercicios del Capítulo 7

7.1. a) Considerar las caras del 2-cubo típico. Calcular

$$\int_{I^2(1,\alpha)} f \widehat{dx^1} \wedge dx^2$$

y

$$\int_{I^2(2,\alpha)} f \widehat{dx^1} \wedge dx^2$$

b) Considerar las caras del 3-cubo típico. Calcular

$$\int_{I^3(3,\alpha)} f dx^1 \wedge dx^2 \quad \text{y} \quad \int_{I^3(2,\alpha)} f dx^1 \wedge dx^3$$

7.2. Sea c una cadena de dimensión 2 en \mathbb{R}^2 (una región del plano \mathbb{R}^2).

a) Demostrar que el área de c (área encerrada por la frontera ∂c) viene dada por

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \int_{\partial c} x dy - y dx$$

siendo $\{x, y\}$ las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2 .

b) Demostrar que el área de c (área encerrada por la frontera ∂c) viene dada por

$$\text{Área} = \int_{\partial c} x dy = - \int_{\partial c} y dx$$

siendo $\{x, y\}$ las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2 y demostrar que esto implica el resultado de la parte (a).

7.3. Calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

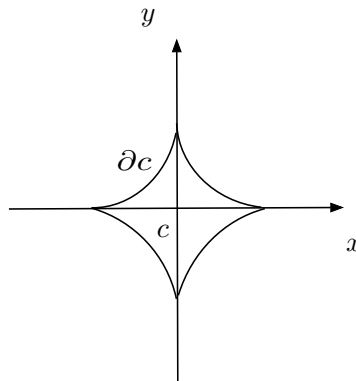


Figura 7.5 hipocicloide

7.4. Calcular el área acotada por un arco de cicloide y su base definida por $\partial c = -c_1 + c_2$

$$c_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x = a(2\pi t - \sin(2\pi t)), y = a(1 - \cos(2\pi t)))$$

con $a > 0$ y

$$c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x = 2\pi t, y = 0)$$

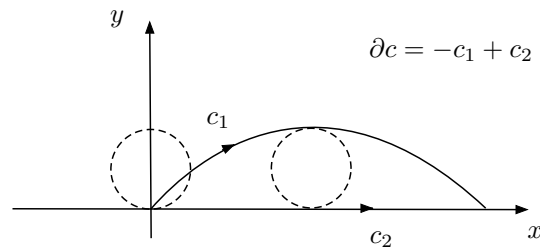


Figura 7.6 arco de cicloide

7.5. Hallar el área de un rizo de la rosa de 4 pétalos

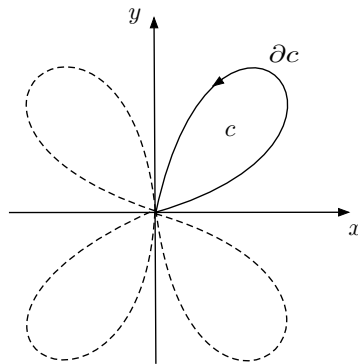


Figura 7.7 Rosa de 4 pétalos

La ecuación en coordenadas polares $\{r, \theta\}$ es

$$r = 3 \sin 2\theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Observar que podemos escribir la frontera del rizo ∂c como

$$\begin{aligned}\partial c : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2_{(r, \theta)} \\ t &\longrightarrow (r = 3 \sin \pi t, \theta = \frac{\pi}{2} t)\end{aligned}$$

7.6. Comprobar el teorema del rotacional en el siguiente caso:

El campo vectorial

$$F = 2z \frac{\partial}{\partial x} + 3x \frac{\partial}{\partial y} + 4y \frac{\partial}{\partial z}$$

y la superficie c dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z = 9 - x^2 - y^2\}$$

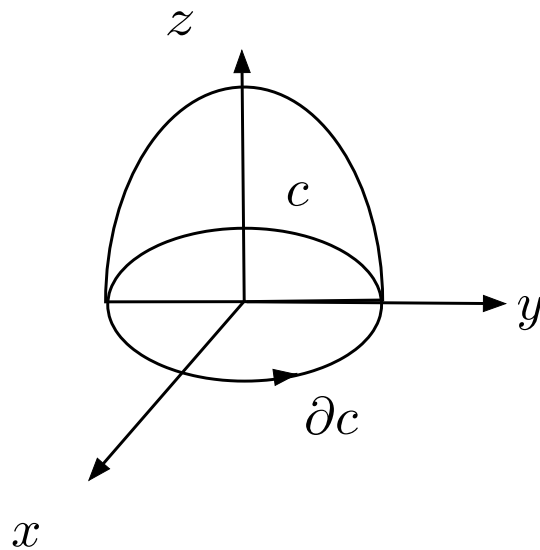


Figura 7.8 Semiesfera

7.7. Sea S la superficie cubierta de la figura, formada por la unión de las dos superficies, un cilindro y una semiesfera

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$$

- Describir S como una cadena y calcular su frontera.
- Sea el campo vectorial $F = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)^t$. Calcular

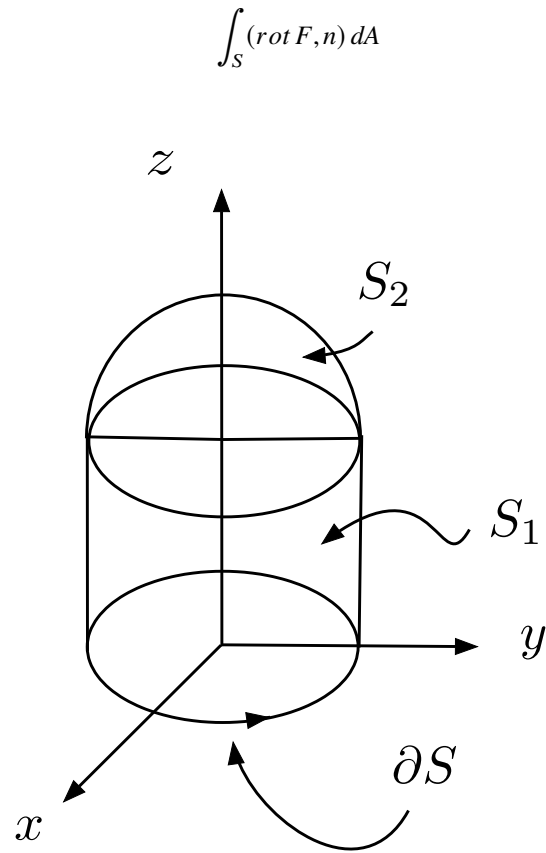


Figura 7.9 Cilindro con cubierta semiesférica

7.8. Calcular el flujo del campo vectorial

$$F = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}$$

a través de la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

7.9. Demostrar el siguiente teorema de Gauss: Dado el campo vectorial en coordenadas esféricas

$$F = \frac{\partial}{\partial r} = e_r$$

sea c una 3-cadena en \mathbb{R}^3 cuya imagen es un conjunto acotado en \mathbb{R}^3 tal que $(0, 0, 0) \notin \partial c$. Abusamos del lenguaje según lo indicado en el comentario 6.1.

Llamando $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demostrar:

a)

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} e_r \right) = 0$$

para $r \neq 0$

b)

$$\int_{\partial c} \frac{(e_r, n)}{r^2} dA = \begin{cases} 4\pi & \text{si } (0, 0, 0) \in c \\ 0 & \text{si } (0, 0, 0) \notin c \end{cases}$$

7.10. Sea c una 3-cadena y ∂c su frontera en \mathbb{R}^3 . Demostrar que el flujo del campo $F = re_r$ a través de ∂c es 3 veces el volumen de c .

7.11. Sea S una superficie tal que es frontera de una 3-cadena c , es decir $S = \partial c$. Demostrar de dos maneras distintas que

$$\int_S (\operatorname{rot} F, n) dA = 0$$

7.12. -

a) Demostrar que todo campo conservativo en un abierto Ω de \mathbb{R}^3 es irrotacional.

b) Concluir que si F es conservativo existe una función φ tal que $F = \nabla\varphi$.

Capítulo 8

Algunas aplicaciones a la mecánica de medios continuos

Resumen

En este último capítulo aplicaremos los conceptos del cálculo vectorial y tensorial para deducir algunas ecuaciones de la mecánica de los medios continuos y que son el punto de partida para el desarrollo de esta materia. Describiremos el movimiento de un fluido mediante un grupo uniparamétrico de transformaciones actuando sobre una región del espacio \mathbb{R}^d . De manera más precisa, estudiaremos como varían las funciones, campos vectoriales, formas y tensores por acción de un grupo uniparamétrico. El parámetro representará habitualmente el tiempo. Veremos que a cada campo vectorial le podemos asociar un grupo uniparamétrico de transformaciones y recíprocamente, un grupo uniparamétrico tendrá asociado un campo vectorial. Así pues lo que obtendremos es la variación de los distintos objetos geométricos, es decir funciones, campos, formas y en general tensores por acción de un campo vectorial. Este es el concepto de derivada de Lie de la geometría diferencial en variedades aunque aquí nos limitaremos a regiones de \mathbb{R}^d .

8.1. Grupos uniparamétrico de transformaciones

En \mathbb{R}^d consideraremos un abierto Ω y dado $\delta > 0$ sea $I_\delta =]-\delta, \delta[$ un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Definición 8.1. *Llamaremos grupo local uniparamétrico de transformaciones a toda aplicación diferenciable ϕ de $I_\delta \times \Omega$ en \mathbb{R}^d tal que*

- a) *Para todo $t \in I_\delta$ la aplicación $\phi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida por $\phi_t(p) = \phi(t, p)$ para todo $p \in \Omega$ es un difeomorfismo diferenciable de Ω en $\phi(\Omega)$. Esto quiere decir que ϕ_t es biyectiva de Ω en $\phi(\Omega)$ y tanto ϕ_t como ϕ_t^{-1} son diferenciables. En consecuencia $\phi_t(\Omega)$ es un abierto de \mathbb{R}^d .*
- b) *Para cada par de valores $s, t \in I_\delta$ tales que $s + t \in I_\delta$ se verifica $\phi_{t+s}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$ cualquiera que sea $p \in \Omega$*

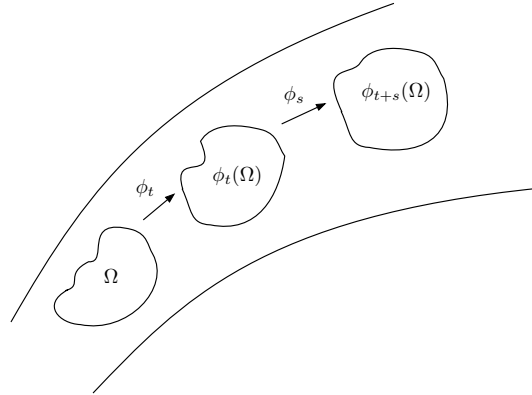


Figura 8.1 Grupo uniparamétrico de transformaciones.

Utilizando un sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ en \mathbb{R}^d y la coordenada $t \in I_\delta$ la aplicación ϕ viene determinada por d funciones

$$\phi^i(t, p) = \phi^i(t, x^1, \dots, x^d) \quad i = 1, \dots, d$$

Ejemplo

En $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ consideramos tomando $I_\delta = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, x, y) &\rightarrow (x \cos \omega t + y \sin \omega t, -x \sin \omega t + y \cos \omega t) \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio 8.1 la demostración de que ϕ es un grupo uniparamétrico.

Teorema 8.1. *Todo grupo local uniparamétrico de transformaciones induce un campo vectorial X definido en Ω y recíprocamente, dado X un campo vectorial definido en un entorno de $p \in \Omega$ existe un entorno U contenido en el anterior, un número $\delta > 0$ y un grupo local uniparamétrico*

$$\phi : I_\delta \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$$

que induce en U el campo X

Demostración:

Para todo $p \in \Omega$, el vector tangente X_p es el vector tangente asociado a la curva definida por

$$c = \phi(p) : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$t \rightarrow c(t) = \phi_t(p) = (\phi_t^1(p), \dots, \phi_t^d(p))$$

El campo vectorial inducido es el campo que en cada punto $p \in \Omega$ es el vector tangente en p dado por

$$X_p = \left(c_* \frac{d}{dt} \right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^d \frac{d\phi_t^i(p)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

Recíprocamente: Sea X un campo vectorial definido en un entorno U de p contenido en Ω . Sea $\{x^1, \dots, x^d\}$ un sistema de coordenadas en el entorno U y pongamos $x_0^i = x^i(p)$ para $i = 1, \dots, d$. El campo X se expresará en este sistema de coordenadas mediante

$$X = \sum_{i=1}^d \lambda^i(x^1, \dots, x^d) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

donde las funciones λ^i son funciones reales diferenciables en un entorno de $p \in \mathbb{R}^d$. Consideremos el problema diferencial de valor inicial siguiente: Dado $p = \{x_0^1, \dots, x_0^d\}$, hallar $x^i : t \in I_\delta \rightarrow x^i(t) \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, d$ tales que verifiquen el siguiente problema de valor inicial,

$$\frac{dx^i}{dt} = \lambda^i(x^1(t), \dots, x^d(t)) \quad i = 1, \dots, d \quad (8.1)$$

$$x^i(0) = x_0^i \quad i = 1, \dots, d \quad (8.2)$$

Expresaremos la solución de la forma $\phi^i(t, p)$ poniendo en forma explícita el valor inicial $p = \{x_0^1, \dots, x_0^d\}$. Sabemos que existe $\delta > 0$ y un entorno U' de p en el que existe una solución única de (8.1)-(8.2) $x^i(t)$ $i = 1, \dots, d$ definida para todo $t \in I_\delta$. Definimos $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^d)$ donde $\phi^i(t, p) = x^i(t)$. Vamos a demostrar que $\phi = \phi_t(p)$ cumple las propiedades de grupo local uniparamétrico.

- a) $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ es biyectiva y tanto ϕ_t como ϕ_t^{-1} son diferenciables. En efecto la solución del problema de valor inicial (8.1)-(8.2) es única y las funciones $\phi^i(t, x^1, \dots, x^d)$ con t fijo son diferenciables pues las funciones λ^i lo son.
- b) Para demostrar $\phi_{t+s}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$ primero calculamos la solución entre los valores 0 y t y después tomando como valor inicial la solución en el punto $s = t$ calculamos la solución en el punto $t + s$. Por la unicidad de solución del problema de valor inicial el resultado tiene que coincidir con el valor obtenido en $t + s$ tomando como valor inicial el valor para $t = 0$. Más precisamente, dado p fijo, resolvemos primero el problema (8.1)-(8.2) entre 0 y t obteniendo $(x^1(t), \dots, x^d(t))$. A continuación resolvemos

$$\frac{dy^i}{ds} = \lambda^i(y^1(s), \dots, y^d(s)) \quad i = 1, \dots, d$$

$$y^i(0) = x^i(t) \quad i = 1, \dots, d$$

Por la unicidad de las soluciones $y^i(s) = x^i(t+s)$ es decir

$$\phi_{t+s}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$$

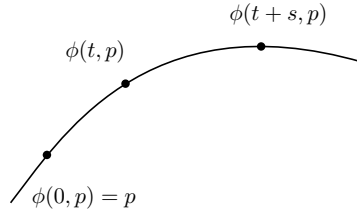


Figura 8.2 Cálculo de la solución en t y en $t+s$

Se deja como ejercicio 8.2 el cálculo del campo tangente asociado al grupo uniparamétrico del ejercicio 8.1. ■

8.2. Transformación de tensores y campos tensoriales

Nuestro objetivo es estudiar como varían los distintos objetos geométricos, funciones, campos vectoriales, formas y en general campos tensoriales, bajo la acción de un grupo uniparamétrico representando el movimiento de un fluido. Consideremos como en el capítulo 4 un abierto $\Omega \in \mathbb{R}^d$ y un punto $p \in \Omega$ y sea ϕ una aplicación de Ω en \mathbb{R}^d diferenciable. Supondremos que ϕ es un difeomorfismo es decir ϕ es biyectiva de Ω en $\phi(\Omega)$

$$\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$$

Resumimos a continuación las transformaciones inducidas por esta aplicación en distintos casos:

- a) Aplicaciones entre funciones: Dada una función definida en un entorno $U(q) \in \phi(\Omega)$ de $q \in \phi(\Omega)$, $f : U(q) \rightarrow \mathbb{R}$, definimos ϕ^*f como la función

$$\phi^*f = f \circ \phi : U(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

- b) Aplicaciones entre campos: La aplicación ϕ induce dos aplicaciones entre los espacios tangentes \mathcal{T}_p y $\mathcal{T}_{\phi(p)}$

- Aplicación “push-forward”:

$$\begin{aligned} \phi_* : \mathcal{T}_p &\rightarrow \mathcal{T}_{\phi(p)} \\ X_p &\rightarrow \phi_*(X_p) \end{aligned}$$

definida por la relación

$$\phi_*(X_p)(f) = X_p(f \circ \phi) \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\phi(p)} \quad (8.3)$$

Para un campo X en Ω definimos $(\phi_*X)_{\phi(p)} = \phi_*X_p$

- Aplicación “pull-back”:

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathcal{T}_{\phi(p)} &\rightarrow \mathcal{T}_p \\ X_{\phi(p)} &\rightarrow \phi^*(X_{\phi(p)}) \end{aligned}$$

definida por la relación

$$\phi^*(X_{\phi(p)})(f) = (\phi^{-1})_*X_{\phi(p)}(f) = X_{\phi(p)}(f \circ \phi^{-1}) \quad \forall f \in \mathcal{F}_p \quad (8.4)$$

Para un campo X en $\phi(\Omega)$ definimos $(\phi^*X)_p = \phi^*X_{\phi(p)}$ para todo $p \in \Omega$.

c) Aplicaciones entre formas:

- Aplicación “pull-back” entre formas: La aplicación $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ induce la aplicación entre tensores

$$\phi^* : \Lambda_k(\mathcal{T}_{\phi(p)}) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$$

para $\omega_{\phi(p)} \in \Lambda_k(\mathcal{T}_{\phi(p)})$, tenemos

$$\phi^*\omega_{\phi(p)}((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) = \omega_{\phi(p)}(\phi_*(X_1)_p, \dots, \phi_*(X_k)_p)$$

y ésta a su vez induce una aplicación que a cada k -forma ω en $\phi(\Omega)$ le hace corresponder una k -forma $\phi^*\omega$ en Ω poniendo para todo $p \in \Omega$

$$(\phi^*\omega)_p = \phi^*\omega_{\phi(p)}$$

- Aplicación “push-forward” entre formas: Para un tensor $\omega_p \in \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$ tenemos

$$\phi_* : \Lambda_k(\mathcal{T}_p) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_{\phi(p)})$$

dada por

$$\phi_*\omega_p((X_1)_{\phi(p)}, \dots, (X_k)_{\phi(p)}) = \omega_p(\phi^*(X_1)_{\phi(p)}, \dots, \phi^*(X_k)_{\phi(p)})$$

Para formas tenemos para todo $p \in \Omega$

$$(\phi_*\omega)_{\phi(p)} = \phi_*\omega_p$$

d) Aplicaciones sobre tensores:

- “pull-back” de un tensor mixto: Para tensores mixtos $T \in \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$, k veces covariante y l veces contravariante es decir, aplicaciones multilineales

$$T_p : \mathcal{T}_p \times \overset{k \text{ veces}}{\dots} \times \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_p^* \times \overset{l \text{ veces}}{\dots} \times \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

tenemos para k vectores tangentes $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p$, y l formas diferenciales $(\omega_1)_p, \dots, (\omega_l)_p$

$$\begin{aligned} & \phi^* T_{\phi(p)}((X_1)_p, \dots, (X_k)_p, (\omega_1)_p, \dots, (\omega_l)_p) \\ &= T_{\phi(p)}(\phi_*(X_1)_p, \dots, \phi_*(X_k)_p, \phi_*(\omega_1)_p, \dots, \phi_*(\omega_l)_p) \end{aligned}$$

Finalmente para un campo tensorial T , k veces covariante y l veces contravariante definido en $\phi(\Omega)$, pondremos para todo $\phi(p) \in \phi(\Omega)$

$$(\phi^* T)_p = \phi^* T_{\phi(p)}$$

- “push-forward” de un tensor mixto:

$$\begin{aligned} & \phi_* T_p((X_1)_{\phi(p)}, \dots, (X_k)_{\phi(p)}, (\omega_1)_{\phi(p)}, \dots, (\omega_l)_{\phi(p)}) \\ &= T_{\phi(p)}(\phi^*(X_1)_{\phi(p)}, \dots, \phi^*(X_k)_{\phi(p)}, \phi^*(\omega_1)_{\phi(p)}, \dots, \phi^*(\omega_l)_{\phi(p)}) \end{aligned}$$

Finalmente para un campo tensorial T , k veces covariante y l veces contravariante definido en Ω , pondremos para todo $p \in \Omega$

$$(\phi_* T)_{\phi(p)} = \phi_* T_p$$

Veamos como se comportan las transformaciones anteriores con la operación de contracción de tensores. Antes de pasar a la demostración necesitaremos algunas propiedades.

Propiedades 8.1. *En el enunciado de estas propiedades consideramos las aplicaciones $\phi : U(p) \rightarrow U(q)$ y $\psi : U(q) \rightarrow U(r)$ difeomorfismos definidos en un entorno $U(p)$ y en un entorno $U(q)$ respectivamente con $q = \phi(p)$ y $r = \psi(q)$. Y sean $\phi_* : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_q$ y $\psi_* : \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_r$.*

- a) *Sea $\psi \circ \phi : U(p) \rightarrow U(r)$. Tenemos $(\psi \circ \phi)_* : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_r$. Se verifica*

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$

- b) *Sea la aplicaciones $\phi : U(p) \rightarrow U(q)$ y su aplicación inversa $\phi^{-1} : U(q) \rightarrow U(p)$. Se tiene*

$$(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$$

- c) *Para las aplicaciones “pull-back” entre los respectivos espacios de vectores tangentes tenemos*

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$$

- d) *Para la aplicación “pull-back” de espacios de vectores tangentes tenemos*

$$(\phi^{-1})^* = (\phi^*)^{-1}$$

e) Para las aplicaciones “push-forward” entre espacios de tensores

$$\phi_* : \Lambda_k(\mathcal{T}_p) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_q)$$

$$\psi_* : \Lambda_k(\mathcal{T}_q) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_r)$$

se verifica

$$(\psi \circ \phi)_* = (\psi_* \circ \phi_*)$$

f) Para la aplicación “push-forward” entre espacios de tensores

$$(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 8.3 ■

Comentario 8.1. Las propiedades anteriores nos permiten escribir sin que ello de lugar a confusión

$$\phi_*^{-1} = (\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$$

tanto en el caso de vectores tangentes como en el caso de formas diferenciales.

Propiedad 8.1. Las aplicaciones ϕ^* (pull-back) y ϕ_* (push-forward) conmutan con las contracciones. Es decir dado un tensor $T_p \in \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$ y si C_j^i es una contracción entonces $C_j^i \phi^* T_p = \phi^* C_j^i T_p$. Análogamente $C_j^i \phi_* T_p = \phi_* C_j^i T_p$.

Demostración:

Lo demostraremos para ϕ^* y C_1^1 . Ponemos $q = \phi(p)$.

$$\begin{aligned} & \phi^* C_1^1 T_p((X_2)_q, \dots, (X_k)_q, (\omega^2)_q, \dots, (\omega^l)_q) \\ &= C_1^1 T_q(\phi_*(X_2)_q, \dots, \phi_*(X_k)_q, \phi_*(\omega^2)_q, \dots, \phi_*(\omega^l)_q) \\ &= \sum_{i=1}^d T_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q, \phi_*(X_2)_q, \dots, \phi_*(X_k)_q, (dx^i)_q, \phi_*(\omega^2)_q, \dots, \phi_*(\omega^l)_q\right) \\ &= \sum_{i=1}^d T_q\left(\phi_* \phi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q, \phi_*(X_2)_q, \dots, \phi_*(X_k)_q, \phi_* \phi_*^{-1}(dx^i)_q, \phi_*(\omega^2)_q, \dots, \phi_*(\omega^l)_q\right) \\ &= \sum_{i=1}^d (\phi^* T_p)\left(\phi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q, (X_2)_q, \dots, (X_k)_q, \phi_*^{-1}(dx^i)_q, (\omega^2)_q, \dots, (\omega^l)_q\right) \\ &= C_1^1 \phi^* T_p((X_2)_q, \dots, (X_k)_q, (\omega^2)_q, \dots, (\omega^l)_q) \end{aligned}$$

donde en el último paso se ha tenido en cuenta que las bases $\{\phi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q; i = 1, \dots, d\}$ y $\{\phi_*^{-1}(dx^i)_q; i = 1, \dots, d\}$ son bases duales, en efecto

$$\begin{aligned} \phi_*^{-1}(dx^i)_q \left(\phi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q \right) &= (dx^i)_q \left((\phi^{-1})^* \phi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q \right) \\ &= (dx^i)_q \left((\phi^*)^{-1} \phi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q \right) = (dx^i)_q \left((\phi^*)^{-1} \phi^*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q \right) \\ &= (dx^i)_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q \right) = \delta_j^i \end{aligned}$$

■

8.3. La derivada de Lie

Pasamos a la definición fundamental de este capítulo: Sea X un campo vectorial definido en un abierto Ω de \mathbb{R}^d , un punto $p \in \Omega$ y sea $\phi : I_\delta \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ el grupo local uniparamétrico de transformaciones asociado al campo X definido en un entorno U de p de modo que $\phi(0, p) = p$. Queremos estudiar como varían los distintos objetos geométricos bajo la acción de este campo X . Por ejemplo supongamos que tenemos un campo tensorial T y queremos comparar el valor de T en el punto $p = \phi_0(p)$ y en el punto $q = \phi_t(p)$ cuando t tiende a cero. La dificultad que surge es que el valor del campo en el punto p y el valor del campo en el punto q pertenecen a espacios distintos, pues $T_q \in \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_q)$ mientras que $T_p \in \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$. Para poder comparar los valores vamos a transportar los valores en q a los valores en p mediante la aplicación “pull-back” ϕ_t^* .

Definición 8.2. Dado un campo tensorial k veces covariante y l veces contravariante

$$\begin{aligned} T : \Omega &\rightarrow \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p) \\ p &\rightarrow T_p \end{aligned}$$

Definimos la derivada de Lie del campo T respecto al campo vectorial X al campo tensorial k veces covariante y l veces contravariante

$$\begin{aligned} L_X T : \Omega &\rightarrow \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p) \\ p &\rightarrow (L_X T)(p) = L_X T_p \end{aligned}$$

donde $L_X T_p$ viene dado por

$$L_X T_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* T_{\phi_t(p)} - T_p}{t} \quad (8.5)$$

Comentario 8.2. El límite en 8.5 debe entenderse punto a punto, es decir para cualquier conjunto de campos $\{X_1, \dots, X_k\}$ y cualquier conjunto de 1-formas

$\{\omega^1, \dots, \omega^l\}$, $L_X T_p$ es el tensor de $\mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$ que verifica

$$\begin{aligned} & L_X T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* T_{\phi_t(p)} - T_p}{t}(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* T_{\phi_t(p)}(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p)) - T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p))}{t} \end{aligned}$$

Propiedades 8.2. -

a) L_X es \mathbb{R} -lineal, es decir dados T_1 y T_2 campos tensoriales y $\lambda \in \mathbb{R}$

■

$$L_X(T_1 + T_2) = L_X(T_1) + L_X(T_2)$$

■

$$L_X(\lambda T) = \lambda L_X T$$

b) $L_X(T_k^l \otimes T_s^r) = L_X T_k^l \otimes L_X T_s^r$ donde para cada $p \in \Omega$, $(T_k^l)_p \in \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$ y $(T_s^r)_p \in \mathcal{M}_s^r(\mathcal{T}_p)$

c) L_X conmuta con la contracciones. Es decir $L_X C T_k^l = C L_X T_k^l$ donde para cada $p \in \Omega$, $(T_k^l)_p \in \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$ y C es una contracción cualquiera.

Demostración:

a) Puesto que la aplicación ϕ_t^* es lineal tenemos:

■

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_t^*(T_1 + T_2)_{\phi_t(p)} - (T_1 + T_2)_p}{t} = \frac{\phi_t^*(T_{1, \phi_t(p)} + T_{2, \phi_t(p)}) - (T_{1,p} + T_{2,p})}{t} \\ &= \frac{\phi_t^* T_{1, \phi_t(p)} + \phi_t^* T_{2, \phi_t(p)} - (T_{1,p} + T_{2,p})}{t} \\ &= \frac{\phi_t^* T_{1, \phi_t(p)} - T_{1,p}}{t} + \frac{\phi_t^* T_{2, \phi_t(p)} - T_{2,p}}{t} \end{aligned}$$

puesto que la aplicación ϕ_t^* es lineal. Pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos el resultado.

■

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_t^*(\lambda T)_{\phi_t(p)} - \lambda T_p}{t} = \frac{\lambda \phi_t^* T_{\phi_t(p)} - \lambda T_p}{t} \\ &= \lambda \frac{\phi_t^* T_{\phi_t(p)} - T_p}{t} \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos el resultado.

b)

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_t^*((T_k^l)_{\phi_t(p)} \otimes (T_s^r)_{\phi_t(p)}) - (T_k^l)_p \otimes (T_s^r)_p}{t} \\
&= \frac{\phi_t^*(T_k^l)_{\phi_t(p)} \otimes \phi_t^*(T_s^r)_{\phi_t(p)} - (T_k^l)_p \otimes (T_s^r)_p}{t} \\
&= \frac{\phi_t^*(T_k^l)_{\phi_t(p)} - (T_k^l)_p}{t} \otimes \phi_t^*(T_s^r)_{\phi_t(p)} + \frac{\phi_t^*(T_s^r)_{\phi_t(p)} - (T_s^r)_p}{t} \otimes (T_k^l)_{\phi_t(p)}
\end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos el resultado.

c) Sea C una contracción cualquiera,

$$(L_X CT_k^l)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(CT_k^l)_{\phi_t(p)} - (CT_k^l)_p}{t}$$

aplicando la propiedad 8.1

$$\frac{\phi_t^*(CT_k^l)_{\phi_t(p)} - (CT_k^l)_p}{t} = C \frac{\phi_t^*(T_k^l)_{\phi_t(p)} - (T_k^l)_p}{t}$$

Pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos el resultado. ■

Una consecuencia inmediata de las anteriores propiedades es también el comportamiento de la derivada de Lie frente al producto exterior:

Propiedad 8.2. Sean ω_1 una k -forma y ω_2 una l -forma en Ω . Tenemos

$$L_X(\omega^1 \wedge \omega^2) = L_X \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge L_X \omega^2 \quad (8.6)$$

Demostración:

El producto exterior de dos tensores antisimétricos ω_p^1 y ω_p^2 es una combinación lineal de productos tensoriales $\omega_p^1 \otimes \omega_p^2$ cuando este producto se aplica a distintas ordenaciones de sus argumentos. Aplicando las propiedades (a) y (b) en 8.2 y teniendo en cuenta el comentario 8.2 obtenemos el resultado. ■

La siguiente propiedad cuya demostración es análoga a la demostración de la propiedad (b) anterior se deja como ejercicio:

Propiedad 8.3. Sea f es una función en Ω y T un campo tensorial en Ω se tiene

$$L_X(fT) = (L_X f)T + f(L_X T) \quad (8.7)$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 8.4. ■

8.4. Cálculo de la derivada de Lie

Vamos a calcular la derivada de Lie en distintos casos. Sea X un campo tangente en un abierto $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Sea ϕ su grupo local uniparamétrico asociado. Sea $p \in \Omega$ y pongamos $q = \phi_t(p)$

8.4.1. Derivada de Lie de funciones

Sea $f \in \mathcal{F}_p$. Vamos a calcular $(L_X f)_p$:

$$\begin{aligned}(L_X f)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t^* f - f)(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \phi_t)(p) - f(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(q) - f(p)}{t} = X_p(f)\end{aligned}$$

De modo que

$$L_X f = X(f)$$

Aclaremos el último paso: Dado $p \in \Omega$ fijo, sea $X = \sum_{i=1}^d \frac{d\phi_t^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$ el campo tangente asociado a $\phi = \phi(t, p) = \phi_t(p)$ con $\phi(0, p) = \phi_0(p) = p$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(q) - f(p)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi_t(p)) - f(\phi_0(p))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \phi)(t, p) - (f \circ \phi)(0, p)}{t} \\ &= (f \circ \phi_t(p))'(0) = f'(\phi_t(p)) \phi_t'(p) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{d\phi_t^i(p)}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_0(p)) = X_p(f)\end{aligned}$$

8.4.2. Derivada de Lie de un campo vectorial

Sea Y otro campo vectorial. Calculemos $L_X Y$. Vamos a utilizar las propiedades 8.2 de la derivada de Lie

Previamente necesitaremos el siguiente resultado

Lema 8.1. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Para todo campo vectorial X en Ω se verifica que la diferencial exterior de la derivada de Lie en la dirección del campo X de una función es igual a la derivada de Lie de la diferencial de esta función, es decir*

$$d(L_X(f)) = L_X(df)$$

Admitamos provisionalmente el lema anterior.

Recordemos primeramente que dada una función f , su diferencial df es una 1-forma y para un campo V tenemos $V(f) = df(V) = V(df)$.

Para cualquier $f \in \mathcal{F}_p$ podemos escribir

$$(L_X Y)(f) = (L_X Y)(df) = C_1^1(L_X Y \otimes df) \quad (8.8)$$

tenemos gracias a la propiedad (b) de 8.2

$$L_X(Y \otimes df) = L_X Y \otimes df + Y \otimes L_X(df)$$

de donde

$$L_X Y \otimes df = L_X(Y \otimes df) - Y \otimes L_X(df)$$

tomando contracciones

$$C_1^1(L_X Y \otimes df) = C_1^1 L_X(Y \otimes df) - C_1^1(Y \otimes L_X(df))$$

como la derivada de Lie conmuta con las contracciones

$$\begin{aligned} (L_X Y)(df) &= (L_X Y)(f) = L_X C_1^1(Y \otimes df) - C_1^1(Y \otimes L_X(df)) \\ &= L_X(Y(df)) - Y(L_X(df)) \\ &= L_X(Y(df)) - Y(d(L_X(f))) \\ &= L_X(Y(f)) - Y(L_X(f)) \\ &= XY(f) - YX(f) = [X, Y](f) \end{aligned}$$

La expresión

$$L_X Y = XY - YX = [X, Y] \quad (8.9)$$

se le llama corchete de Lie.

Véase el ejercicio 8.5 para el cálculo de la derivada de Lie de un campo vectorial utilizando coordenadas.

Demostración del lema 8.1: Sea ϕ_t el flujo local asociado a X . Por definición de derivada de Lie

$$L_X(df) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^*(df))$$

Por las propiedades de la diferencial exterior $\phi_t^*(df) = d(\phi_t^* f)$ (véase propiedad (d) del teorema 5.4). Por tanto podemos escribir

$$L_X(df) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\phi_t^* f)$$

La derivada respecto al parámetro t conmuta con la diferencial (véase comentario 8.3 a continuación) por lo que podemos escribir

$$L_X(df) = d\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f\right)$$

finalmente como

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f = L_X f = X(f)$$

resulta

$$L_X(df) = d(L_X f)$$

■

Comentario 8.3. Si tenemos una función $g : (t, x) \in I \times \Omega \rightarrow g(t, x) \in \mathbb{R}$ llamamos g_t a la función que para $t \in I$ un valor fijo $g_t : x \in \Omega \rightarrow g_t(x) = g(t, x) \in \mathbb{R}$. En nuestro caso $g_t = \phi_t^* f = f \circ \phi_t$. La diferencial de g_t , donde t es considerado un valor fijo, es

$$dg_t = \sum_{i=1}^d \frac{\partial g_t}{\partial x^i} dx^i$$

Por otra parte, para un punto $p \in \Omega$ fijado de antemano llamamos $g_t(p) : t \in I \rightarrow g(t, p) \in \mathbb{R}$. Cuando escribimos $\frac{dg_t}{dt}$ nos referimos a la derivada de la función $\frac{dg_t(p)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t}(t, p)$ donde p es un punto fijo. Entonces por una parte

$$d\left(\frac{dg_t}{dt}\right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial t} dx^i$$

y por otra parte

$$\frac{d}{dt}(dg_t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i$$

y las dos expresiones son iguales ya que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

Véase el ejercicio 8.6 para un cálculo detallado utilizando coordenadas.

8.4.3. Derivada de Lie de una 1-forma

Sean ω una 1-forma, X e Y campos vectoriales. $\omega(Y)$ es una función que no es más que la contracción de $\omega \otimes Y$. Podemos escribir $L_X(\omega(Y)) = X(\omega(Y))$. Como la contracción conmuta con la derivada de Lie

$$\begin{aligned} L_X(\omega(Y)) &= L_X(C_1^1 \omega \otimes Y) \\ &= C_1^1(L_X(\omega \otimes Y)) = C_1^1(L_X \omega \otimes Y + \omega \otimes L_X Y) \\ &= (L_X \omega)(Y) + \omega(L_X Y) \end{aligned}$$

de donde

$$(L_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$$

8.4.4. Aplicación: Derivada de Lie del elemento de volumen

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^3 con el sistema cartesiano de coordenadas $\{x, y, z\}$ y sea V un campo de velocidades en Ω . Queremos ver cómo se transforma el elemento de volumen $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ por acción de este campo, es decir vamos a calcular $L_V \omega$.

Primeramente observamos que podemos escribir

$$\begin{aligned} L_V(dx \wedge dy \wedge dz) \\ = L_V dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge L_V dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge L_V dz \end{aligned}$$

Calcularemos $L_V dx$. Como dx es una 1-forma, cualquiera que sea el campo W

$$(L_V dx)(W) = V(dx(W)) - dx([V, W])$$

Si W viene dado por

$$W = w^1 \frac{\partial}{\partial x} + w^2 \frac{\partial}{\partial y} + w^3 \frac{\partial}{\partial z}$$

y si V viene dado por

$$V = v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z}$$

tenemos $V(dx(W)) = V(w^1)$ y por otra parte $dx([V, W]) = a$ siendo $[V, W] = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$. De donde

$$a = [V, W](x) = V(W(x)) - W(V(x)) = V(w^1) - W(v^1)$$

así que

$$\begin{aligned} (L_V dx)(W) &= W(v^1) = w^1 \frac{\partial v^1}{\partial x} + w^2 \frac{\partial v^1}{\partial y} + w^3 \frac{\partial v^1}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} dx + \frac{\partial v^1}{\partial y} dy + \frac{\partial v^1}{\partial z} dz \right)(W) \end{aligned}$$

de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned} (L_V dx) \wedge dy \wedge dz &= \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} dx + \frac{\partial v^1}{\partial y} dy + \frac{\partial v^1}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{\partial v^1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Procediendo del mismo modo con las otras coordenadas

$$L_V(dx \wedge dy \wedge dz) = \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Llegamos a la siguiente conclusión:

$L_V(dx \wedge dy \wedge dz)$ representa lo que varía el elemento de volumen bajo la acción del campo de velocidades V . Si el fluido es incompresible, es decir el elemento de volumen no varía entonces

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z} = 0 \quad (8.10)$$

8.4.5. Derivada de Lie en un abierto espacio temporal

Añadimos ahora la variable tiempo: Más precisamente consideramos aplicaciones definidas en un abierto $J \times \Omega \in \mathbb{R}^{d+1}$ donde J es un intervalo abierto de \mathbb{R} , cuya coordenada t representará el tiempo, y Ω un abierto de \mathbb{R}^d . Sean $\{x^0 = t, x^1, \dots, x^d\}$ el sistema de coordenadas en $J \times \Omega \in \mathbb{R}^{d+1}$. Sea $\tilde{p} = (t_0, p) \in J \times \Omega$. Para cada \tilde{p} consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : I_\delta \times J \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ (t, \tilde{p}) &= (t, t_0, x^1, \dots, x^d) \rightarrow (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d) \end{aligned}$$

donde $\phi^0(t, t_0, x^1, \dots, x^d) = t - t_0$. Ahora para \tilde{p} fijado consideramos las curvas en \mathbb{R}^{d+1}

$$\begin{aligned} c = \phi_t(\tilde{p}) : I_\delta &\rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ t &\rightarrow c(t) = \phi_t(\tilde{p}) = (t - t_0, \phi_t^1(\tilde{p}), \dots, \phi_t^d(\tilde{p})) \end{aligned}$$

Para todo $\tilde{p} = (t_0, p) \in \mathbb{R} \times \Omega$, el vector tangente $X_{\tilde{p}}$ es el vector tangente asociado a la curva c anterior. El campo vectorial inducido es el campo que en cada punto $\tilde{p} = (t_0, p) \in \mathbb{R} \times \Omega$ es el vector tangente en \tilde{p} dado por

$$X_{\tilde{p}} = \left(c_* \frac{d}{dt} \right)_{c(t)} = \sum_{i=0}^d \frac{d\phi_t^i(\tilde{p})}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\tilde{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\tilde{p}} + \sum_{i=1}^d \frac{d\phi_t^i(\tilde{p})}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\tilde{p}}$$

Aquí ponemos $\frac{d\phi_t^i(\tilde{p})}{dt}$ pues \tilde{p} es un punto fijo.

Recíprocamente, dado el campo X expresado en este sistema de coordenadas mediante

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \lambda^i(t, x^1, \dots, x^d) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

donde las funciones λ^i son funciones reales diferenciables en un entorno de $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{d+1}$. Consideremos el problema diferencial de valor inicial siguiente: Dado

$p = \{x_0^1, \dots, x_0^d\}$, hallar $x^i : t \in I_\delta \rightarrow x^i(t) \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \dots, d$ tales que verifiquen el siguiente problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{dt} &= 1 \\ \frac{dx^i}{dt} &= \lambda^i(t, x^1(t), \dots, x^d(t)) \quad i = 1, \dots, d \\ x^0 &= t_0, x^i(0) = x_0^i \quad i = 1, \dots, d \end{aligned}$$

Obtenemos el grupo de transformaciones $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ donde $\phi^i(t, \tilde{p}) = x^i(t)$ para $i = 0, \dots, d$.

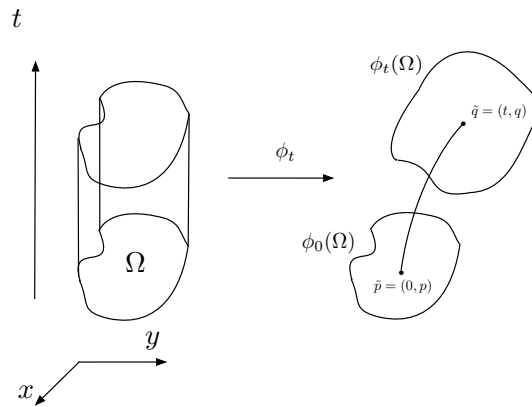


Figura 8.3 Grupo uniparamétrico de transformaciones espacio temporal

Sea ahora un función $f : I_\delta \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos a calcular la derivada de Lie con respecto al campo $X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial \phi_t^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$L_X f = X(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial \phi_t^i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

también escribimos $\frac{df}{dt} = L_X f = X(f)$ y se llama derivada total de f .

8.4.6. Aplicación: Ecuación de conservación de la masa

Vamos a calcular como se comporta el elemento de masa (o carga) en un fluido

$$\rho \, dx \wedge dy \wedge dz$$

cuando el fluido es transportado por un campo de velocidades $V = v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z}$. Aquí $\rho = \rho(t, x, y, z)$ es una función del punto $q = (x, y, z) \in \Omega$ y del tiempo t representando la densidad del fluido. Dado un punto $p \in \Omega$ tenemos $q = \phi(t, p)$. De modo que $q = (x(t), y(t), z(t))$. Calculemos $L_V(\rho dx \wedge dy \wedge dz)$.

$$\begin{aligned} L_V(\rho dx \wedge dy \wedge dz) &= L_V(\rho) dx \wedge dy \wedge dz + \rho L_V dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{d\rho}{dt} dx \wedge dy \wedge dz + \rho L_V dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + \rho \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

que escribiremos así

$$L_V(\rho dx \wedge dy \wedge dz) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (V, \nabla \rho) + \rho \operatorname{div} V \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

y la ecuación de conservación de la masa es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (V, \nabla \rho) + \rho \operatorname{div} V = 0$$

que también se puede escribir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \quad (8.11)$$

Supongamos ahora que ρ no depende directamente del tiempo, es decir $\rho(x, y, t)$. La ecuación de conservación de la masa es entonces

$$\operatorname{div}(\rho V) = 0 \quad (8.12)$$

Introduciendo la 2-forma

$$\omega_{\rho V} = \rho V^1 dx^2 \wedge dx^3 + \rho V^2 dx^3 \wedge dx^1 + \rho V^3 dx^1 \wedge dx^2$$

la ecuación (8.12) se puede escribir

$$d\omega_{\rho V} = 0$$

Ecuación de conservación de la masa en forma integral

Sea D una región abierta de Ω de frontera ∂D donde se verifica la ecuación 8.11, tendremos

$$\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_D \operatorname{div}(\rho V)$$

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski 7.4 resulta

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho = - \int_{\partial D} (\rho V, n) dA$$

siendo dA el elemento de área en ∂D ecuación que nos dice que el cambio de masa total en la región D es igual al flujo de masa que fluye hacia el interior de D .

8.4.7. Aplicación: Ecuación de conservación de la energía

Como en el apartado anterior consideramos una región abierta $D \subset \Omega$ de frontera ∂D donde se verifica la ecuación (8.11) y sobre la que no actúan fuerzas exteriores. En Ω tenemos definido un campo de velocidades $V = v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z}$ de modo que la región D es transportada por este campo, es decir si ϕ_t es el grupo uniparamétrico asociado al campo V pondremos $D(t) = \phi_t(D)$ con $D = D(0) = \phi_0(D)$. Por definición la energía es la suma de la energía cinética y de la energía interna. En ausencia de fuerzas exteriores a D la variación de la energía cinética es nula por lo que no la vamos a considerar. Supondremos las dos leyes físicas siguientes:

- La energía interna E es proporcional a la temperatura absoluta. Más precisamente pondremos $E = \rho CT$ donde ρ es la densidad, C es la capacidad calorífica y T es la temperatura. E representa la energía interna por unidad de volumen. La capacidad calorífica es la propiedad del material que representa la cantidad de energía que tiene que absorber una unidad de masa para aumentar la temperatura una unidad de temperatura.
- La difusión de energía interna se caracteriza mediante un campo vectorial J representando el flujo de energía y que depende del vector gradiente de temperatura. En particular la conocida como ley de Fourier dice

$$J = -K \nabla T \quad (8.13)$$

donde K es una propiedad del material llamada conductividad calorífica postulando que la energía fluye proporcionalmente al gradiente de temperatura desde las zonas de mayor temperatura a las de menor temperatura.

Queremos estudiar la variación con el tiempo de la energía interna E en $D(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho CT dx \wedge dy \wedge dz$$

y en particular en el instante $t = 0$ cuando $D(t) = D(0) = D$. Vamos a expresar esta integral en el dominio fijo D :

En general para una forma ω la derivada de Lie viene dada por $L_V \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \omega &= \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(D)} \omega \\
&= \frac{d}{dt} \int_D \phi_t^* \omega = \int_D \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega \\
&= \int_D \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega
\end{aligned}$$

y en el instante $t = 0$ tendremos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{D(t)} \omega = \int_D L_V \omega$$

Comentario 8.4. Se ha utilizado el paso de la derivada bajo el signo integral, lo cual es cierto para condiciones de regularidad suficientes del integrando. Véase el ejercicio 8.7.

Aplicaremos el cálculo anterior a la forma $\omega = \rho T dx \wedge dy \wedge dz$. Empezamos calculando la derivada de Lie de la forma $\rho CT dx \wedge dy \wedge dz$. Para simplificar supondremos que C es constante. V es el campo de velocidades en Ω .

$$\begin{aligned}
L_V(\rho CT dx \wedge dy \wedge dz) &= CL_V(\rho T dx \wedge dy \wedge dz) \\
&= CT(L_V \rho) dx \wedge dy \wedge dz + \rho C(L_V T) dx \wedge dy \wedge dz + \rho CT L_V(dx \wedge dy \wedge dz) \\
&= CT\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (V, \nabla \rho)\right) dx \wedge dy \wedge dz + \rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T)\right) dx \wedge dy \wedge dz \\
&\quad + \rho CT \operatorname{div} V dx \wedge dy \wedge dz \\
&= CT\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V)\right) dx \wedge dy \wedge dz + \rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T)\right) dx \wedge dy \wedge dz \\
&= \rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T)\right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación de conservación de la masa (8.11). Podemos escribir que la variación de la energía interna en D viene dada por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{D(t)} \rho CT dx \wedge dy \wedge dz &= \int_D L_V(\rho CT dx \wedge dy \wedge dz) \\
&= \int_D \rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T)\right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Expresamos ahora que la variación de la energía interna en la región D será igual la ganancia o pérdida de energía a través de la frontera de D :

$$\int_D \rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T)\right) dx \wedge dy \wedge dz = - \int_{\partial D} J^1 dz \wedge dy + J^2 dy \wedge dz + J^3 dx \wedge dy$$

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski 7.4 resulta

$$\int_D \left(\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T) \right) + \operatorname{div} J \right) = 0 \quad (8.14)$$

puesto que esto es cierto para toda región D en Ω resulta

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T) \right) + \operatorname{div} J = 0 \quad (8.15)$$

Si ahora tenemos en cuenta la ley de Fourier (8.13)

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T) \right) - \operatorname{div}(K \nabla T) = 0 \quad (8.16)$$

En el caso particular en el que el campo de velocidades V es nulo, por ejemplo en un sólido la ecuación de conservación de la energía es

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla T) = 0 \quad (8.17)$$

Comentario 8.5. Si tenemos fuentes exteriores de energía, llamando $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a la energía externa aportada por unidad de volumen tendremos

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V, \nabla T) \right) - \operatorname{div}(K \nabla T) = f \quad (8.18)$$

Comentario 8.6. La ecuación 8.15 se deduce de la ecuación 8.14 aplicando el siguiente propiedad fundamental de la integración de funciones: Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e integrable en Ω tal que $\int_D f = 0$ para todo conjunto abierto $D \subset \Omega$ entonces $f = 0$ en todo punto de Ω .

La demostración es sencilla:

Demostración:

Por reducción al absurdo supongamos que $x \in \Omega$ es un punto en el que $f(x_0)$ no es nulo por ejemplo $f(x_0) > 0$. Como f es continua existe una bola $B(x_0) \subset \Omega$ de x_0 en el que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0)$. Por ejemplo podemos suponer que $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0)$ para todo $x \in B(x_0)$. Entonces $\int_{B(x_0)} f > \frac{1}{2} f(x_0) \times \operatorname{Volumen}(B(x_0))$ lo que es una contradicción. ■

8.4.8. Derivada de Lie de un campo tensorial

Consideremos ahora un campo tensorial $T : p \in \Omega \rightarrow T_p \in \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$, k veces covariante y l veces contravariante. Para k vectores tangentes $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p$, y l formas diferenciales $(\omega_1)_p, \dots, (\omega_l)_p$ observemos

$$CT \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^l = T(Y_1, \dots, Y_k, \omega^1, \dots, \omega^l)$$

donde C es la contracción respecto a todos los índices quedando una función. Veamos la derivada de Lie para un tensor T de orden 2 covariante: Sea X un campo vectorial y vamos a calcular la derivada de Lie $L_X T$.

$$\begin{aligned} L_X T(Y_1, Y_2) &= L_X C(T \otimes Y_1 \otimes Y_2) \\ &= C(L_X T \otimes Y_1 \otimes Y_2) + (T \otimes L_X Y_1 \otimes Y_2) + (T \otimes Y_1 \otimes L_X Y_2) \\ &= L_X T(Y_1, Y_2) + T([X, Y_1], Y_2) + T(Y_1, [X, Y_2]) \end{aligned}$$

de donde

$$L_X T(Y_1, Y_2) = X(T(Y_1, Y_2)) - T([X, Y_1], Y_2) - T(Y_1, [X, Y_2])$$

Ejemplo: Derivada de Lie del tensor métrico

Consideremos ahora el tensor métrico $T = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ donde $g_{ij} = T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$. Sea X un campo vectorial, queremos calcular $L_X T$.

Tendremos $L_X T = b_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

$$\begin{aligned} b_{ij} &= L_X T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= X\left(T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\right) - T([X, \frac{\partial}{\partial x^i}], \frac{\partial}{\partial x^j}) - T(\frac{\partial}{\partial x^i}, [X, \frac{\partial}{\partial x^j}]) \end{aligned}$$

Escribamos $X = \sum_{i=1}^d w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Resulta

$$X\left(T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\right) = X(g_{ij}) = \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$\begin{aligned} [X, \frac{\partial}{\partial x^i}](f) &= X \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} X(f) \\ &= \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} - \sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i} (w^k \frac{\partial f}{\partial x^k}) \\ &= \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} - \sum_{k=1}^d \frac{\partial w^k}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \\ &= - \sum_{k=1}^d \frac{\partial w^k}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} \end{aligned}$$

es decir

$$[X, \frac{\partial}{\partial x^i}] = - \sum_{k=1}^d \frac{\partial w^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} T([X, \frac{\partial}{\partial x^i}], \frac{\partial}{\partial x^i}) &= T(- \sum_{k=1}^d \frac{\partial w^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= - \sum_{k=1}^d \frac{\partial w^k}{\partial x^i} T(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= - \sum_{k=1}^d g_{kj} \frac{\partial w^k}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} T(\frac{\partial}{\partial x^i}, [X, \frac{\partial}{\partial x^j}]) &= - \sum_{k=1}^d \frac{\partial w^k}{\partial x^j} T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}) \\ &= - \sum_{k=1}^d g_{ik} \frac{\partial w^k}{\partial x^j} \end{aligned}$$

y finalmente

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^d g_{kj} \frac{\partial w^k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^d g_{ik} \frac{\partial w^k}{\partial x^j}$$

Este tensor recibe el nombre de tensor de pequeñas deformaciones y define la variación del tensor métrico $T = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ cuando se efectúa una pequeña deformación definida por el campo X .

En coordenadas cartesianas $g_{ij} = \delta_{ij}$ de donde

$$b_{ij} = \frac{\partial w^j}{\partial x^i} + \frac{\partial w^i}{\partial x^j}$$

En elasticidad lineal se define el tensor de deformaciones (en el caso de pequeñas deformaciones) es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^j}{\partial x^i} + \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \right)$$

Ejercicios del Capítulo 8

8.1. Demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, x, y) &\rightarrow (x \cos \omega t + y \sin \omega t, -x \sin \omega t + y \cos \omega t)\end{aligned}$$

define un grupo uniparamétrico.

8.2. Calcular el campo asociado al grupo uniparamétrico

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, x, y) &\rightarrow (x \cos \omega t + y \sin \omega t, -x \sin \omega t + y \sin \omega t)\end{aligned}$$

8.3. Demostrar las propiedades 8.1

8.4. Demostrar la propiedad 8.3

8.5. Sean X e Y campos vectoriales en un abierto Ω de \mathbb{R}^d . Demostrar $L_X Y = [X, Y]$ utilizando la definición general de la derivada de Lie 8.2 y la expresión en coordenadas de los campos vectoriales.

8.6. Sean X un campo vectorial en un abierto Ω de \mathbb{R}^d y $f_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que la derivada de Lie de la función conmuta con la diferencial, es decir

$$L_X(df) = d(L_X f)$$

más precisamente, para todo campo Y se verifica

$$(L_X df)(Y) = (d(L_X f))(Y)$$

utilizando un cálculo detallado con coordenadas.

8.7. Sean Q un d -rectángulo en \mathbb{R}^d e $I = [a, b]$ un intervalo de \mathbb{R} . Sea $\varphi : Q \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

- a) Demostrar que la función $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(t) = \int_Q \varphi(x, t) dx$ es continua en I .
- b) Supongamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} : Q \times I \rightarrow \mathbb{R}$ existe y es continua. Demostrar que ψ es derivable y

$$\frac{d\psi}{dt} = \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx$$

Soluciones de los ejercicios

Ejercicios del Capítulo 1

1.1 Las propiedades N1, N2 y N3 son consecuencia inmediata de estas propiedades para el valor absoluto de números reales.

1.2 Daremos la solución para L^∞ . Para ello verificamos las propiedades N1, N2 y N3 de la definición de norma.

- N1: $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \geq 0$ y si $\|f\| = 0$ entonces $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$, es decir $f = 0$.
- N2: $\sup_{x \in [a,b]} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$
- N3: $\sup_{x \in [a,b]} |(\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

1.3 Dado $x \in F$ la aplicación $\varphi_x : \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda x \in F$ es evidentemente lineal y es continua pues

$$\|\lambda x\| = \|x\| \cdot |\lambda|$$

Esto permite definir una aplicación $T : F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ que a todo x le asocia la aplicación $T(x) = \varphi_x$. Tenemos,

1. T es lineal:

$$T(x+y) = \varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y = T(x) + T(y)$$

ya que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\varphi_{x+y}(\lambda) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = \varphi_x(\lambda) + \varphi_y(\lambda)$$

y del mismo modo

$$T(ax) = \varphi_{ax} = a\varphi_x = aT(x)$$

ya que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{ax}(\lambda) = \lambda(ax) = a(\lambda x) = a\varphi_x(\lambda)$$

2. T es una isometría:

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\| &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \neq 0} \frac{\|\varphi_x(\lambda)\|}{|\lambda|} \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \neq 0} \frac{\|\lambda x\|}{|\lambda|} = \|x\|\end{aligned}$$

3. T es inyectiva pues si $\varphi_x = \varphi_y$,

$$\|\varphi_x - \varphi_y\| = 0 \Rightarrow \varphi_x = \varphi_y$$

por tanto

$$x = \varphi_x(1) = \varphi_y(1) = y$$

4. T es suprayectiva: Dada $\mu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ existe una $x \in F$ tal que $\mu = T(x) = \varphi_x$. En efecto para $\mu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ basta tomar $x = \mu(1)$ ya que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\mu(\lambda) = \lambda\mu(1) = \lambda x = \varphi_x(\lambda)$$

es decir $\mu = \varphi_x$.

En conclusión T es una isometría biyectiva.

1.4 Pongamos $\Delta(h) = f(a+h) - f(a)$ y calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h) - \mu(h)\|}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(h) - \Delta(h) + \Delta(h) - \mu(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\Delta(h) - \lambda(h)\|}{\|h\|} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\Delta(h) - \mu(h)\|}{\|h\|} = 0\end{aligned}$$

Para $x \in E$ pongamos $h = tx$. Cuando $t \rightarrow 0$ tendremos $h \rightarrow 0$. Si $x \neq 0$ podemos escribir

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\lambda(tx) - \mu(tx)\|}{\|tx\|} = \frac{\|\lambda(x) - \mu(x)\|}{\|x\|}$$

Por lo tanto $\lambda(x) = \mu(x)$ para todo $x \in E$ con $x \neq 0$. Finalmente como $\lambda(0) = \mu(0) = 0$, pues λ y μ son aplicaciones lineales, tenemos $\lambda(x) = \mu(x)$ para todo $x \in E$.

1.5 Si $Df(a)$ es la diferencial de f en a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - DF(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

y a fortiori

$$\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a) - DF(a)(x-a)\| = 0$$

Como

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(a)\| - \|DF(a)(x-a)\| \\ \leq \left| \|f(x) - f(a)\| - \|DF(a)(x-a)\| \right| \leq \|f(x) - f(a) - DF(a)(x-a)\|\end{aligned}$$

resulta

$$\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| \leq \lim_{x \rightarrow a} \|Df(a)\| \|x - a\| + \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a) - DF(a)(x - a)\| = 0$$

1.6 Tenemos E, E_1, E_2, F espacios normados y A un abierto de E y consideremos la función $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilineal continua. Por otra parte $u : A \rightarrow E_1$ y $v : A \rightarrow E_2$ son diferenciables y sea g la función

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow E_1 \times E_2 \\ x &\rightarrow [u(x), v(x)] \end{aligned}$$

que será diferenciable, siendo la diferencial en el punto a

$$Dg(a) = [Du(a), Dv(a)]$$

La función compuesta $w = f \circ g$ es

$$\begin{aligned} w = f \circ g : A &\rightarrow F \\ x &\rightarrow f(u(x), v(x)) \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} Dw(p) &= D(f \circ g)(p) = Df(g(p)) \circ Dg(p) \\ &= Df(u(p), v(p)) \circ Dg(p) \end{aligned}$$

$Dw(p)$ es una aplicación lineal de E en F . Para todo $h \in E$, $Dw(p)(h)$ es el elemento de F dado por

$$\begin{aligned} Dw(p)(h) &= D(f \circ g)(p)(h) = \left(Df(g(p)) \circ Dg(p) \right)(h) \\ &= Df(u(p), v(p))(Dg(p)(h)) = Df(u(p), v(p))(Du(p)(h), Dv(p)(h)) \\ &= f(Du(p)(h), v(p)) + f(u(p), Dv(p)(h)) \end{aligned}$$

1.7 Sean E_1, \dots, E_n y F espacios normados y consideremos la función

$$\begin{aligned} T : E_1 \times \dots \times E_n &\rightarrow F \\ (v_1, \dots, v_n) &\rightarrow T(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

multilineal continua.

Demostraremos que T es diferenciable y se tiene

$$\begin{aligned} DT(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) &= T(h_1, a_2, \dots, a_n) + T(a_1, h_2, \dots, a_n) \\ &\quad + \dots + T(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n) \end{aligned}$$

En efecto, dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ introducimos la aplicación

$$\begin{aligned}\lambda_i : E_i &\rightarrow E_1 \times \cdots \times E_n \\ v_i &\rightarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\end{aligned}$$

La aplicación compuesta

$$\begin{aligned}T \circ \lambda_i : E_i &\rightarrow F \\ v_i &\rightarrow T(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\end{aligned}$$

es lineal gracias a que T es multilineal, en efecto:

$$\begin{aligned}(T \circ \lambda_i)(tv_i) &= T(a_1, \dots, tv_i, \dots, a_n) = tT(a_1, \dots, v_i, \dots, a_n) \\ &= t(T \circ \lambda_i)(v_i)\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}(T \circ \lambda_i)(u_i + v_i) &= T(a_1, \dots, u_i + v_i, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, u_i, \dots, a_n) + T(a_1, \dots, v_i, \dots, a_n) \\ &= (T \circ \lambda_i)(u_i) + (T \circ \lambda_i)(v_i)\end{aligned}$$

Además como T es continua $T \circ \lambda_i$ es continua. En efecto,

$$\|(T \circ \lambda_i)(v_i)\| \leq \|T\| \cdot \|a_1\| \cdots \|v_i\| \cdots \|a_n\| = M \|v_i\|$$

siendo $M = \|T\| \cdot \|a_1\| \cdots \|a_{i-1}\| \cdot \|a_{i+1}\| \cdots \|a_n\|$.

Concluimos que $T \circ \lambda_i$ es diferenciable siendo $D(T \circ \lambda_i)(a_i) = T \circ \lambda_i$ cualquiera que sea $a_i \in E_i$.

Por otra parte la aplicación λ_i es una aplicación afín que podemos poner de la forma

$$\lambda_i(v_i) = a + \mu_i(v_i - a_i)$$

donde μ_i es la aplicación lineal continua

$$\begin{aligned}\mu_i : E_i &\rightarrow E_1 \times \cdots \times E_n \\ v_i &\rightarrow (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

de modo que $D\lambda_i(a_i) = \mu_i$ cualquiera que sea $a_i \in E_i$. Recopilando tenemos las relaciones para cualquier $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$

$$T \circ \lambda_i = D(T \circ \lambda_i)(a_i) = DT(\lambda(a_i)) \circ D\lambda_i(a_i) = DT(a) \circ \mu_i$$

ya que $\lambda_i(a_i) = a$.

Consideremos ahora las aplicaciones proyección

$$\begin{aligned}p_i : E_1 \times \cdots \times E_n &\rightarrow E_i \\ (v_1, \dots, v_n) &\rightarrow v_i\end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned}\mu_i \circ p_i : E_1 \times \cdots \times E_n &\rightarrow E_1 \times \cdots \times E_n \\ (v_1, \dots, v_n) &\rightarrow (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^n (\mu_i \circ p_i)\right)(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n)$$

es la aplicación identidad Id de $E_1 \times \cdots \times E_n$ en sí mismo. Como $DT(a)$ es una aplicación lineal tendremos

$$\begin{aligned}DT(a) &= DT(a) \circ \left(\sum_{i=1}^n (\mu_i \circ p_i)\right) = \sum_{i=1}^n (DT(a) \circ \mu_i \circ p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left((DT(a) \circ \mu_i) \circ p_i\right) = \sum_{i=1}^n \left((T \circ \lambda_i) \circ p_i\right)\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}DT(a)(h_1, \dots, h_n) &= DT(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \left((T \circ \lambda_i) \circ p_i\right)(h_1, \dots, h_n) \\ &= (T \circ \lambda_1)(h_1) + (T \circ \lambda_2)(h_2) + \cdots + (T \circ \lambda_n)(h_n) \\ &= T(h_1, a_2, \dots, a_n) + T(a_1, h_2, \dots, a_n) + \cdots + T(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n)\end{aligned}$$

1.8

- Sea f una función real definida en $[a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f tiene un máximo relativo en un punto $x \in]a, b[$ y existe $f'(x)$ entonces $f'(x) = 0$.
Si f tiene un máximo relativo en $x \in]a, b[$ quiere decir que existe un entorno $U = (x - \delta, x + \delta)$ de x en el que $f(t) \leq f(x)$ para todo $t \in U$, es decir

- Si $x < t < x + \delta$ tendremos

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0$$

y pasando al límite cuando $t \rightarrow x$ obtenemos

$$f'(x) \leq 0$$

- Si $x - \delta < t < x$ tendremos

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0$$

y pasando al límite cuando $t \rightarrow x$ obtenemos

$$f'(x) \geq 0$$

es decir

$$f'(x) = 0$$

Análogamente si f tiene un mínimo relativo en un punto $x \in]a, b[$ y existe $f'(x)$ entonces $f'(x) = 0$. La demostración es análoga.

2. Si f y g son funciones reales continuas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, diferenciables en $]a, b[$, existe un punto $x \in]a, b[$ en el cual

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x)$$

En efecto, hagamos

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t) \quad a \leq t \leq b$$

h es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$. Además

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$$

Bastará demostrar que existe un punto $x \in]a, b[$ en el que $h'(x) = 0$: Si h es constante, $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Si $h(t) > h(a)$ para algún $t \in]a, b[$, como h es continua en $[a, b]$ que es un conjunto compacto, h alcanza el máximo en el compacto que tendrá que ser algún punto $x \in]a, b[$. Esto demuestra que $h'(x) = 0$. Si $h(t) < h(a)$ para algún $t \in]a, b[$ aplicamos el mismo razonamiento eligiendo un $x \in]a, b[$ donde h alcanza el mínimo.

3. Si f es una función real continua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, diferenciable en $]a, b[$, existe un punto $x \in]a, b[$ en el cual

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x)$$

Basta hacer $g(x) = x$ en el punto anterior.

1.9 Pongamos

$$v(t) = v(a) + \frac{1}{1!}v'(a)(t-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}v^{(n-1)}(a)(t-a)^{n-1} + M(t-a)^n$$

y hagamos

$$g(t) = v(t) - v(a) - \frac{1}{1!}v'(a)(t-a) - \dots - \frac{1}{(n-1)!}v^{(n-1)}(a)(t-a)^{n-1} - M(t-a)^n$$

tenemos $g(a) = 0$ y derivando sucesivamente

$$\begin{aligned}
g'(t) &= v'(t) - \frac{1}{1!}v'(a) - \dots - \frac{1}{(n-2)!}v^{(n-1)}(a)(t-a)^{n-2} - nM(t-a)^{n-1} \\
g''(t) &= v''(t) - \dots - \frac{1}{(n-3)!}v^{(n-1)}(a)(t-a)^{n-3} - n(n-1)M(t-a)^{n-2} \\
&\dots \\
g^{(n-1)}(t) &= v^{(n-1)}(t) - \frac{1}{1!}v^{(n-1)}(a) - n(n-1)(n-2)\dots 2M(t-a) \\
g^{(n)}(t) &= v^{(n)}(t) - n!M
\end{aligned}$$

de modo que

$$g(a) = 0, g'(a) = 0, \dots, g^{(n-1)}(a) = 0$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
g(b) &= v(b) - v(a) - \frac{1}{1!}v'(a)(b-a) - \dots \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)!}v^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} - M(b-a)^n = 0
\end{aligned}$$

Como g es continua y derivable en $[a, b]$ existirá un punto $a \leq t_1 \leq b$ en el que $g'(t_1) = 0$. Como $g'(a) = 0$ existirá un punto $a \leq t_2 \leq t_1$ en el que $g''(t_2) = 0$ y así sucesivamente llegaremos a que existe un punto $a \leq t_n \leq t_{n-1}$ en el que $g^{(n)}(t_n) = 0$. Finalmente podemos escribir

$$0 = g^{(n)}(t_n) = v^{(n)}(t_n) - n!M$$

de modo que poniendo $t_n = a + \theta b$ con $0 \leq \theta \leq 1$.

$$M = \frac{v^{(n)}(a + \theta b)}{n!}$$

1.10 Sea un abierto $A \subset \mathbb{R}^d$ y f y g las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d \\
\cup & f & \cup \\
A & \longrightarrow & f(A) \xrightarrow{g} g(f(A)) \subset \mathbb{R}^d \\
& & \cup \\
& & \mathbb{R}^d \\
& & \cup \\
g \circ f & : & A \longrightarrow g(f(A)) \subset \mathbb{R}^d
\end{array}$$

Si $(g \circ f)^{-1}$ existe y g^{-1} existe está claro que $(g \circ f)^{-1} \circ g$ existe y es la inversa de f . En efecto tenemos por una parte

$$(g \circ f)^{-1} \circ g \circ f = Id$$

y por otra parte veamos que también $f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g = Id$: Sea $y = f(x)$ con $x \in A$, tendremos

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(y) &= (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(f(x)) \\ &= (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g \circ f)(x) = f(x) = y\end{aligned}$$

por tanto $f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g = Id$. Una vez comprobado que f^{-1} existe, podemos escribir $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

1.11 Aplicaremos la regla de la cadena: Tenemos que $D(h \circ g)(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^d en \mathbb{R} . Calcularemos $D(h \circ g)(x)(z)$ para cualquier $z \in \mathbb{R}^d$.

Por una parte la diferencial de h en un punto $x \in \mathbb{R}^d$ aplicado a z , es $Dh(x)(z) = 2(x, z)$. Por otra parte la diferencial de $g = y - f(\cdot)$ es la aplicación $Dg(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ lineal con $Dg(x) = -Df(x)$ pues y es un vector constante. Finalmente

$$\begin{aligned}D(h \circ g)(x)(z) &= (Dh(g(x)) \circ Dg(x))(z) = Dh(g(x))(Dg(x)(z)) \\ &= 2(g(x), Dg(x)(z)) = -2(y - f(x), Df(x)(z))\end{aligned}$$

Ejercicios del Capítulo 2

2.1 Dado $\varepsilon > 0$ elegimos una partición P como se indica en la figura 8.4

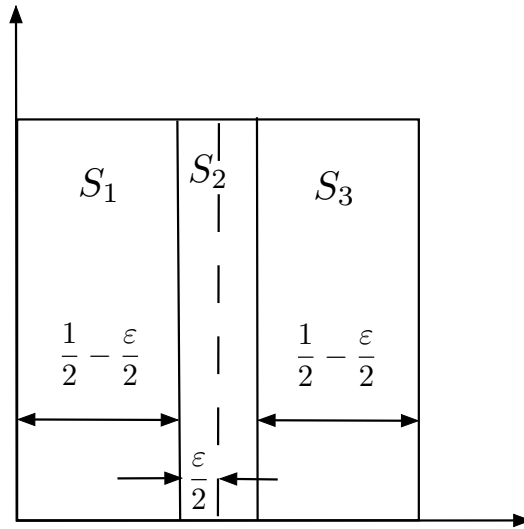


Figura 8.4 Partición de $[0, 1] \times [0, 1]$

Para esta partición

$$\begin{aligned} L(f, P) &= m_{S_1}(f)V(S_1) + m_{S_2}(f)V(S_2) + m_{S_3}(f)V(S_3) \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + 0 \cdot \varepsilon + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ U(f, P) &= M_{S_1}(f)V(S_1) + M_{S_2}(f)V(S_2) + M_{S_3}(f)V(S_3) \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + 1 \cdot \varepsilon + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$U(f, P) - L(f, P) = \varepsilon$$

Por lo tanto la función es integrable y

$$L(f, P) \leq \int_{[0,1] \times [0,1]} f \leq U(f, P)$$

o bien

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_{[0,1] \times [0,1]} f \leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

y pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ resulta

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f = \frac{1}{2}$$

2.2 Llamemos $M_S(f) = \sup\{f(x); x \in S\}$ y $m_S(f) = \inf\{f(y); y \in S\}$. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que

$$M_S(f) - \varepsilon < f(x)$$

y existe $y \in S$ tal que

$$f(y) < m_S(f) + \varepsilon$$

que es lo mismo que

$$-f(y) > -\varepsilon - m_S(f)$$

de modo que sumando

$$f(x) - f(y) > M_S(f) - m_S(f) - 2\varepsilon$$

Salvo en el caso en el que $M_S(f) = m_S(f)$, tendremos $M_S(f) > m_S(f)$ y por lo tanto para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tendremos también

$$|f(x) - f(y)| > M_S(f) - m_S(f) - 2\varepsilon$$

lo que quiere decir que $\sup\{|f(x) - f(y)|; x \in S, y \in S\} = M_S(f) - m_S(f)$.

En el caso en que $M_S(f) = m_S(f)$ la función f es constante en S , y entonces también

$$\sup\{|f(x) - f(y)|; x \in S, y \in S\} = \sup\{f(x) - f(y); x \in S, y \in S\} = 0$$

2.3 Como f es continua en Q es integrable en Q , entonces

$$\sup L(f, P) = \int_Q f = \inf U(f, P)$$

Vamos a tomar una sucesión de particiones $(P_n)_n$ tales que los subrectángulos S_n de P_n verifiquen $V(S_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por ejemplo sean los $S_n = S_{ij}$ de P_n siguientes

$$S_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \quad i, j = 1, \dots, n$$

El volumen de cada subrectángulo es

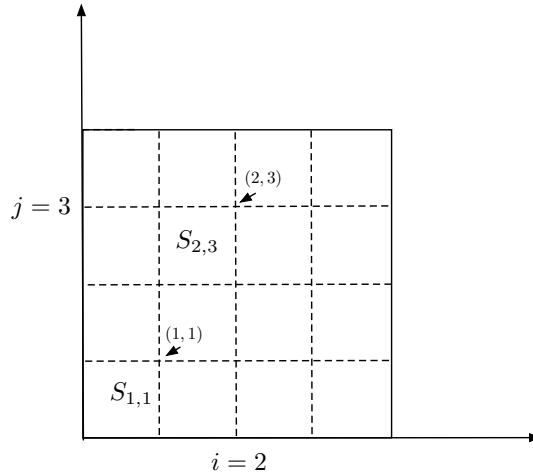


Figura 8.5 Partición de $[0, 1] \times [0, 1]$ para $n = 4$

$$V(S_{ij}) = \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

de modo que $V(S_{ij}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Tendremos pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_Q f$$

Calculemos por ejemplo $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P)$:

$$\begin{aligned}
U(f, P_n) &= \sum_{i,j=1}^n M_{S_{ij}}(f) \cdot V(S_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{i^2}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i,j=1}^n i^2 j = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j=1}^n i^2 \sum_{j=1}^n j \\
&= \frac{1}{n^4} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)(1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{n+1}{2} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Nota: Hemos utilizado $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ que se puede demostrar mediante el principio de inducción matemática.

2.4

- a) Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado de \mathbb{R} . Demostraremos que si $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ recubre $[a, b]$ entonces $\sum_{i=1}^n V(U_i) \geq b - a$. Razonando por inducción:
- Sea $n = 1$, es decir, supongamos que U_1 recubre $[a, b]$ entonces tendremos

$$V(U_1) \geq b - a$$

- Supongamos válido el resultado para un recubrimiento del intervalo $[a, b]$ por n intervalos y sea $\{U_1, U_2, \dots, U_{n+1}\}$ un recubrimiento de $[a, b]$ con $n+1$ subintervalos. Podemos suponer que $a \in U_1 = [\alpha, \beta]$. Tendremos $\alpha \leq a \leq \beta$. Si $\beta \geq b$ entonces $V(U_1) = \beta - \alpha \geq b - a$ y a fortiori $\sum_{i=1}^{n+1} V(U_i) \geq b - a$. Si $\beta < b$ entonces $[\beta, b]$ está recubierto por $\{U_2, \dots, U_{n+1}\}$ y por la hipótesis de inducción

$$\sum_{i=2}^{n+1} V(U_i) \geq b - \beta$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} V(U_i) = v(U_1) + \sum_{i=2}^{n+1} V(U_i) \geq \beta - a + b - \beta = b - a$$

- b) Si A es un conjunto compacto, de todo recubrimiento abierto puede obtenerse un subrecubrimiento finito. Por tanto si para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento numerable $\mathcal{R} = \{U_1, U_2, \dots\}$ de A tal que para todo

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \varepsilon$$

Sea $\{W_1, \dots, W_n\} \subset \mathcal{R}$ un subrecubrimiento finito de A extraído del recubrimiento \mathcal{R} . Entonces

$$\sum_{i=1}^n V(W_i) < \varepsilon$$

por lo que A tiene contenido cero.

- c) Un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto. Si $[a, b]$ tuviese medida cero por la parte (b) del ejercicio $[a, b]$ tendría contenido cero y en la parte (a) hemos visto que un intervalo cerrado $[a, b]$ no tiene contenido cero. Por lo tanto un intervalo cerrado $[a, b]$ no tiene medida cero.

2.5 Como

$$B = \{x \in Q; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x; f(x) > \frac{1}{n}\}$$

bastará probar que el conjunto $\{x; f(x) > \frac{1}{n}\}$ tiene contenido cero.

Si $\int_Q f = 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$$

Como f es no negativa $0 \leq L(f, P) \leq \int_Q f = 0$ tendremos $L(f, P) = 0$ y

$$U(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$$

Sea \mathcal{S} el conjunto de subrectángulos S de la partición P tales que

$$S \cap \{x; f(x) > \frac{1}{n}\} \neq \emptyset$$

Tendremos

$$\frac{1}{n} \sum_{S \in \mathcal{S}} V(S) < \sum_{S \in \mathcal{S}} M_S(f) V(S) \leq \sum_{S \in P} M_S(f) V(S) \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

es decir

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} V(S) < \varepsilon$$

2.6 $Q = [0, 1]$ y C el conjunto de números racionales entre 0 y 1. En efecto, la frontera de C es todo el intervalo $[0, 1]$ pues en cualquier entorno de un número racional hay números reales no racionales. Por lo tanto la frontera no tiene medida cero y χ_C no es integrable.

2.7

- a) Sean $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in [a, b]$ y hagamos $x_0 = a$ y $x_{n+1} = b$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} O(f, x_i) &= f(a^+) - f(a) + f(x_1^+) - f(x_1^-) + f(x_2^+) - f(x_2^-) \\
&\quad + f(x_3^+) - f(x_3^-) + \cdots + f(x_n^+) - f(x_n^-) + f(b) - f(b^-) \\
&= -f(a) + (f(a^+) - f(x_1^-)) + (f(x_1^+) - f(x_2^-)) + \dots \\
&\quad + (f(x_{n-1}^+) - f(x_n^-)) + (f(x_n^+) - f(b^-)) + f(b)
\end{aligned}$$

como $(f(a^+) - f(x_1^-)) \leq 0$, $(f(x_1^+) - f(x_2^-)) \leq 0$, \dots , $(f(x_{n-1}^+) - f(x_n^-)) \leq 0$ y $(f(x_n^+) - f(b^-)) \leq 0$ tenemos

$$\sum_{i=0}^{n+1} O(f, x_i) \leq f(b) - f(a)$$

Ahora bien para todo $\delta > 0$, $M(a, f, \delta) \geq f(a)$ y $m(a, f, \delta) = f(a)$ puesto que f es creciente, de modo que $O(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)) \geq 0$. Del mismo modo $M(b, f, \delta) = f(b)$ y $m(b, f, \delta) \leq f(b)$ y también $O(f, b) \geq 0$. Finalmente

$$\sum_{i=1}^n O(f, x_i) = \sum_{i=0}^{n+1} O(f, x_i) - O(f, a) - O(f, b) \leq f(b) - f(a)$$

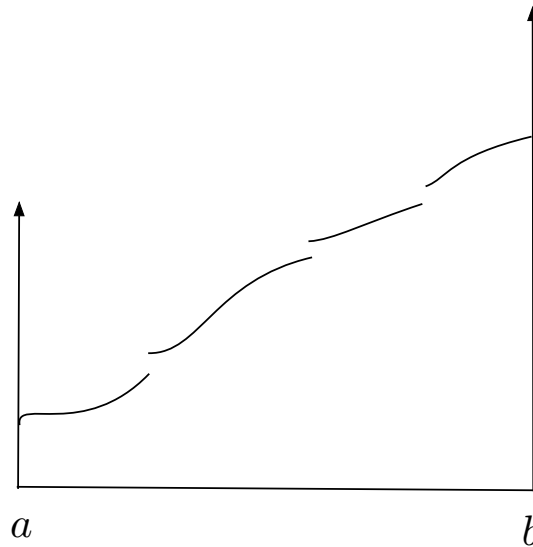


Figura 8.6 Funcion creciente

b) Podemos escribir

$$\{x; f \text{ no es continua en } x\} = \{x; \mathcal{O}(f, x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x; \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$$

Bastará probar que $B_n = \{x; \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$ tiene medida nula. Para ello vamos a ver que B_n es un conjunto finito. En efecto, razonando por reducción al absurdo supongamos que B_n no es finito. Extraigamos un conjunto numerable de puntos que ordenaremos en orden creciente $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_M < b$.

$$\sum_{i=1}^M \mathcal{O}(f, x_i) \geq \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} = \frac{M}{n}$$

Por otra parte aplicando el resultado de la parte (a)

$$\sum_{i=1}^M \mathcal{O}(f, x_i) \leq f(b) - f(a)$$

Pero tomando M suficientemente grande resulta $\frac{M}{n} > f(b) - f(a)$ llegando a una contradicción. En consecuencia B_n tiene que ser un conjunto finito y en consecuencia tiene contenido cero y por lo tanto medida cero.

- c) Como el conjunto $\{x; f \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida nula, aplicando el teorema 2.3 concluimos que si f es creciente es integrable.

2.8

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 \chi_D) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\int_0^{x^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 [y]_0^{x^2}) dx = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

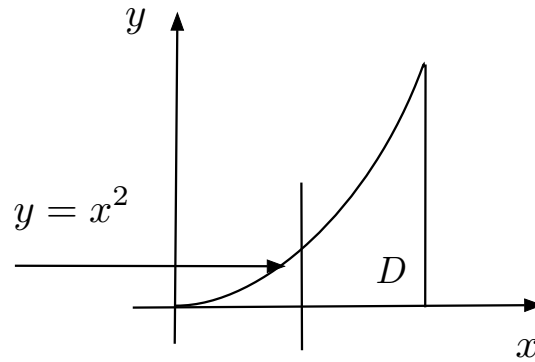


Figura 8.7 Dominio de integración. Ejercicio 2.8

2.9

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy \right) dx$$

La integral $\int_x^1 e^{y^2} dy$ es la integral de una curva gaussiana (campana de Gauss). Para calcular la integral en D será más sencillo utilizar el teorema de Fubini observando que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1, 0 < x < y\}$$

y calcular

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} \left(\int_0^y 1 dx \right) dy \\ &= \int_0^1 y e^{y^2} dy = \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

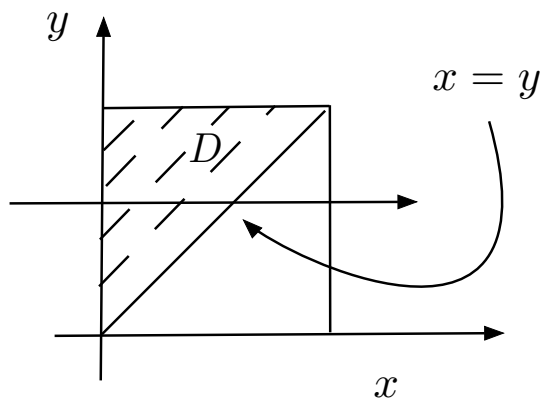


Figura 8.8 Dominio de integración. Ejercicio 2.9

2.10

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy) dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \sin(xy) \right]_0^{\frac{\pi}{2x}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^2 = \log 2 \end{aligned}$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

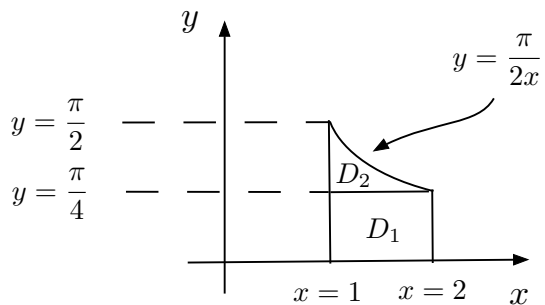


Figura 8.9 Dominio de integración. Ejercicio 2.10

2.11 Como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < 1, |y| < 1\}$$

tenemos $D = D_1 \cup D_2$ donde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, -1 < y < -x\}$$

y

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, -x < y < 1\}$$

Como

$$f(x, y) = |x + y|$$

tenemos

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y > 0 \\ -(x + y) & \text{si } x + y < 0 \end{cases}$$

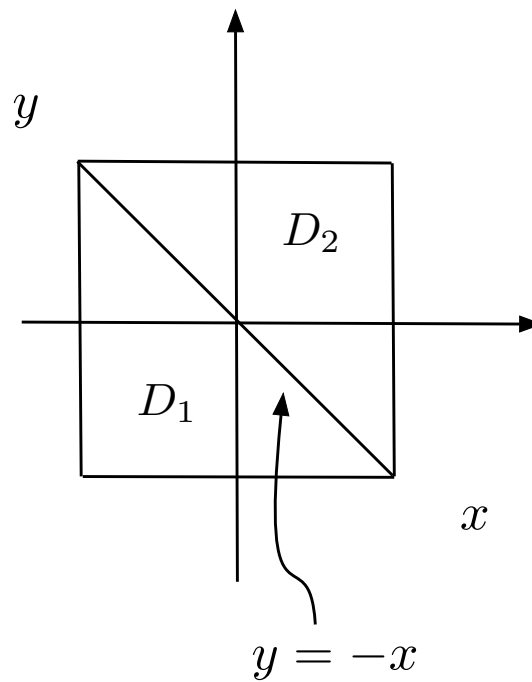


Figura 8.10 Dominio de integración. Ejercicio 2.11

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

$$\int_{D_1} f = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^{-x} -(x+y) dy \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{-x} -(x+y) dy &= -x \int_{-1}^{-x} dy - \int_{-1}^{-x} y dy \\
 &= -x[y]_{-1}^{-x} - \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{-x} = -x(-x+1) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= x^2 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 \int_{D_1} f &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 \int_{D_2} f &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^1 (x+y) dy\right) dx \\
 \int_{-x}^1 (x+y) dy &= \int_{-x}^1 x dy + \int_{-x}^1 y dy \\
 &= x[y]_{-x}^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^1 = x(1+x) + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\
 &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 \int_{D_2} f &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

2.12 Calcular $\int_D f$ para

$$D = [-2, 2] \times [-1, 1]$$

$$f(x, y) = \max\{x, y\}$$

Tenemos $D = D_1 \cup D_2$ donde

$$D_1 = \{(x, y) \in D; x \leq y\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in D; y \leq x\}$$

En consecuencia, $f(x, y) = y$ en D_1 y $f(x, y) = x$ en D_2 .

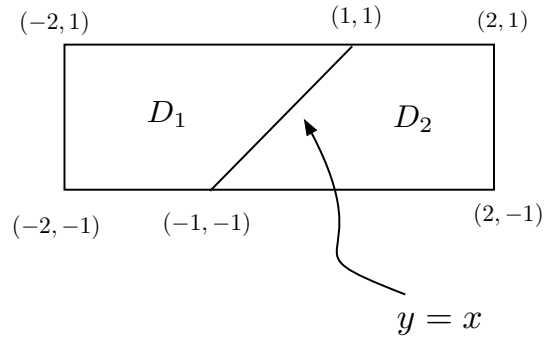


Figura 8.11 Dominio de integración. Ejercicio 2.12

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_{D_1} f + \int_{D_2} f \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^y y \, dx \right) dy + \int_{-1}^1 \left(\int_y^2 x \, dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 y[x]_{-2}^y \, dy + \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^2 \, dy \\ &= \int_{-1}^1 (y^2 + 2y) \, dy + \int_{-1}^1 \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_{-1}^1 + \left[2y - \frac{y^3}{6} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

2.13

$$D = [-2, 2] \times [-1, 1]$$

$$f(x, y) = |\text{máx}\{x, y\}|$$

Ponemos

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$$

- En $D_1 = \{(x, y) \in D; y \geq x, y \geq 0\}$ tenemos $f(x, y) = y$
 En $D_2 = \{(x, y) \in D; y \geq x, y \leq 0\}$ tenemos $f(x, y) = -y$
 En $D_3 = \{(x, y) \in D; y \leq x, y \geq 0\}$ tenemos $f(x, y) = x$
 En $D_4 = \{(x, y) \in D; y \leq x, y \leq 0, x \geq 0\}$ tenemos $f(x, y) = x$
 En $D_5 = \{(x, y) \in D; y \leq x, y \leq 0, x \leq 0\}$ tenemos $f(x, y) = -x$

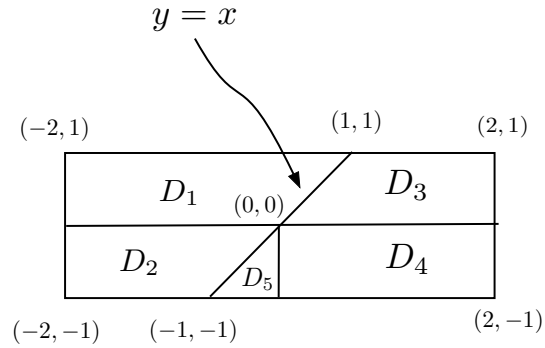


Figura 8.12 Dominio de integración. Ejercicio 2.13

La integral $\int_D f$ es la suma de las siguientes

$$\int_{D_1} f = \int_0^1 \left(\int_{-2}^y y \, dx \right) dy$$

$$\int_{D_2} f = \int_{-1}^0 \left(\int_{-2}^y -y \, dx \right) dy$$

$$\int_{D_3} f = \int_0^1 \left(\int_y^2 x \, dx \right) dy$$

$$\int_{D_4} f = \int_{-1}^0 \left(\int_0^2 x \, dx \right) dy$$

$$\int_{D_5} f = \int_{-1}^0 \left(\int_y^0 -x \, dx \right) dy$$

2.14 Calculamos $\int_D f$ en el subconjunto $D \subset [a, b] \times [a, b]$ de la figura 8.13 y aplicamos el teorema de Fubini.

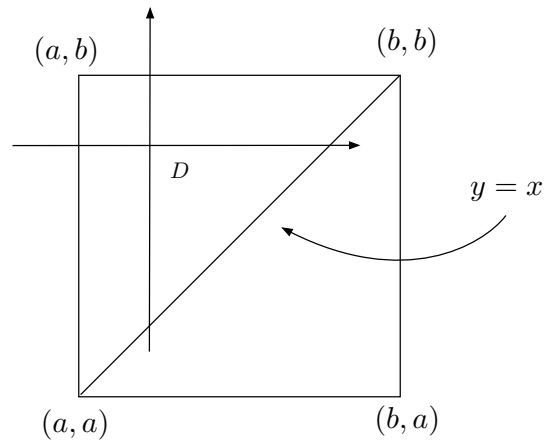


Figura 8.13 Dominio de integración. Ejercicio 2.14

Integrando primero respecto a x y despues respecto a y

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_a^y f(x, y) dx \right) dy$$

Integrando primero respecto a y y despues respecto a x

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_x^b f(x, y) dy \right) dx$$

2.15

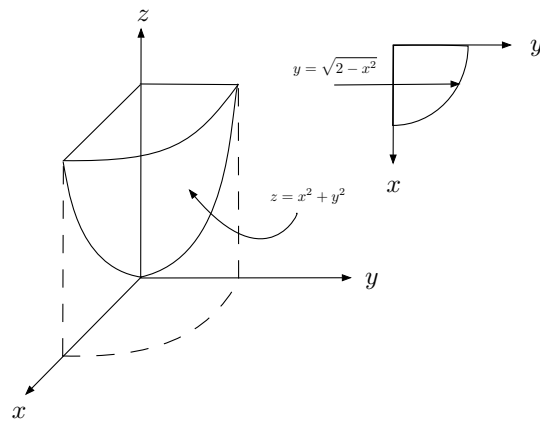


Figura 8.14 Dominio de integración 1. Ejercicio 2.15

Sea D la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie (figura 8.14)

$$z = x^2 + y^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$\begin{aligned} \int_D x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x \left((2-x^2)^{3/2} - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3} \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3} (2-x^2)^{3/2} \, dx = \left[\frac{-2(2-x^2)^{5/2}}{15} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

o también (figura 8.15)

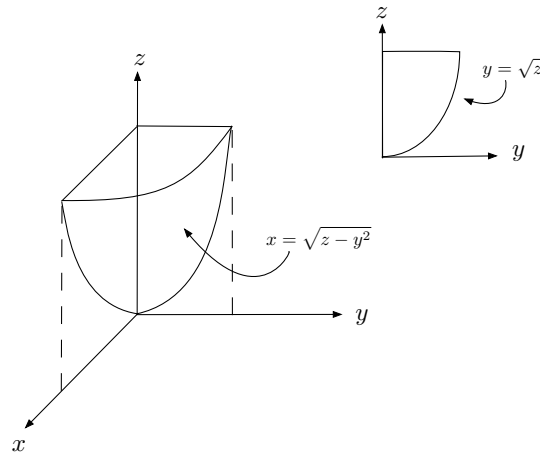


Figura 8.15 Dominio de integración 2. Ejercicio 2.15

$$\begin{aligned}
\int_D x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \left(\int_0^{z^{1/2}} \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x \, dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{z^{1/2}} \left(\frac{z-y^2}{2} \right) dy \right) dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(z^{3/2} - \frac{z^{3/2}}{3} \right) dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{3} z^{3/2} dz = \frac{8\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

2.16

A continuación puesto que en \mathbb{R}^d todas las normas son equivalentes utilizaremos la norma $\|\cdot\|_\infty$.

- a) Probaremos que si $A \subset \mathbb{R}^d$ es medible Jordan de medida nula ($V(A) = 0$) y $F: A \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función Lipschitziana de constante L entonces $F(A)$ es medible Jordan y tiene medida nula ($V(F(A)) = 0$).

Tomemos la norma $\|\cdot\|_\infty$, las bolas son entonces d -rectángulos, si A es de medida nula veamos que existe un recubrimiento de A mediante rectángulos cerrados U_1, U_2, \dots, U_r tales que $v(U_1) + v(U_2) + \dots + v(U_r) < \varepsilon/L^d$. En efecto, podemos elegir los U_i $i = 1, \dots, r$ de manera que sean cubos y que no se solapen de la manera siguiente: Sea χ_A la función característica de A que es integrable puesto que A es medible Jordan y sea Q un d -rectángulo que contiene a A . Tomamos una partición P de Q de manera que la suma superior $U(P, \chi_A, \cdot)$ sea menor que ε/L^d , lo cual es siempre posible puesto que $\int_Q \chi_A = 0$. Elegimos U_1, U_2, \dots, U_r los elementos de la partición P que tienen puntos en A .

Tomando la norma $\|\cdot\|_\infty$ el volumen de U_i es $V(U_i) = (\max_{x,y \in U_i} \|x - y\|) ^d$. Como F es Lipschitziana cada $F(U_i)$ $i = 1, \dots, r$ está contenido en un cubo U'_i , de diámetro $l = \max_{x,y \in U_i} \|F(x) - F(y)\|_\infty$. Tendremos que el volumen $V(F(U_i)) \leq V(U'_i)$ verifica

$$\begin{aligned}
V(F(U_i)) \leq V(U'_i) &\leq l^d = \left(\max_{x,y \in U_i} \|F(x) - F(y)\|_\infty \right)^d \\
&\leq \left(L \max_{x,y \in U_i} \|x - y\|_\infty \right)^d = L^d V(U_i)
\end{aligned}$$

y en consecuencia $F(A)$ está recubierto por los rectángulos U'_i $i = 1, \dots, r$, verificándose

$$\sum_{i=1}^r V(U'_i) \leq L^d \frac{\varepsilon}{L^d} = \varepsilon$$

y por tanto $V(F(A)) = 0$.

- b) Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ con U un abierto de \mathbb{R}^d de clase C^1 en U . Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ medible Jordan de medida nula y tal que $\bar{A} \subset U$. Entonces $F(A)$ es medible Jordan de medida nula:

Tenemos que para cada $x \in U$ existe un entorno en el que F es Lipschitziana (se dice que F es localmente Lipschitziana). Como A es acotado \bar{A} es compacto y por lo tanto existe un número finito de entornos U_1, U_2, \dots, U_r recubriendo \bar{A} en los que F es Lipschitziana. Claramente los conjuntos $A \cap U_i$ son de volumen cero, por la parte (a) los conjuntos $F(A \cap U_i)$ serán de medida nula y como

$$F(A) \subset \bigcup_{i=1}^r F(A \cap U_i)$$

es unión finita de conjuntos de medida nula se sigue que $V(F(A)) = 0$.

- c) Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ con U un abierto de \mathbb{R}^d de clase C^1 en U y con inversa de clase C^1 en \mathring{A} . Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ medible Jordan y tal que $\bar{A} \subset U$. Entonces $F(A)$ es medible Jordan y además $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$.

En efecto, observemos primero que como $F(A) \subset F(\bar{A})$, siendo \mathring{A} y $F(\mathring{A})$ abiertos, $F|_{\mathring{A}}$ es un homeomorfismo. $F(\bar{A})$ es compacto pues es la imagen de una aplicación continua del conjunto compacto \bar{A} y se tiene que $F(\bar{A})$ es cerrado. Ahora como $\overline{F(A)}$ es el menor cerrado que contiene a $F(A)$ tendremos necesariamente $\overline{F(A)} \subset F(\bar{A})$. Por otra parte $F|_{\mathring{A}} : \mathring{A} \rightarrow F(\mathring{A})$ es un difeomorfismo de clase C^1 , en consecuencia $F(\mathring{A})$ es un conjunto abierto y por tanto $F(\mathring{A}) \subset (F(A))^0$ pues el interior de un conjunto es el abierto máximo contenido en él. Finalmente,

$$\begin{aligned} \partial(F(A)) &= \overline{F(A)} \setminus (F(A))^0 \subset F(\bar{A}) \setminus F(\mathring{A}) \\ &\subset F(\bar{A} \setminus \mathring{A}) = F(\partial A) \end{aligned}$$

Sabemos que si A es medible Jordan su frontera ∂A tiene medida nula. Por la parte (b) $F(\partial A)$ tiene medida nula y ya que como acabamos de ver $\partial(F(A)) \subset F(\partial A)$ tendremos que su frontera $\partial(F(A))$ tiene medida nula y por lo tanto $F(A)$ es medible Jordan.

2.17

En el caso en el que no podamos encontrar un d -rectángulo Q tal que $g(A) \subset Q \subset g(E)$, al menos siempre existirá un d -rectángulo Q tal que $g(A) \subset Q$. En efecto A es acotado en consecuencia \bar{A} es compacto por lo que $g(\bar{A})$ es compacto y por lo tanto acotado de modo que puesto que $g(A) \subset g(\bar{A})$ resulta que $g(A)$ es acotado. También $\overline{g(A)} \subset g(\bar{A})$ puesto que $\overline{g(A)}$ es el menor cerrado que contiene a $g(A)$. Sea $\delta > 0$ la distancia de la frontera de $g(A)$ a la frontera de $g(E)$. Consideremos una partición P de Q tal que el diámetro de S sea menor que δ para cualquier $S \in P$. Llamemos F al subconjunto de subrectángulos $F = \{S \in P; S \cap g(A) \neq \emptyset\}$. Tendremos que para cualquier subrectángulo $S \in F$ se verifica $S \subset g(E)$. Como en la etapa 1 de la demostración del teorema 2.6 extendemos la función f mediante 0 fuera de $g(A)$. Podemos poner

$$\int_{g(A)} f = \sum_{S \in F} \int_S f$$

Aplicando el razonamiento de la etapa 1 a cada S del conjunto F ,

$$\begin{aligned}\int_{g(A)} f &= \sum_{S \in F} \int_S f = \sum_{S \in F} \int_{g^{-1}(S)} (f \circ g) |det g'| \\ &= \int_A (f \circ g) |det g'|\end{aligned}$$

y ya que si $x \in g^{-1}(S) \setminus A$ resulta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$ pues $g(x) \notin g(A)$ y F recubre $g(A)$.

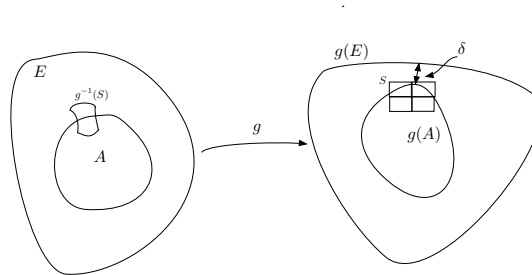


Figura 8.16 Ilustración del cambio de variable: Etapa 1, caso general

2.18 Probar que toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ se puede descomponer como composición de aplicaciones lineales elementales de la forma

- $T(x^1, x^2, \dots, x^d) = (\lambda x^1, x^2, \dots, x^d)$
- $T(x^1, x^2, \dots, x^d) = (x^1 + x^2, x^3, \dots, x^d)$
- $T(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^d) = (x^1, x^2, \dots, x^j, \dots, x^i, \dots, x^d)$

Utilizamos el método de Gauss-Jordan para resolver ecuaciones lineales. El método de Gauss-Jordan es una extensión del método de Gauss que permite transformar una matriz en la matriz identidad mediante transformaciones elementales. De modo que mediante el método de Gauss-Jordan obtenemos mediante transformaciones elementales T_i

$$T_1 \circ \dots \circ T_r \circ A = Id$$

de donde $A = T_r^{-1} \dots \circ T_1^{-1}$. En el método de Gauss transformamos en cero los términos debajo de la diagonal mediante transformaciones elementales. Por ejemplo en una matriz 4×4 la matriz la transformación consistente en multiplicar la primera componente a_1 de un vector por un número α y añadirlo a la segunda componente a_2 se puede representar mediante la multiplicación de una matriz, llamémosla E_1 por este vector, en efecto, poniendo

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tendremos, designando $a = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^t$

$$E_1 a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \alpha a_1 + a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

esto permite transformar en cero el término (2,1) de la matriz eligiendo $\alpha = -a_2/a_1$. Análogamente, multiplicar a_1 por β y añadirlo a a_3 se puede expresar

$$E_2 a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \beta a_1 + a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Elijiendo $\beta = -a_3/a_1$ esta matriz transforma en cero el término (3,1) de la matriz dejando inalterado los términos que están por encima del mismo. E_1 y E_2 son una combinación de transformaciones de tipo (a) y (b).

Eventualmente en cada paso se efectúa una permutación de filas para evitar divisiones por cero. En el ejemplo anterior si a_1 fuese cero previamente deberíamos permutar la fila 1 con otra fila cuyo primer término fuese distinto de cero. Un ejemplo de matriz que permuta filas es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que efectúa una permutación de las filas segunda y tercera que es una transformación de tipo (c). Mediante este tipo de transformaciones se transforma la matriz inicial en una matriz triangular superior. Procediendo análogamente desde la última fila hasta la primera podemos transformar la parte triangular superior, exceptuando la diagonal, en ceros obteniendo una matriz diagonal. Finalmente mediante transformaciones de tipo (a) compuestas con permutaciones de filas (tipo (c)) transformamos la matriz diagonal obtenida en la matriz identidad.

2.19 Tenemos que R es un $(d-1)$ -rectángulo y Q de la forma $R \times [a_d, b_d]$. Aplicando el teorema de Fubini

$$\int_{k(Q)} 1 = \int_R \left(\int_{k(\{\bar{x}\} \times [a_d, b_d])} dx_d \right) dx_1 \dots dx_{d-1}$$

donde nos referimos mediante $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ a un punto genérico fijo del rectángulo R . Tenemos

$$k'(x_1, \dots, x_d) = \begin{pmatrix} \frac{\partial k^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial k^1}{\partial x_{d-1}} & \frac{\partial k^1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial k^2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial k^2}{\partial x_{d-1}} & \frac{\partial k^2}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial k^d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial k^d}{\partial x_{d-1}} & \frac{\partial k^d}{\partial x_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial k^d}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial k^d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

de modo que $\det k'(x) = \frac{\partial k^d}{\partial x_d}$. Ahora introduciendo para cada $\tilde{x} \in R$ la función

$$k_{\tilde{x}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x_d \rightarrow k^d(\tilde{x}, x_d)$$

tenemos

$$|k'_{\tilde{x}}(x_d)| = \left| \frac{\partial k^d}{\partial x_d} \right| = |\det k'(x)|$$

de modo que finalmente

$$\begin{aligned} \int_{k(Q)} 1 &= \int_R \left(\int_{k(\{\tilde{x}\} \times [a_d, b_d])} dx_d \right) dx_1 \dots dx_{d-1} \\ &= \int_R \left(\int_{k^d([a_d, b_d])} dx_d \right) dx_1 \dots dx_{d-1} \\ &= \int_R \left(\int_{[a_d, b_d]} |(k^d)'| dx_d \right) dx_1 \dots dx_{d-1} = \int_Q |\det k'| \end{aligned}$$

2.20

Utilizando la simetría de la figura vamos a calcular la mitad del volumen V .

Tendremos

$$\frac{V}{2} = \int_D z \, dx \, dy = \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

Utilizamos el cambio de variable

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta)^t \rightarrow (x, y)^t$$

dado por

$$x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta$$

de modo que $|\det g'| = r$ y $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$. Tendremos

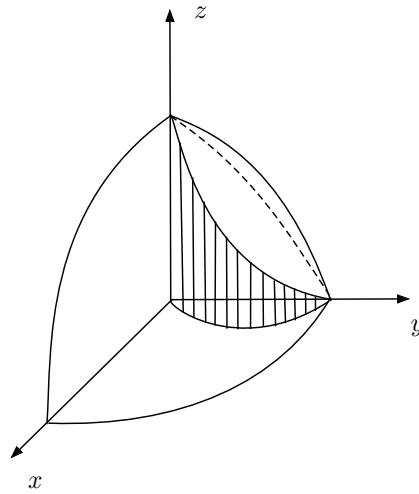


Figura 8.17 Intersección de la esfera y el cilindro

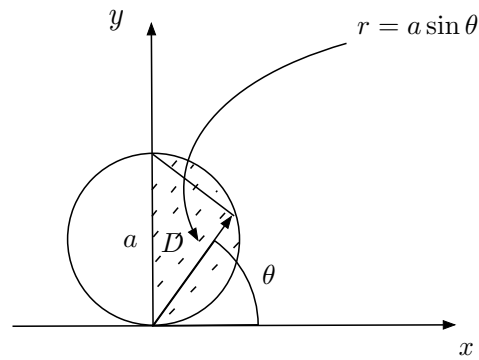


Figura 8.18 Cambio de variable

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{2} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \sin \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a \sin \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (a^3 - a^3 \cos^3 \theta) d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3 \theta) d\theta \\
 &= \frac{a^3}{3} \left(\int_0^{\pi/2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \right) = \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

donde la última integral se puede obtener mediante integraciones sucesivas por partes o bien poniendo

$$\cos^3 \theta = \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta$$

2.21 El ejercicio es calcular el volumen V comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ el plano $z = 0$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$. Calcularemos la cuarta parte del volumen.

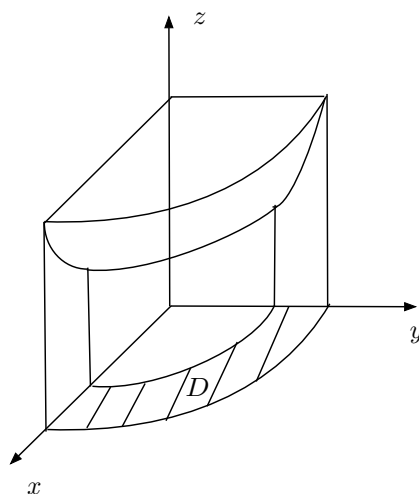


Figura 8.19 Cuarta parte del Volumen

Utilizando coordenadas cartesianas sería

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= \int_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

Si utilizamos el cambio de variable

$$\begin{aligned} g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta)^t &\rightarrow (x, y)^t \end{aligned}$$

dado por

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

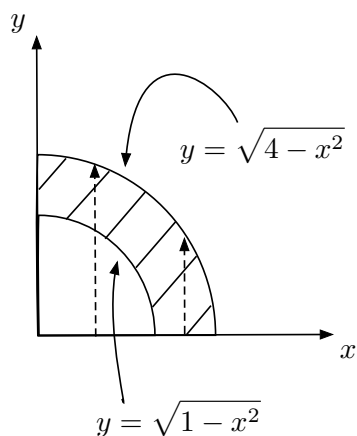


Figura 8.20 Dominio de integración. Ejercicio 2.21

Tenemos $|\det g'| = r$, $x^2 + y^2 = r^2$ y $D = \{1 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= \int_D r^2 |\det g'| dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^3 dr \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 r^3 dr = \frac{15\pi}{8} \end{aligned}$$

y el volumen pedido es $V = \frac{15\pi}{2}$

2.22 La matriz jacobiana es

$$g' = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

de modo que

$$|\det g'| = r^2 \sin \varphi$$

y

$$(f \circ g)(r, \theta, \varphi) = r^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_D f &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^4 \sin \varphi dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &= \frac{a^5}{5} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{5} a^5\end{aligned}$$

2.23 $|\det g'| = r$

$$\begin{aligned}\int_D f &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a z^2 r dr d\theta dz = \int_0^l z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \\ &= \frac{l^3}{3} 2\pi \frac{a^2}{2} = \frac{\pi}{3} l^3 a^2\end{aligned}$$

2.24

a)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

y

$$f(x, y) = x^{p-1} y^{q-1}$$

con p y q enteros positivos

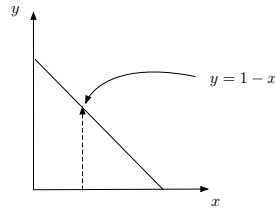


Figura 8.21 Dominio de integración

$$\begin{aligned}\int_D f &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^{p-1} y^{q-1} dy \right) dx = \frac{1}{q} \int_0^1 [x^{p-1} y^q]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \frac{1}{q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\end{aligned}$$

b)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$$

y

$$f(x, y, z) = x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}$$

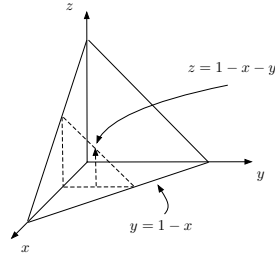


Figura 8.22 Dominio de integración

$$\begin{aligned}
 \int_D f &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dz dy dx \\
 &= \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} y^{q-1} dy \int_0^{1-x-y} z^{r-1} dz \\
 &= \frac{1}{r} \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} y^{q-1} (1-x-y)^r dy
 \end{aligned}$$

Tenemos una integral del tipo

$$\int_0^a y^{q-1} (a-y)^{s-1} dy$$

haciendo el cambio de variable $y = aw$, será $dy = a dw$ resultando

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 a^{q-1} w^{q-1} (a-aw)^{s-1} a dw &= a^{q-1} a^{s-1} a \int_0^1 w^{q-1} (1-w)^{s-1} dw \\
 &= a^{q+s-1} \frac{\Gamma(q)\Gamma(s)}{\Gamma(q+s)}
 \end{aligned}$$

volviendo al problema inicial con $a = 1-x$, $q = q$ y $s = r+1$, tendremos

$$\begin{aligned}
 \int_D f &= \frac{1}{r} \frac{\Gamma(q)\Gamma(r+1)}{\Gamma(q+r+1)} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q+r} dx \\
 &= \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r+1)} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q+r} dx \\
 &= \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r+1)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r+1)}{\Gamma(p+q+r+1)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}
 \end{aligned}$$

c)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \leq 1\}$$

y

$$f(x, y, z) = x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi, \eta, \zeta) &\rightarrow (x, y, z) \end{aligned}$$

donde x, y, z están dadas por

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha & x &= a\xi^{1/\alpha} \\ \eta &= \left(\frac{y}{b}\right)^\beta & y &= b\eta^{1/\beta} \\ \zeta &= \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma & z &= c\zeta^{1/\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{a}{\alpha} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{b}{\beta} \eta^{\frac{1}{\beta}-1} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{c}{\gamma} \zeta^{\frac{1}{\gamma}-1} \end{aligned}$$

de donde

$$|\det g'| = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} \eta^{\frac{1}{\beta}-1} \zeta^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

entonces

$$x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} = a^{p-1} b^{q-1} c^{r-1} \xi^{\frac{p-1}{\alpha}} \eta^{\frac{q-1}{\beta}} \zeta^{\frac{r-1}{\gamma}}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_D f &= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi^{\frac{p}{\alpha}-1} \eta^{\frac{q}{\beta}-1} \zeta^{\frac{r}{\gamma}-1} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \frac{\Gamma(\frac{p}{\alpha})\Gamma(\frac{q}{\beta})\Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} + 1)} \end{aligned}$$

d)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}$$

y

$$f(x, y, z) = xyz$$

En este caso particular $p = q = r = 2$, $\alpha = \beta = \gamma = 2$ y $a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$. De modo que

$$\int_D f = \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \Gamma(\frac{2}{2}) \Gamma(\frac{2}{2}) \Gamma(\frac{2}{2})}{2 \cdot 2 \cdot 2 \Gamma(1+1+1+1)}$$

$$= \frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 3!} = \frac{3}{4}$$

Ejercicios del Capítulo 3

3.1 Sean V y W espacios vectoriales, f una aplicación lineal de V en W , $S \in \mathcal{M}_k(W)$ y $T \in \mathcal{M}_l(W)$. Para $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}$, $k+l$ vectores de V tenemos

$$\begin{aligned} f^*(S \otimes T)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) &= (S \otimes T)(f(v_1), \dots, f(v_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_{k+l})) \\ &= S(f(v_1), \dots, f(v_k))T(f(v_{k+1}), \dots, f(v_{k+l})) = f^*S(v_1, \dots, v_k)f^*T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= (f^*S \otimes f^*T)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

3.2 σ es la permutación

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 2 \\ 2 &\rightarrow 3 \\ 3 &\rightarrow 1 \\ 4 &\rightarrow 4 \end{aligned}$$

y $(1, 2)$ es la permutación

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 2 \\ 2 &\rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 3 \\ 4 &\rightarrow 4 \end{aligned}$$

de modo que aplicando primero $(1, 2)$ y al resultado aplicándole σ obtenemos σ' que será la permutación

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 2 \rightarrow 3 = \sigma'(1) = \sigma(2) \\ 2 &\rightarrow 1 \rightarrow 2 = \sigma'(2) = \sigma(1) \\ 3 &\rightarrow 3 \rightarrow 1 = \sigma'(3) = \sigma(3) \\ 4 &\rightarrow 4 \rightarrow 4 = \sigma'(4) = \sigma(4) \end{aligned}$$

3.3 La definición de producto exterior y la del operador de antisimetrización nos da la expresión (3.13) del producto exterior:

$$\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

Podemos descomponer el sumatorio extendido a la permutaciones \mathcal{P}_{k+l} de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\tau \in \mathcal{P}_k} \operatorname{sgn}(\tau) \omega(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}) \right) \left(\sum_{\rho \in \mathcal{P}_l} \operatorname{sgn}(\rho) \eta(v_{\rho\sigma(k+1)}, \dots, v_{\rho\sigma(k+l)}) \right) \end{aligned}$$

Como ω y η son tensores antisimétricos, al cambiar el orden de sus argumentos, el valor de $\operatorname{sgn}(\tau)\omega$ y el valor de $\operatorname{sgn}(\rho)\eta$ no cambia. De modo que

$$\sum_{\tau \in \mathcal{P}_k} \operatorname{sgn}(\tau) \omega(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}) = k! \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

y

$$\sum_{\rho \in \mathcal{P}_l} \operatorname{sgn}(\rho) \eta(v_{\rho\sigma(k+1)}, \dots, v_{\rho\sigma(k+l)}) = l! \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

de donde resulta la expresión (3.14) para el producto exterior.

3.4 Las propiedades a), b) y c) son una consecuencia inmediata de las mismas propiedades 3.1 para el producto tensorial, de la definición de producto exterior 3.4 y de la definición del operador de antisimetrización (3.9). Veamos por ejemplo la propiedad a): Para v_1, \dots, v_{k+l} vectores,

$$\begin{aligned} & ((\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Ant}((\omega_1 + \omega_2) \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega_1 \otimes \eta + \omega_2 \otimes \eta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega_1 \otimes \eta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &+ \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega_2 \otimes \eta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Ant}(\omega_1 \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) + \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Ant}(\omega_2 \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= (\omega_1 \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) + (\omega_2 \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = (\omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

Para la propiedad d): $\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Ant}(\omega \otimes \eta)$ y para v_1, \dots, v_{k+l} , $k+l$ vectores de V tenemos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Ant}(\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in P_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) (\omega \otimes \eta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in P_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in P_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma' \in P_{k+l}} (-1)^{kl} \text{sgn}(\sigma') (\eta \otimes \omega)(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(l)}, v_{\sigma'(l+1)}, \dots, v_{\sigma'(l+k)}) \\
&= (-1)^{kl} (\eta \wedge \omega)(v_1, \dots, v_{k+l})
\end{aligned}$$

donde hemos puesto que si σ es la permutación $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \sigma(k+1), \dots, \sigma(k+l)$ entonces σ' es la permutación $\sigma'(1) = \sigma(k+1), \dots, \sigma'(l) = \sigma(k+l), \sigma'(l+1) = \sigma(1), \dots, \sigma'(l+k) = \sigma(k)$. Para pasar de la permutación σ a la permutación σ' hemos hecho para cada uno de los l índices k transposiciones. De modo que los signos de σ y σ' están relacionados por $\text{sgn}(\sigma') = (-1)^{kl} \text{sgn}(\sigma)$

La propiedad e) es una consecuencia inmediata de las definiciones del producto exterior, del operador de antisimetrización y de la linealidad de f .

3.5

a)

$$\begin{aligned}
\varphi^2 \wedge \varphi^3(v, w) &= \frac{(1+1)!}{1!1!} \text{Ant}(\varphi^2 \otimes \varphi^3)(v, w) \\
&= \varphi^2 \otimes \varphi^3(v, w) - \varphi^2 \otimes \varphi^3(w, v) = v^2 w^3 - w^2 v^3
\end{aligned}$$

$$\text{b) } \varphi^3 \wedge \varphi^1(v, w) = v^3 w^1 - w^3 v^1$$

$$\text{c) } \varphi^1 \wedge \varphi^2(v, w) = v^1 w^2 - w^1 v^2$$

3.6 Sea $A = [a_i^j]_{i,j=1}^d$ tenemos,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_d} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(d)}^d$$

Para cada $k = 1, \dots, d$ sea $\sigma(k) = j$, tendremos $k = \sigma^{-1}(j)$ y $a_{\sigma(k)}^k = a_j^{\sigma^{-1}(j)}$ y puesto que $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$ podemos escribir llamando $A^t = B = [b_i^j]_{i,j=1}^d$ a la matriz transpuesta de A , de modo que $b_i^j = a_j^i$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma) a_1^{\sigma^{-1}(1)} \cdots a_j^{\sigma^{-1}(j)} \cdots a_d^{\sigma^{-1}(d)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) b_{\sigma^{-1}(1)}^1 \cdots b_{\sigma^{-1}(j)}^j \cdots b_{\sigma^{-1}(d)}^d \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) b_{\sigma^{-1}(1)}^1 \cdots b_{\sigma^{-1}(j)}^j \cdots b_{\sigma^{-1}(d)}^d = \det(A^t)
\end{aligned}$$

ya que cuando σ recorre todas las permutaciones en \mathcal{P}_d también σ^{-1} lo hace.

3.7 Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base ortonormal de vectores de \mathbb{R}^d . Sea $w = \sum_{i=1}^d w^i e_i$. Tendremos $\varphi(w) = \sum_{i=1}^d w^i \varphi(e_i)$. Basta elegir $z = \sum_{i=1}^d \varphi(e_i) e_i$, entonces

$$\begin{aligned}
(z, w) &= \left(\sum_{i=1}^d \varphi(e_i) e_i, \sum_{j=1}^d w^j e_j \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^d \varphi(e_i) w^j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^d \varphi(e_i) w^j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^d \varphi(e_i) w^i = \varphi(w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

pues $\{e_1, \dots, e_d\}$ es una base ortonormal.

Para la unicidad basta observar que si z_1 y z_2 verifican

$$(z_1, w) = (z_2, w) = \varphi(w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^d$$

tenemos

$$(z_1 - z_2, w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^d$$

y tomando $w = z_1 - z_2$ resulta $\|z_1 - z_2\| = 0$ y $z_1 = z_2$.

Además

$$\|\varphi\| = \sup_{\|w\| \leq 1} |\varphi(w)| = \sup_{\|w\| \leq 1} |(z, w)| = \|z\|$$

3.8 Sea $A = [a_i^j]_{i,j=1}^d$ la matriz y sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base asociada, $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ la base dual y sean $v_i = (a_i^j)_{j=1}^d$ los vectores columna, es decir a_i^j para $j = 1, \dots, d$ son las componentes de v_i en la base $\{e_1, \dots, e_d\}$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(v_1, \dots, v_d) \\
&= \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(v_1, \dots, v_{d-1}, \sum_{j=1}^d a_d^j e_j) \\
&= \sum_{j=1}^d a_d^j \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(v_1, \dots, v_{d-1}, e_j)
\end{aligned}$$

Denotemos

$$\det(A_d^j) = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(v_1, \dots, v_{d-1}, e_j)$$

tendremos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^d a_d^j \det(A_d^j)$$

Vamos a calcular $\det(A_d^d)$:

$$\det(A_d^d) = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(v_1, \dots, v_d, e_d) = \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^d & a_2^d & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \det(A_d^d) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_d} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(d-1)}^{d-1} \delta_{\sigma(d)}^d \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{d-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(d-1)}^{d-1} \end{aligned}$$

puesto que $\delta_{\sigma(d)}^d = 1$ para $\sigma(d) = d$ y es igual a cero para $\sigma(d) \neq d$ y por otra parte $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(d-1)$ será una permutación de $1, 2, \dots, d-1$ que tendrá el mismo signo que la permutación $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(d)$ pues se descompone en el mismo número de transposiciones. Finalmente de la última expresión de $\det(A_d^d)$ deducimos que

$$\det(A_d^d) = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(v_1, \dots, v_d, e_d) = \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{d-1}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{d-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{d-1} & a_2^{d-1} & \cdots & a_{d-1}^{d-1} \end{bmatrix}$$

Esta última matriz resulta de suprimir la última fila y la última columna de la matriz de partida.

Para calcular $\det(A_d^j)$ observemos que

$$\det(A_d^j) = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^d(v_1, \dots, v_d, e_j) = \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{d-1}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_{d-1}^j & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^d & a_2^d & \cdots & a_{d-1}^d & 0 \end{bmatrix}$$

La fila j -ésima puede llevarse a la última fila de manera que podemos aplicar el cálculo anterior. Hay que tener en cuenta que al cambiar una fila por la siguiente

cambia el signo del determinante de modo que podemos escribir, teniendo en cuenta que al pasar de la fila j -ésima a la última cambiamos $d - j$ veces el signo

$$\det(A_d^j) = (-1)^{d+j} \det(A_d^{\hat{j}}) = (-1)^{d+j} \det(A_d^{\hat{j}})$$

donde $A_d^{\hat{j}}$ es la matriz obtenida a partir de la matriz A suprimiendo la fila j y la columna d . Además hemos tenido en cuenta que $d + j - (d - j) = 2j$, por lo tanto el signo de $(-1)^{d-j}$ es igual al signo de $(-1)^{d+j}$.

Tenemos pues finalmente que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^d (-1)^{d+j} a_d^j \det(A_d^{\hat{j}})$$

que es el desarrollo del determinante por los elementos de la última columna.

Para el desarrollo por los elementos de cualquier fila o columna se procedería análogamente.

3.9 Sea $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ la base dual de $\{e_1, \dots, e_d\}$. Tenemos

$$\det f = \det A = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d(f(e_1), \dots, f(e_d))$$

como $x = \sum_{j=1}^d x^j e_j$ podemos escribir $y = f(x) = \sum_{j=1}^d x^j f(e_j)$. De modo que

$$\begin{aligned} & \det(f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), y, f(e_{i+1}), \dots, f(e_d)) \\ &= \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d(f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), y, f(e_{i+1}), \dots, f(e_d)) \\ &= \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d(f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), \sum_{j=1}^d x^j f(e_j), f(e_{i+1}), \dots, f(e_d)) \\ &= \sum_{j=1}^d x^j \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d(f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), f(e_j), f(e_{i+1}), \dots, f(e_d)) \\ &= x^i \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d(f(e_1), \dots, f(e_d)) = x^i \det A \end{aligned}$$

de donde finalmente

$$x^i = \frac{\det(f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), y, f(e_{i+1}), \dots, f(e_d))}{\det A}$$

3.10 Pongamos $Ax = y$ de donde

$$x = A^{-1}y \quad (8.19)$$

Eligiendo sucesivamente en 8.19 $y = e_k$ $k = 1, \dots, d$ obtenemos la k -ésima columna de

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_d^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^d & b_2^d & \dots & b_d^d \end{bmatrix}$$

es decir $b_k = (b_k^1, \dots, b_k^d)^t$. Las componentes b_k^i de esta k -ésima columna son aplicando la regla de Cramer (ejercicio 3.9)

$$\begin{aligned} b_k^i &= \frac{\det(f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), e_k, f(e_{i+1}), \dots, f(e_d))}{\det A} \\ &= \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_k, a_{i+1}, \dots, a_d)}{\det A} \end{aligned}$$

Resumiendo el término b_k^i de la fila i columna k de la matriz inversa es

$$b_k^i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i-1}^1 & 0 & a_{i+1}^1 & \dots & a_d^1 \\ a_1^2 & \dots & a_{i-1}^2 & 0 & a_{i+1}^2 & \dots & a_d^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \text{fila } k \text{ -ésima} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^d & \dots & a_{i-1}^d & 0 & a_{i+1}^d & \dots & a_d^d \end{bmatrix}}{\det A}$$

Desarrollando el determinante por la fila k -ésima obtenemos el cofactor del término a_i^k . En definitiva para calcular el término de la fila i columna k , b_k^i , de la matriz inversa tenemos que calcular el cofactor de la fila k columna i de la matriz A . En la práctica trasponemos primero la matriz A y calculamos el cofactor del término $(a^t)_k^i = a_i^k$ de la matriz traspuesta.

3.11 Poniendo los vectores dados en función de la base ortonormal $\{e_i; i = 1, \dots, d\}$, $w_i = \sum_{j=1}^d a_i^j e_j$

$$\omega(w_1, \dots, w_d) = \omega\left(\sum_{j=1}^d a_1^j e_j, \dots, \sum_{j=1}^d a_d^j e_j\right) = \det(A)$$

donde A es la matriz de términos a_i^j ; $i, j = 1, \dots, d$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= (w_i, w_j) = \left(\sum_{k=1}^d a_i^k e_k, \sum_{l=1}^d a_j^l e_l \right) \\
 &= \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i^k a_j^l (e_k, e_l) = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d a_i^k a_j^l \delta_{kl} \\
 &= \sum_{k=1}^d a_i^k a_j^k = \sum_{k=1}^d (a^t)_k^i a_j^k
 \end{aligned}$$

donde los términos $(a^t)_i^j = a_j^i$ para $i, j = 1, \dots, d$ denotan los términos de la matriz transpuesta A^t . Si G es la matriz de términos g_{ij} ; $i, j = 1, \dots, d$ tenemos

$$G = A^t \cdot A$$

de donde

$$\det(G) = \det(A^t) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$$

y finalmente

$$\det(A) = \sqrt{\det(G)}$$

De la propiedad 3.4 concluimos que $\sqrt{\det(G)}$ es el volumen del paralelepípedo formado por los vectores w_1, \dots, w_d .

3.12 Sean $w_1, \dots, w_{d-1} \in \mathbb{R}^d$, aplicamos el resultado del ejercicio anterior a los vectores w_1, \dots, w_{d-1}, z . La matriz \tilde{G} (del ejercicio anterior) correspondiente a los d vectores w_1, \dots, w_{d-1}, z la descomponemos en bloques

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} (w_i, w_j)_{i,j=1}^{d-1} & \vdots & (w_i, z)_{i=1}^{d-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ (z, w_j)_{j=1}^{d-1} & \vdots & (z, z) \end{bmatrix}$$

y tendremos

$$\omega(w_1, w_2, \dots, w_{d-1}, z) = \sqrt{\det \begin{bmatrix} (w_i, w_j)_{i,j=1}^{d-1} & \vdots & (w_i, z)_{i=1}^{d-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ (z, w_j)_{j=1}^{d-1} & \vdots & (z, z) \end{bmatrix}}$$

tomando $z = w_1 \times \dots \times w_{d-1}$ resulta

$$\begin{aligned}\omega(w_1, w_2, \dots, w_{d-1}, w_1 \times \dots \times w_{d-1}) &= \sqrt{\det \begin{bmatrix} (w_i, w_j)_{i,j=1}^{d-1} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & (z, z) \end{bmatrix}} \\ &= \sqrt{(z, z)} \sqrt{\det(G)} = \|w_1 \times \dots \times w_{d-1}\| \sqrt{\det(G)}\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el desarrollo del determinante por la última columna y donde G es la matriz de términos $g_{ij} = (w_i, w_j)$; $i, j = 1, \dots, d-1$

Finalmente por la definición de producto vectorial de $d-1$ vectores de \mathbb{R}^d

$$\begin{aligned}\omega(w_1, w_2, \dots, w_{d-1}, w_1 \times \dots \times w_{d-1}) &= \det[w_1, \dots, w_{d-1}, w_1 \times \dots \times w_{d-1}] \\ &= (w_1 \times \dots \times w_{d-1}, w_1 \times \dots \times w_{d-1}) = \|w_1 \times \dots \times w_{d-1}\|^2\end{aligned}$$

resulta

$$\|w_1 \times \dots \times w_{d-1}\| = \sqrt{\det(G)}$$

3.13 Es aplicación inmediata del ejercicio anterior: Dos vectores v, w en \mathbb{R}^3 : La matriz G es una matriz de dos filas por dos columnas

$$G = \begin{bmatrix} (v, v) & (v, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{bmatrix}$$

Si aplicamos el resultado del ejercicio 3.12 para $d = 3$ y dos vectores v y w resulta

$$\|v \times w\| = \sqrt{\det(G)}$$

que es área del paralelogramo formado por v y w puesto que considerando estos dos vectores como vectores de \mathbb{R}^2 tendremos que $\sqrt{\det(G)}$ es el volumen del 2-paralelepípedo es decir es el área del paralelogramo formado por los 2 vectores. Finalmente calculando $\det(G)$ obtenemos

$$\|v \times w\| = \sqrt{(v, v)(w, w) - (v, w)^2}$$

Ejercicios del Capítulo 4

4.1 En este caso concreto lo comprobamos mediante cálculo explícito: Veamos que $B^{-1} = A$. La matriz B se puede escribir como

$$B = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\frac{\sin \theta_0}{r_0} & \frac{\cos \theta_0}{r_0} \end{bmatrix}$$

La matriz B^{-1} es la matriz adjunta de la transpuesta de B , $(B^t)_{adj}$ dividida por el determinante de B , $\det B$ (véase ejercicio 3.10). Tenemos que $\det B = \frac{1}{r_0}$ y finalmente

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (B^t)_{adj} = r_0 \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\frac{\sin \theta_0}{r_0} \\ \sin \theta_0 & \frac{\cos \theta_0}{r_0} \end{bmatrix}_{adj} = r_0 \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{r_0} & -\sin \theta_0 \\ \frac{\sin \theta_0}{r_0} & \cos \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -r_0 \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & r_0 \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

De manera general podemos aplicar el teorema de la función inversa 1.7 en el capítulo 1.

4.2 Podemos proceder directamente, poniendo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p &= \frac{\partial r}{\partial x}(p) \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \frac{\partial \theta}{\partial x}(p) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= \frac{\partial r}{\partial y}(p) \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \frac{\partial \theta}{\partial y}(p) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p \end{aligned}$$

Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x}(p) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\partial r}{\partial y}(p) &= \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(p) &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)(1, 1) = -\frac{1}{2} & \frac{\partial \theta}{\partial y}(p) &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)(1, 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y finalmente

$$X_p = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p$$

4.3 Lo resolveremos de dos maneras. Trabajando en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas.

a) Trabajando en coordenadas cartesianas: Una curva en \mathbb{R}^3 se escribe,

$$\begin{aligned} c :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

La ecuación del cilindro es

$$x^2 + y^2 = 1$$

por lo tanto los puntos de la curva dada verificarán

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad \forall t \in (a, b)$$

Sea el punto $p = c(t_0)$.

Un vector tangente es de la forma

$$X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \lambda^3 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Si la curva está sobre el cilindro, derivando la ecuación del cilindro, tenemos

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

de donde

$$y'(t) = -\frac{x(t)x'(t)}{y(t)} = -\frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{1-x^2(t)}}$$

de modo que

$$X_p = x'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p - \frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{1-x^2(t_0)}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p$$

b) Trabajando en coordenadas cilíndricas: Una curva en \mathbb{R}^3 se escribe,

$$\begin{aligned} c :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow c(t) = (r(t), \theta(t), z(t)) \end{aligned}$$

y la ecuación del cilindro es

$$r = 1$$

El vector tangente en $p = c(t_0)$ será

$$X_p = r'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p = \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p$$

4.4

Trabajando con coordenadas cilíndricas la ecuación de la superficie se puede poner de la forma $r = r(z)$. Un vector tangente a la curva

$$\begin{aligned} c :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow c(t) = (r(t), \theta(t), z(t)) \end{aligned}$$

en el punto $p = c(t_0)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} X_p &= r'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p \\ &= \frac{dr}{dz}(z(t_0)) z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p \end{aligned}$$

4.5 Podemos aplicar el resultado general del ejercicio anterior. Si $p = c(t)$ está en la parte exterior:

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{dr}{dz}(z(t_0)) z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p \\ &= -\frac{z(t_0)z'(t_0)}{\sqrt{1-z^2(t_0)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_p + \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p \end{aligned}$$

Si $p = c(t)$ está en la parte interior:

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{dr}{dz}(z(t_0))z'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \theta'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + z'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ &= \frac{z(t_0)z'(t_0)}{\sqrt{1-z^2(t_0)}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \theta'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + z'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \end{aligned}$$

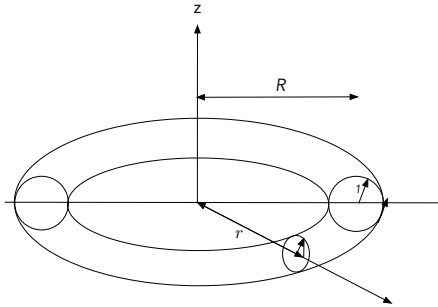


Figura 8.23 El Toro como superficie de revolución en coordenadas cilíndricas

- a) La curva es la circunferencia de radio $R+1$ y centro el origen de coordenadas, es decir

$$\begin{aligned} c : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (r(t), \theta(t), z(t)) \end{aligned}$$

donde $r(t) = R+1$, $\theta(t) = t$ y $z(t) = 0$. Verifiquemos que la curva dada es una curva sobre la superficie del toro: Efectivamente,

$$((r(z(t)) - R)^2 + z(t)^2 = (R+1 - R)^2 + 0 = 1$$

Finalmente el vector tangente será:

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p$$

- b) Circunferencia que es la sección transversal según el plano $x-z$, es decir

$$\begin{aligned} c : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (r(t), \theta(t), z(t)) \end{aligned}$$

donde $r(t) = R + \cos t$, $\theta(t) = 0$ y $z(t) = \sin t$. Verificamos que la curva está sobre la superficie dada:

$$(r(z(t)) - R)^2 + z^2(t) = (R + \cos t - R)^2 + \sin^2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

de modo que

$$r(z(t)) = R + \sqrt{1 - z^2(t)}$$

El vector tangente en un punto $p = c(t_0)$ será si p está en la parte exterior:

$$\begin{aligned} X_p &= -\frac{z(t_0)z'(t_0)}{\sqrt{1-z^2(t_0)}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \theta'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + z'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ &= -\frac{\sin t_0 \cos t_0}{\sqrt{1-\sin^2(t_0)}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \cos t_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ &= -\sin t_0\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \cos t_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \end{aligned}$$

y si p está en la parte interior:

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{z(t_0)z'(t_0)}{\sqrt{1-z^2(t_0)}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \theta'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + z'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ &= \frac{\sin t_0 \cos t_0}{\sqrt{1-\sin^2(t_0)}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \cos t_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ &= \sin t_0\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \cos t_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \end{aligned}$$

c) La curva (una helicoida que se apoya sobre la superficie del toro) viene dada por

$$\begin{aligned} c : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (r(t), \theta(t), z(t)) \end{aligned}$$

donde $r(t) = R + \cos t$, $\theta(t) = t$ y $z(t) = \sin t$. Observemos que está sobre la superficie del toro:

$$(r(z(t)) - R)^2 + z^2(t) = (R + \cos t - R)^2 + \sin^2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

El vector tangente en un punto $p = c(t_0)$ será si p está en la parte exterior:

$$\begin{aligned} X_p &= -\frac{z(t_0)z'(t_0)}{\sqrt{1-z^2(t_0)}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \theta'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + z'(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ &= -\frac{\sin t_0 \cos t_0}{\sqrt{1-\sin^2(t_0)}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \cos t_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ &= -\sin t_0\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \cos t_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \end{aligned}$$

y si p está en la parte interior:

$$\begin{aligned}
X_p &= \frac{z(t_0)z'(t_0)}{\sqrt{1-z^2(t_0)}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\
&= \frac{\sin t_0 \cos t_0}{\sqrt{1-\sin^2(t_0)}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \cos t_0 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\
&= \sin t_0 \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \cos t_0 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p
\end{aligned}$$

4.6 La ecuación de la hélice es:

$$\begin{aligned}
c &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
t &\rightarrow (\cos t, \sin t, t)
\end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas el vector tangente en el punto $p = c(t_0)$ es:

$$\begin{aligned}
X_p &= x'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + y'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\
&= -\sin t_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \cos t_0 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p
\end{aligned}$$

En coordenadas cilíndricas la ecuación de la hélice es

$$\begin{aligned}
c &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
t &\rightarrow (r(t), \theta(t), z(t)) = (1, t, t)
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
X_p &= r'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \theta'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + z'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p
\end{aligned}$$

O bien utilizando la matriz de cambio de base

$$\begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t_0 & \sin t_0 & 0 \\ -\sin t_0 & \cos t_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos

$$X_p = \mu^1 \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p + \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \mu^3 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$$

4.7 Tenemos para todo vector tangente $X_p \in \mathcal{T}_p$ y todo par de funciones $f, g \in \mathcal{F}_p$:

$$\begin{aligned}
\phi_*(X_p)(f+g) &= X_p((f+g) \circ \phi) = X_p(f \circ \phi + g \circ \phi) \\
&= X_p(f \circ \phi) + X_p(g \circ \phi) = \phi_*(X_p)(f) + \phi_*(X_p)(g)
\end{aligned}$$

y tenemos para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda función $f \in \mathcal{F}_p$:

$$\begin{aligned}\phi_*(X_p)(\lambda f) &= X_p((\lambda f) \circ \phi) = X_p(\lambda(f \circ \phi)) \\ &= \lambda X_p(f \circ \phi) = \lambda(\phi_* X_p)(f)\end{aligned}$$

4.8

Sea un vector tangente X_p de \mathcal{T}_p . Vamos a calcular $\phi_* X_p$. Utilizando las bases tendremos

$$X_p = \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^1} \right)_p + \cdots + \lambda^m \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^m} \right)_p$$

y

$$\phi_* X_p = \mu^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{\phi(p)} + \cdots + \mu^d \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_{\phi(p)}$$

Queremos calcular las componentes μ^1, \dots, μ^d en función de las componentes $\lambda^1, \dots, \lambda^m$. Tenemos para todo $j = 1, \dots, d$

$$\mu^j = \phi_* X_p(x^j) = X_p(x^j \circ \phi) = \sum_{i=1}^m \lambda^i \frac{\partial(x^j \circ \phi)}{\partial \hat{x}^i}(p)$$

Es decir con notación matricial y con la notación simplificada $\frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i}(p)$ en lugar de $\frac{\partial(x^j \circ \phi)}{\partial \hat{x}^i}(p)$

$$\begin{bmatrix} \mu^1 \\ \dots \\ \mu^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^d}{\partial \hat{x}^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^d}{\partial \hat{x}^m}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \dots \\ \lambda^m \end{bmatrix}$$

4.9 La matriz de cambio de base en el espacio tangente es

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_d^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^d & \dots & a_d^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^d}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^d}{\partial y^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^d}{\partial y^d}(p) \end{bmatrix}$$

y la matriz del cambio de base en el espacio dual (espacio de las formas diferenciales) es

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & \dots & b_d^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1^d & \dots & b_d^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^d}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^d}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial y^d}{\partial x^d}(p) \end{bmatrix}$$

Vamos a demostrar que son inversas, es decir $A \cdot B = B \cdot A = Id$ donde Id es la matriz identidad. Escribiendo el producto de $B \cdot A$ término a término tenemos que demostrar que (para simplificar la escritura omitimos la referencia al punto p)

$$\sum_k b_k^i a_j^k = \delta_j^i \quad \forall i, j = 1, \dots, d$$

Tenemos por definición de base dual

$$dy^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \delta_j^i$$

Sustituyendo dy^i y $\left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)$ en función de las bases asociadas al sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^d\}$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta_j^i &= dy^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = dy^i \left(\sum_{k=1}^d a_j^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{l=1}^d b_l^i dx^l \left(\sum_{k=1}^d a_j^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d b_l^i a_j^k dx^l \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d b_l^i a_j^k \delta_k^l = \sum_k b_k^i a_j^k \end{aligned}$$

El caso $A.B = Id$ se demuestra de la misma manera. Observar que el resultado es el mismo para las matrices de cambio de bases de un espacio y su dual pues en la demostración no interviene el hecho de que tratamos con derivaciones y formas diferenciales.

4.10 El sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 viene dado en función del sistema de coordenadas esféricas mediante:

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

La matriz de cambio de base en el espacio de formas diferenciales en el punto $p = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(p) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(p) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(p) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(p) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & -r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 & 0 & -r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix}$$

la relación entre la base de formas diferenciales en esféricas y cartesianas es

$$\begin{bmatrix} dx_p \\ dy_p \\ dz_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & -r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 & 0 & -r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dr_p \\ d\theta_p \\ d\varphi_p \end{bmatrix}$$

Ejercicios del Capítulo 5

5.1 Las coordenadas cilíndricas son r, θ, z y están relacionadas con las coordenadas cartesianas por

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

- Primer método: Mediante cálculo. La relación entre las bases de formas diferenciales en un punto p de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) es

$$\begin{aligned}dx_p &= \frac{\partial x}{\partial r}(p)dr_p + \frac{\partial x}{\partial \theta}(p)d\theta_p = \cos \theta dr_p - r \sin \theta d\theta_p \\dy_p &= \frac{\partial y}{\partial r}(p)dr_p + \frac{\partial y}{\partial \theta}(p)d\theta_p = \sin \theta dr_p + r \cos \theta d\theta_p \\dz_p &= dz_p\end{aligned}$$

de modo que en este punto p

$$\begin{aligned}dx_p \otimes dx_p &= (\cos \theta dr_p - r \sin \theta d\theta_p) \otimes (\cos \theta dr_p - r \sin \theta d\theta_p) \\&= \cos^2 \theta dr_p \otimes dr_p + r^2 \sin^2 \theta d\theta_p \otimes d\theta_p - 2r \cos \theta \sin \theta dr_p \otimes d\theta_p \\dy_p \otimes dy_p &= (\sin \theta dr_p + r \cos \theta d\theta_p) \otimes (\sin \theta dr_p + r \cos \theta d\theta_p) \\&= \sin^2 \theta dr_p \otimes dr_p + r^2 \cos^2 \theta d\theta_p \otimes d\theta_p + 2r \cos \theta \sin \theta dr_p \otimes d\theta_p \\dz_p \otimes dz_p &= dz_p \otimes dz_p\end{aligned}$$

En consecuencia el tensor métrico fundamental en coordenadas cilíndricas es

$$T_p = dr_p \otimes dr_p + r^2 d\theta_p \otimes d\theta_p + dz_p \otimes dz_p$$

- Segundo método: Mediante cálculo de las componentes del tensor. Primero expresamos los vectores de la nueva base del espacio tangente en función de la antigua base:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_p &= T_{rr} dr \otimes dr + T_{r\theta} dr \otimes d\theta + T_{rz} dr \otimes dz \\
&\quad + T_{\theta r} d\theta \otimes dr + T_{\theta\theta} d\theta \otimes d\theta + T_{\theta z} d\theta \otimes dz \\
&\quad + T_{zr} dz \otimes dr + T_{z\theta} dz \otimes d\theta + T_{zz} dz \otimes dz
\end{aligned}$$

y se comprueba fácilmente que solo los términos diagonales son distintos de cero.

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= T_p\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\
T_{\theta\theta} &= T_p\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \\
T_{zz} &= 1
\end{aligned}$$

De modo que

$$T_p = dr_p \otimes dr_p + r^2 d\theta_p \otimes d\theta_p + dz_p \otimes dz_p$$

5.2 Las coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta \sin \varphi \\
y &= r \sin \theta \sin \varphi \\
z &= r \cos \varphi
\end{aligned}$$

De modo que

$$T_p = dr_p \otimes dr_p + r^2 \sin^2 \varphi d\theta_p \otimes d\theta_p + r^2 d\varphi_p \otimes d\varphi_p$$

5.3 Las coordenadas cilíndricas son

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta \\
y &= r \sin \theta \\
z &= z
\end{aligned}$$

- Primer método: Utilizando las propiedades 3.2 y teniendo en cuenta que el producto exterior de formas diferenciales es antisimétrico, tenemos $dr_p \wedge dr_p = 0$ y $d\theta \wedge d\theta = 0$, de modo que para las coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}
dx_p \wedge dy_p \wedge dz &= (\cos \theta dr_p - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr_p + r \cos \theta d\theta) \wedge dz_p \\
&= (r \cos^2 \theta dr_p \wedge d\theta_p - r \sin^2 \theta d\theta_p \wedge dr_p) \wedge dz_p = r dr_p \wedge d\theta_p \wedge dz_p
\end{aligned}$$

- Segundo método: Utilizando la matriz del cambio de base.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

5.4 Las coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \sin \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \varphi\end{aligned}$$

Utilizando la matriz del cambio de base:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{bmatrix} = -r^2 \sin \varphi$$

de modo que

$$\omega_p = -r^2 \sin \varphi dr_p \wedge d\theta_p \wedge d\varphi_p = r^2 \sin \varphi dr_p \wedge d\varphi_p \wedge d\theta_p$$

5.5

$$\begin{aligned}\phi^*(P dx^1 \wedge dx^2 + Q dx^2 \wedge dx^3) &= \phi^*(P dx^1 \wedge dx^2) + \phi^*(Q dx^2 \wedge dx^3) \\ &= (P \circ \phi) \phi^*(dx^1 \wedge dx^2) + (Q \circ \phi) \phi^*(dx^2 \wedge dx^3) \\ &= (P \circ \phi)(\phi^* dx^1 \wedge \phi^* dx^2) + (Q \circ \phi)(\phi^* dx^2 \wedge \phi^* dx^3)\end{aligned}$$

5.6 Calcular $\omega \wedge \eta$ en los casos siguientes

a)

$$\begin{aligned}\omega &= 2x dx + y dy \\ \eta &= x^3 dx + y^2 dy\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}(2x dx + y dy) \wedge (x^3 dx + y^2 dy) &= 2xy^2 dx \wedge dy + x^3 y dy \wedge dx \\ &= (2xy^2 - x^3 y) dx \wedge dy\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\omega &= x dx - y dy \\ \eta &= y dx + x dy\end{aligned}$$

Respuesta:

$$(x^2 + y^2) dx \wedge dy$$

c)

$$\begin{aligned}\omega &= x dx + y dy + z dz \\ \eta &= z dx \wedge dy + x dy \wedge dz + y dz \wedge dx\end{aligned}$$

Respuesta:

$$(x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz$$

d)

$$\omega = e^{xyz} dx \wedge dy$$

$$\eta = e^{-xyz} dz$$

Respuesta:

$$dx \wedge dy \wedge dz$$

5.7 El sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 viene dado en función del sistema de coordenadas esféricas mediante:

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

El campo tensorial métrico fundamental en coordenadas esféricas es (véase ejercicio 5.2)

$$T = dr \otimes dr + r^2 \sin^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

Tendremos

$$e_r = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$e_\theta = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$e_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Sea

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta, \varphi) \rightarrow f(r, \theta, \varphi)$$

la diferencial de f es

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

el campo asociado es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi$$

5.8

1. Sea una 2-forma ω

$$\begin{aligned}\omega : \Omega &\rightarrow \Lambda_2(\mathbb{R}^d) \\ p &\rightarrow \omega(p) = \omega_p\end{aligned}$$

$d\omega$ es la aplicación

$$p \rightarrow d\omega(p) = (d\omega)_p$$

donde en cada punto $p \in \Omega$,

$$\begin{aligned}(d\omega)_p(v_1, v_2, v_3) &= 3 \text{Ant}(D\omega)(p)(v_1)(v_2, v_3) \\ &= \frac{3}{3!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_3} \text{sgn}(\sigma)(D\omega)(p)(v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{1,2}} \text{sgn}(\sigma)(D\omega)(p)(v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) \\ &= (D\omega)(p)(v_1)(v_2, v_3) - (D\omega)(p)(v_2)(v_1, v_3) + (D\omega)(p)(v_3)(v_1, v_2)\end{aligned}$$

2. Sea un punto $p \in \Omega$ y vamos a calcular $(D(d\omega))(p)$: Suprimimos la referencia al punto p que se sobrentenderá.

$$\begin{aligned}(D(d\omega))(v_0)(v_1, v_2, v_3) &= D\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{1,2}} \text{sgn}(\sigma)(D\omega)(v_0)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)})\right) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{1,2}} \text{sgn}(\sigma)(D^2\omega)(v_0, v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)})\right)\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta el comentario 5.7

3. Pongamos $\lambda = d\omega$ y calculemos $d\lambda(v_0, v_1, v_2, v_3)$. Tenemos

$$\begin{aligned}d\lambda(v_0, v_1, v_2, v_3) &= D\lambda(v_0)(v_1, v_2, v_3) \\ &\quad - D\lambda(v_1)(v_0, v_2, v_3) \\ &\quad + D\lambda(v_2)(v_0, v_1, v_3) \\ &\quad - D\lambda(v_3)(v_0, v_1, v_2)\end{aligned}\tag{8.20}$$

Calculamos cada uno de los sumandos:

■

$$\begin{aligned}D\lambda(v_0)(v_1, v_2, v_3) &= D(d\omega)(v_0)(v_1, v_2, v_3) \\ &= D^2(\omega)(v_0, v_1)(v_2, v_3) \\ &\quad - D^2(\omega)(v_0, v_2)(v_1, v_3) \\ &\quad + D^2(\omega)(v_0, v_3)(v_1, v_2)\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
D\lambda(v_1)(v_0, v_2, v_3) &= D(d\omega)(v_1)(v_0, v_2, v_3) \\
&= D^2(\omega)(v_1, v_0)(v_2, v_3) \\
&\quad - D^2(\omega)(v_1, v_2)(v_0, v_3) \\
&\quad + D^2(\omega)(v_1, v_3)(v_0, v_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\lambda(v_2)(v_0, v_1, v_3) &= D(d\omega)(v_2)(v_0, v_1, v_3) \\
&= D^2(\omega)(v_2, v_0)(v_1, v_3) \\
&\quad - D^2(\omega)(v_2, v_1)(v_0, v_3) \\
&\quad + D^2(\omega)(v_2, v_3)(v_0, v_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\lambda(v_3)(v_0, v_1, v_2) &= D(d\omega)(v_3)(v_0, v_1, v_2) \\
&= D^2(\omega)(v_3, v_0)(v_1, v_2) \\
&\quad - D^2(\omega)(v_3, v_1)(v_0, v_2) \\
&\quad + D^2(\omega)(v_3, v_2)(v_0, v_1)
\end{aligned}$$

Agrupando los sumandos de modo que en cada grupo los 2 últimos argumentos son fijos y teniendo en cuenta los signos en (8.20)

$$\begin{aligned}
d\lambda(v_0, v_1, v_2, v_3) &= d(d\omega)(v_0, v_1, v_2, v_3) \\
&= D^2(\omega)(v_0, v_1)(v_2, v_3) - D^2(\omega)(v_1, v_0)(v_2, v_3) \\
&\quad - D^2(\omega)(v_0, v_2)(v_1, v_3) + D^2(\omega)(v_2, v_0)(v_1, v_3) \\
&\quad + D^2(\omega)(v_0, v_3)(v_1, v_2) - D^2(\omega)(v_3, v_0)(v_1, v_2) \\
&\quad + D^2(\omega)(v_1, v_2)(v_0, v_3) - D^2(\omega)(v_2, v_1)(v_0, v_3) \\
&\quad - D^2(\omega)(v_1, v_3)(v_0, v_2) + D^2(\omega)(v_3, v_1)(v_0, v_2) \\
&\quad + D^2(\omega)(v_2, v_3)(v_1, v_2) - D^2(\omega)(v_3, v_2)(v_1, v_2) = 0
\end{aligned}$$

Cada línea de la expresión anterior es nula debido a la simetría de $D^2(\omega)$

5.9 El operador Laplaciano en coordenadas cartesianas es

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordenadas cilíndricas el tensor métrico es

$$T = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz$$

de donde $E_1 = 1, E_2 = r^2, E_3 = 1$ de modo que

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordenadas esféricas el tensor métrico es

$$T = dr \otimes dr + r^2 \sin^2 \varphi d\theta \otimes d\theta + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

de donde $E_1 = 1, E_2 = r^2 \sin^2 \varphi, E_3 = r^2$ de modo que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \cot \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

5.10 Elegimos f de la forma

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(s, y, z) ds + \int_0^y Q(0, t, z) dt + \int_0^z R(0, 0, u) du$$

En efecto si $d\omega = 0$ como

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial z} \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(s, y, z) ds + Q(0, y, z) \\ &= \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(s, y, z) ds + Q(0, y, z) = Q(x, y, z) - Q(0, y, z) + Q(0, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \int_0^x \frac{\partial P}{\partial z}(s, y, z) ds + \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial z}(0, t, z) dt + R(0, 0, z) \\ &= \int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(s, y, z) ds + \int_0^y \frac{\partial R}{\partial y}(0, t, z) dt + R(0, 0, z) \\ &= R(x, y, z) - R(0, y, z) + R(0, y, z) - R(0, 0, z) + R(0, 0, z) \\ &= R(x, y, z) \end{aligned}$$

5.11

1. Si $\text{rot } V = 0$ tenemos

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{\partial V^1}{\partial y} = 0$$

Al ser un campo plano las otras componentes son necesariamente nulas.

Sea $\omega = V^1 dx + V^2 dy$. Tendremos

$$d\omega = \left(\frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0$$

lo que implica $\omega = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$. Tenemos pues que existe una función φ , llamada función potencial, tal que

$$V^1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

es decir $V = \nabla \varphi$. Si además el fluido es incompresible, es decir $\text{div } V = 0$ entonces

$$\Delta \varphi = \text{div}(\nabla \varphi) = \text{div } V = 0$$

2. Como $V = \nabla \varphi$ se trata de demostrar que $\nabla \varphi$ es un campo perpendicular al campo tangente a la curva $\varphi(x, y) = C \in \mathbb{R}$. Veamos, supongamos el caso no trivial en el que el campo V es no nulo. Sin perder generalidad supongamos que $V^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$. Podemos despejar y de la ecuación $\varphi(x, y) = C$. Pongamos $y = f(x)$ y podemos escribir $\varphi(x, f(x)) = C$. Derivando respecto a la variable x ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f'(x) = 0$$

de modo que

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Un vector tangente a la curva $y = f(x)$ es

$$(1, f'(x))^t = \left(1, -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right)^t$$

y también un vector tangente es $T = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^t$ de donde multiplicando escalarmente

$$(\nabla \varphi, T) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$$

5.12 Procediendo como en el ejercicio anterior supongamos que el campo $V = (V^1, V^2)^t$ no es nulo, suponiendo sin perder generalidad $V^1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ podemos despejar y de la ecuación $\psi(x, y) = C$, sea $y = f(x)$ y escribimos la ecuación de la línea de corriente $\psi(x, f(x)) = C$. Derivando

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} f'(x) = 0$$

de donde

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}$$

Un vector tangente a la curva $y = f(x)$ es

$$(1, f'(x))^t = \left(1, -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}\right)^t$$

y también el múltiplo del vector anterior $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^t = (V^1, V^2)^t$.

Si el campo es irrotacional $\text{rot } V = \frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{\partial V^1}{\partial y} = 0$ de modo que

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi = 0$$

Ejercicios del Capítulo 6

6.1 La frontera de I^2 es

$$\partial I^2 = -I^2_{(1,0)} + I^2_{(1,1)} + I^2_{(2,0)} - I^2_{(2,1)}$$

La fronteras de cada uno de estos 1-cubo singulares son

$$\partial I^2_{(1,0)} = -(I^2_{(1,0)})_{(1,0)} + (I^2_{(1,0)})_{(1,1)}$$

$$\partial I^2_{(1,1)} = -(I^2_{(1,1)})_{(1,0)} + (I^2_{(1,1)})_{(1,1)}$$

$$\partial I^2_{(2,0)} = -(I^2_{(2,0)})_{(1,0)} + (I^2_{(2,0)})_{(1,1)}$$

$$\partial I^2_{(2,1)} = -(I^2_{(2,1)})_{(1,0)} + (I^2_{(2,1)})_{(1,1)}$$

Por ejemplo para el 1-cubo singular $c = I^2_{(1,0)}$ sean $c_{(1,0)}$ y $c_{(1,1)}$ sus dos caras (que son 0-cubos singulares). La frontera de c es

$$\partial c = -c_{(1,0)} + c_{(1,1)}$$

donde $c_{(1,0)} = c \circ I^1_{(1,0)}$ y $c_{(1,1)} = c \circ I^1_{(1,1)}$. Tenemos

$$\begin{aligned} c : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow (0, x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I^1_{(1,0)} : \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ 0 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^1_{(1,1)} : \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ 0 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} c_{(1,0)} : \{0\} &\xrightarrow{I^1_{(1,0)}} \mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbb{R}^2 \\ 0 &\rightarrow 0 \rightarrow (0, 0) \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} c_{(1,1)} : \{0\} &\xrightarrow{I^1_{(1,1)}} \mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbb{R}^2 \\ 0 &\rightarrow 0 \rightarrow (0, 1) \end{aligned}$$

Poniendo $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$, $p_3 = (1, 1)$, $p_4 = (0, 1)$ para $x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$,

$$\partial I_{(1,0)}^2(x) = \partial c(x) = -c_{(1,0)}(x) + c_{(1,1)}(x) = -c \circ I_{(1,0)}^1(x) + c \circ I_{(1,1)}^1(x) = -p_1 + p_4$$

y del mismo modo encontramos para las otras caras de I^2

$$\partial I_{(1,1)}^2 = p_3 - p_2$$

$$\partial I_{(2,0)}^2 = p_2 - p_1$$

$$\partial I_{(2,1)}^2 = p_3 - p_4$$

finalmente

$$\begin{aligned} \partial(\partial I^2)(x) &= -\partial I_{(1,0)}^2 + \partial I_{(1,1)}^2 + \partial I_{(2,0)}^2 - \partial I_{(2,1)}^2 \\ &= p_1 - p_4 + p_3 - p_2 + p_2 - p_1 - p_3 + p_4 = 0 \end{aligned}$$

6.2

1. Observamos

$$\begin{aligned} dx^i(X) &= dx^i\left(\sum_{j=1}^d X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^d X^j dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{j=1}^d X^j \delta_j^i = X^i \end{aligned}$$

$$(X, X) = E_1 dx^1(X) \cdot dx^1(X) + \dots + E_d dx^d(X) \cdot dx^d(X) = E_1 (X^1)^2 + \dots + E_d (X^d)^2$$

de modo que

$$\|X\| = \sqrt{E_1 (X^1)^2 + \dots + E_d (X^d)^2}$$

2. Como $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sqrt{E_i} e_i$, tendremos

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^d \frac{\partial}{\partial x^d} = X^1 \sqrt{E_1} e_1 + \dots + X^d \sqrt{E_d} e_d$$

3. Como las coordenadas de X en la base ortonormal $\{e_i; i = 1, \dots, d\}$ son $\sqrt{E_i} X^i$ tenemos

$$\omega_X = \sqrt{E_1} \sqrt{E_1} X^1 dx^1 + \dots + \sqrt{E_d} \sqrt{E_d} X^d dx^d = E_1 X^1 dx^1 + \dots + E_d X^d dx^d$$

y

$$\omega_X(X) = E_1 X^1 dx^1(X) + \dots + E_d X^d dx^d(X) = E_1 (X^1)^2 + \dots + E_d (X^d)^2 = \|X\|^2$$

6.3 La ecuación de la recta tangente en $c(t_i)$ es

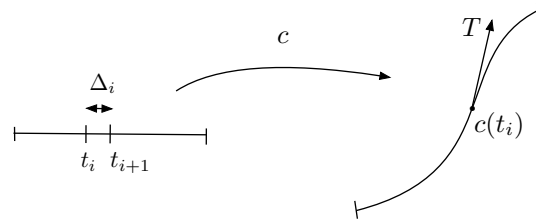


Figura 8.24 Cálculo de la longitud de una curva

$$\begin{bmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1(t_i) \\ \vdots \\ x^d(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (x^1)'(t_i) \\ \vdots \\ (x^d)'(t_i) \end{bmatrix} (t - t_i)$$

El vector tangente en $c(t_i)$ es

$$\begin{bmatrix} x^1(t) - x^1(t_i) \\ \vdots \\ x^d(t) - x^d(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^1)'(t_i) \\ \vdots \\ (x^d)'(t_i) \end{bmatrix} (t - t_i) = T_i(t - t_i)$$

donde T_i es el vector tangente a la curva en el punto $c(t_i)$. La longitud correspondiente a un intervalo $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ medida sobre la recta tangente será

$$\|T_i\| \Delta t_i$$

La longitud aproximada de c entre los puntos $c(0)$ y $c(1)$ será

$$\sum_{i=1}^n \|T_i\| \Delta t_i$$

donde n es el número de subintervalos en los que hemos dividido el intervalo $[0, 1]$. Pasando al límite cuando este número $n \rightarrow \infty$, tenemos $\Delta t_i \rightarrow 0$ y

$$\sum_{i=1}^n \|T_i\| \Delta t_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \|T\| dt$$

6.4

Para el campo tangente unitario τ tenemos $\|\tau\|^2 = E_1(\tau^1)^2 + \dots + E_d(\tau^d)^2 = 1$. Sea $w = \lambda\tau$ cualquier campo tangente y calculemos $\omega_\tau(\lambda\tau)$

$$\omega_\tau(w) = \omega_\tau(\lambda\tau) = \lambda\omega_\tau(\tau) = \lambda\|\tau\|^2 = \lambda$$

Por otra parte tenemos

$$dx^1(\tau) = dx^1(\tau^1 e_1 + \dots + \tau^d e_d) = dx^1\left(\tau^1 \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = \tau^1 \frac{1}{\sqrt{E_1}}$$

de donde

$$\tau^1 = \sqrt{E_1} dx^1(\tau)$$

Entonces para todo campo tangente $w = \lambda \tau$

$$\tau^1 \omega_\tau(w) = \tau^1 \lambda = \lambda \sqrt{E_1} dx^1(\tau) = \sqrt{E_1} dx^1(w)$$

de donde

$$\tau^1 \omega_\tau = \sqrt{E_1} dx^1$$

y para cualquier índice $i = 1, \dots, d$ tendremos

$$\tau^i \omega_\tau = \sqrt{E_i} dx^i$$

En coordenadas cartesianas tenemos

$$\tau^i \omega_\tau = dx^i$$

6.5 La ecuación del plano tangente en $c(u_i, v_i)$ es

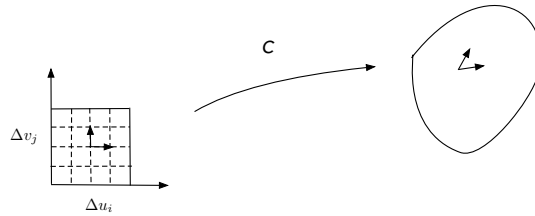


Figura 8.25 Cálculo del área de una superficie

$$\begin{bmatrix} x^1(u, v) \\ x^2(u, v) \\ x^3(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1(u_i, v_j) \\ x^2(u_i, v_j) \\ x^3(u_i, v_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u} & \frac{\partial x^1}{\partial v} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u} & \frac{\partial x^2}{\partial v} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u} & \frac{\partial x^3}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u - u_i \\ v - v_i \end{bmatrix}$$

Los vectores tangentes en (u_i, v_j) correspondientes a los intervalos $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ y $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$ son

$$(T_u)_{(u_i, v_j)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u} \end{bmatrix} \cdot \Delta u_i$$

y

$$(T_v)_{(u_i, v_j)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial v} \\ \frac{\partial x^2}{\partial v} \\ \frac{\partial x^3}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \Delta v_j$$

El área del paralelogramo, imagen sobre el plano tangente del rectángulo $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ es

$$\|(T_u \times T_v)_{(u_i, v_j)}\| \Delta u_i \Delta v_j$$

y el área de la superficie aproximada para $n \times m$ subrectángulos

$$\sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=m} \|(T_u \times T_v)_{(u_i, v_j)}\| \Delta u_i \Delta v_j$$

Pasando al límite cuando $n, m \rightarrow \infty$, tenemos $\Delta u_i \rightarrow 0$ y $\Delta v_j \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=m} \|(T_u \times T_v)_{(u_i, v_j)}\| \Delta u_i \Delta v_j = \int_{[0,1]^2} \|T_u \times T_v\| du dv$$

6.6

Sea $n = n^1 e_1 + n^2 e_2 + n^3 e_3$ el campo normal unitario a la superficie expresado en función de la base ortonormal $\{e_i = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial}{\partial x^i}; i = 1, 2, 3\}$. Tenemos $dx^i(e_i) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}$; $i = 1, 2, 3$ y $dx^i(e_j) = 0$ si $i \neq j$. Si $X = X^1 e_1 + X^2 e_2 + X^3 e_3$ es un campo expresado en la base ortonormal, entonces

$$dx^i(X) = \sum_{j=1}^3 X^j dx^i(e_j) = \frac{X^i}{\sqrt{E_i}}$$

Sean ahora dos campos tangentes A y B cualesquiera y W un campo en \mathbb{R}^3 . Pongamos

$$(W, n) \eta_n(A, B) = (W, n)(n, A \times B)$$

Como $A \times B = \alpha n$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ tendremos

$$(W, n) \eta_n(A, B) = (W, n) \alpha = (W, \alpha n) = (W, A \times B)$$

Tomemos ahora sucesivamente $W = e_i$; $i = 1, 2, 3$ resulta

$$n^1 \eta_n(A, B) = (e_1, A \times B) = \sqrt{E_2 E_3} (dx^2 \wedge dx^3)(A, B)$$

$$n^2 \eta_n(A, B) = (e_2, A \times B) = \sqrt{E_3 E_1} (dx^3 \wedge dx^1)(A, B)$$

$$n^3 \eta_n(A, B) = (e_3, A \times B) = \sqrt{E_1 E_2} (dx^1 \wedge dx^2)(A, B)$$

en efecto tenemos expresando los campos A y B en la base ortonormal $\{e_i; i = 1, 2, 3\}$ si $A = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3$ y $B = B^1 e_1 + B^2 e_2 + B^3 e_3$ y el producto vectorial

$$A \times B = (A^2 B^3 - B^2 A^3)e_1 + (A^3 B^1 - B^3 A^1)e_2 + (A^1 B^2 - B^1 A^2)e_3$$

$$(e_1, A \times B) = A^2 B^3 - B^2 A^3$$

$$(e_2, A \times B) = A^3 B^1 - B^3 A^1$$

$$(e_3, A \times B) = A^1 B^2 - B^1 A^2$$

y por otra parte

$$(dx^2 \wedge dx^3)(A, B) = dx^2(A)dx^3(B) - dx^2(B)dx^3(A) = \frac{A^2}{\sqrt{E_2}} \frac{B^3}{\sqrt{E_3}} - \frac{B^2}{\sqrt{E_2}} \frac{A^3}{\sqrt{E_3}}$$

$$(dx^3 \wedge dx^1)(A, B) = dx^3(A)dx^1(B) - dx^3(B)dx^1(A) = \frac{A^3}{\sqrt{E_3}} \frac{B^1}{\sqrt{E_1}} - \frac{B^3}{\sqrt{E_3}} \frac{A^1}{\sqrt{E_1}}$$

$$(dx^1 \wedge dx^2)(A, B) = dx^1(A)dx^2(B) - dx^1(B)dx^2(A) = \frac{A^1}{\sqrt{E_1}} \frac{B^2}{\sqrt{E_2}} - \frac{B^1}{\sqrt{E_1}} \frac{A^2}{\sqrt{E_2}}$$

de ahí el resultado.

6.7 Trabajaremos con coordenadas cartesianas.

1. Campo normal unitario a la superficie representada por este 2-cubo: Los campos tangentes a la superficie son

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)^t$$

y

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)^t$$

El campo normal a la superficie viene dado por $J = T_u \times T_v$ de modo que $J = (J^1, J^2, J^3)^t$ donde

$$J^1 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$J^2 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$J^3 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Entonces el campo normal unitario a la superficie será

$$n = (n^1, n^2, n^3)^t = \left(\frac{J^1}{\sqrt{(J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2}}, \frac{J^2}{\sqrt{(J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2}}, \frac{J^3}{\sqrt{(J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2}} \right)^t$$

2. El elemento de área es la 2-forma diferencial asociada al campo normal unitario n . En coordenadas cartesianas es

$$dA = n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy$$

El elemento de área en coordenadas $\{u, v\}$ es

$$\|T_u \times T_v\| du \wedge dv = \sqrt{(J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2} du \wedge dv$$

- 3.

$$\begin{aligned} \int_c dA &= \int_c n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy \\ &= \int_{[0,1]^2} c^*(n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy) \\ &= \int_{[0,1]^2} (n^1 \circ c)^* c^*(dy \wedge dz) + (n^2 \circ c)^* c^*(dz \wedge dx) + (n^3 \circ c)^* c^*(dx \wedge dy) \end{aligned}$$

Para cada uno de los términos bajo el signo integral resulta,

$$\begin{aligned} c^*(dy \wedge dz) &= c^* dy \wedge c^* dz \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du \wedge dv \\ &= J^1 du \wedge dv \end{aligned}$$

análogamente,

$$\begin{aligned} c^*(dz \wedge dx) &= J^2 du \wedge dv \\ c^*(dx \wedge dy) &= J^3 du \wedge dv \end{aligned}$$

de modo que el área de la superficie es

$$\begin{aligned} \int_c dA &= \int_{[0,1]^2} (n^1(u,v)J^1 + n^2(u,v)J^2 + n^3(u,v)J^3) du \wedge dv \\ &= \int_{[0,1]^2} (n, J) du \wedge dv = \int_{[0,1]^2} \|J\| du \wedge dv \end{aligned}$$

donde $(n, J) = n^1 J^1 + n^2 J^2 + n^3 J^3$.

6.8

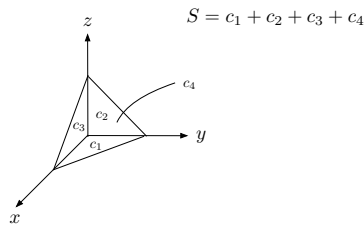
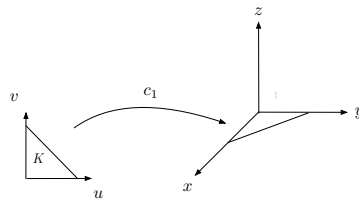


Figura 8.26 Representación de la superficie como una cadena de tres cubos singulares

$$\begin{aligned}
 \int_S (V, n) dA &= \int_S 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\
 &= \int_{c_1} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\
 &\quad + \int_{c_2} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\
 &\quad + \int_{c_3} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\
 &\quad + \int_{c_4} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 : K &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (u, v) &\rightarrow (x = u, y = v, z = 0)
 \end{aligned}$$

y también



$$K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$$

Figura 8.27 cadena c_1

$$\begin{aligned}
 c_2 : K &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (u, v) &\rightarrow (x = 0, y = u, z = v)
 \end{aligned}$$

$$c_3 : K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow (x = v, y = 0, z = u)$$

por lo que

$$\int_{c_1} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy = 0$$

$$\int_{c_2} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy = 0$$

$$\int_{c_3} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy = 0$$

resta finalmente calcular $\int_{c_4} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Tenemos

$$c_4 : K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow (x = u, y = v, z = 1 - u - v)$$

y como

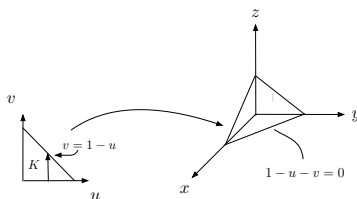


Figura 8.28 cadena c_4

$$c_4^* dy \wedge dz = dv \wedge (-du - dv) = -dv \wedge du = du \wedge dv$$

$$c_4^* dz \wedge dx = (-du - dv) \wedge du = -dv \wedge du = du \wedge dv$$

$$c_4^* dx \wedge dy = du \wedge dv$$

resulta finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_S (V, n) dA &= \int_{c_4} 3x^2 dy \wedge dz + xy dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\
&= \int_K c_4^*(3x^2 dy \wedge dz) + c_4^*(xy dz \wedge dx) + c_4^*(z dy \wedge dx) \\
&= \int_K (3u^2 + uv + (1-u-v)) du \wedge dv = \int_K (1-u-v+uv+3u^2) du dv \\
&= \int_0^1 du \int_0^{1-u} (1-u-v+uv+3u^2) dv = \int_0^1 \left([(1-u+3u^2)v + (u-1)\frac{v^2}{2}]_0^{1-u} \right) du \\
&= \int_0^1 \left((1-u+3u^2)(1-u) + \frac{(u-1)^3}{2} \right) du = \frac{11}{24}
\end{aligned}$$

6.9

1. En coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}
F = \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^t \\
&= (\exp(y) \cos(\pi z), x \exp(y) \cos(\pi z), -\pi x \exp(y) \sin(\pi z))^t
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_c (F, \tau) ds &= \int_c F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz = \int_c df \\
&= \int_{[0, \pi]} c^* df = \int_0^\pi d(f \circ c) = f(c(\pi)) - f(c(0))
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
c(\pi) &= (3 \cos^4 \pi, 5 \sin^7 \pi, 0) = (3, 0, 0) \\
c(0) &= (3 \cos^4 0, 5 \sin^7 0, 0) = (3, 0, 0)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_c (F, \tau) ds = 0$$

6.10 Disponemos el casquete de modo que el centro de la proyección sobre el plano $z = 0$ del círculo base coincida con el origen de coordenadas (véase la figura 8.29). Sea $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ el centro de gravedad que queremos calcular. Teniendo en cuenta la simetría de la figura,

$$\bar{x} = \frac{\int_S x dA}{\int_S dA} = 0$$

e

$$\bar{y} = \frac{\int_S y dA}{\int_S dA} = 0$$

Calculemos \bar{z} . Introducimos la superficie S representando el casquete definida sobre el círculo D de radio a , $D = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2; \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \leq a^2\}$

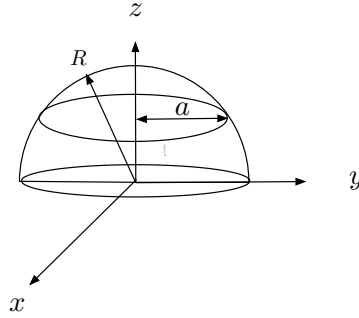


Figura 8.29 Centro de gravedad de un casquete

$$S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow (x = \hat{x}, y = \hat{y}, z = \sqrt{R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2})$$

$$\bar{z} = \frac{\int_S z dA}{\int_S dA} = \frac{\int_D S^*(z dA)}{\int_S dA} = \frac{\int_D (z \circ S) S^* dA}{\int_S dA}$$

El campo normal a la superficie es $n = \frac{1}{R}(x, y, z)^t$ de modo que el elemento de área se escribe $dA = \frac{1}{R}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$. Tendremos

$$\begin{aligned} S^*(dA) &= \frac{1}{R}(\hat{x} d\hat{y} \wedge (\frac{\partial z}{\partial \hat{x}} d\hat{x} + \frac{\partial z}{\partial \hat{y}} d\hat{y})) \\ &\quad + \frac{1}{R}\hat{y}(\frac{\partial z}{\partial \hat{x}} d\hat{x} + \frac{\partial z}{\partial \hat{y}} d\hat{y}) \wedge d\hat{x} + \sqrt{R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2} d\hat{x} \wedge d\hat{y} \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{\hat{x}^2}{\sqrt{R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}} + \frac{\hat{y}^2}{\sqrt{R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}} + \sqrt{R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2} \right) d\hat{x} \wedge d\hat{y} \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}} d\hat{x} \wedge d\hat{y} = \frac{R}{z(\hat{x}, \hat{y})} d\hat{x} \wedge d\hat{y} \end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$\bar{z} = \frac{\int_S z dA}{\int_S dA} = \frac{R \int_D d\hat{x} \wedge d\hat{y}}{\int_S dA}$$

El centro de gravedad viene dado pues por $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ y

$$\bar{z} = \frac{R \times \text{Área del círculo base}}{\text{Área del casquete}}$$

6.11

$$c : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow (x = t, y = a \cosh \frac{t}{a})$$

Tenemos que el centro de gravedad (\bar{x}, \bar{y}) viene dado por

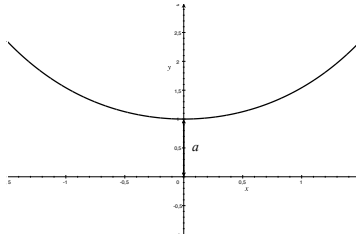


Figura 8.30 Centro de gravedad de una catenaria

$$\bar{x} = \frac{\int_c x ds}{\int_c ds}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_c y ds}{\int_c ds}$$

$\bar{x} = 0$ que se obtiene teniendo en cuenta la simetría. Por otra parte siendo $T = (x'(t), y'(t))^t$ el campo tangente a la curva catenaria c tenemos

$$\begin{aligned} \int_c y ds &= \int_{[-1,1]} (y \circ c) c^* ds = \int_{-1}^1 (y \circ c) \|T\| dt \\ &= \int_{-1}^1 a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)} dt = \int_{-1}^1 a \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) dt \end{aligned}$$

finalmente

$$\bar{y} = \frac{\int_{-1}^1 a \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) dt}{\int_{-1}^1 \cosh\left(\frac{t}{a}\right) dt}$$

Ejercicios del Capítulo 7

7.1

a)

$$I^2_{(1,\alpha)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u \rightarrow (x^1 = \alpha, x^2 = u)$$

$$\int_{I^2_{(1,\alpha)}} f \widehat{dx}^1 \wedge dx^2 = \int_{[0,1]} (I^2(1,\alpha))^* f(x^1, x^2) \widehat{dx}^1 \wedge dx^2$$

$$= \int_{[0,1]} f(\alpha, u) du = \int_{[0,1]} f(\alpha, x^2) dx^2 \int_0^1 dx^1 = \int_{[0,1]^2} f(\alpha, x^2) dx^1 dx^2$$

$$I^2_{(2,\alpha)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u \rightarrow (x^1 = u, x^2 = \alpha)$$

$$\int_{I^2_{(2,\alpha)}} f \widehat{dx}^1 \wedge dx^2 = \int_{[0,1]} (I^2(2,\alpha))^* f(x^1, x^2) \widehat{dx}^1 \wedge dx^2$$

$$= \int_{[0,1]} f(u, \alpha) \cdot 0 = 0$$

pues $dx^2 = 0$.

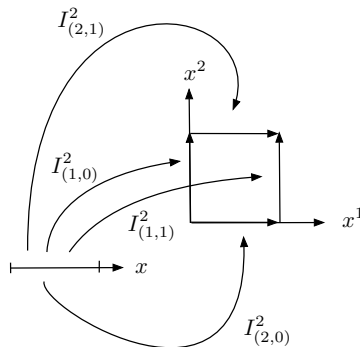


Figura 8.31 Caras del 2-cubo típico.

b) Tenemos

$$I^3_{(3,\alpha)} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u^1, u^2) \rightarrow (x^1 = u^1, x^2 = u^2, x^3 = \alpha)$$

$$\begin{aligned}
\int_{I_{(3,\alpha)}} f(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \widehat{dx^3} &= \int_{[0,1]^2} I_{(3,\alpha)}^* f(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \widehat{dx^3} \\
&= \int_{[0,1]^2} f(u^1, u^2, \alpha) du^1 du^2 = \int_{[0,1]^2} f(x^1, x^2, \alpha) dx^1 dx^2 \\
&= \int_{[0,1]^2} f(x^1, x^2, \alpha) dx^1 dx^2 \int_0^1 dx^3 = \int_{[0,1]^3} f(x^1, x^2, \alpha) dx^1 dx^2 dx^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{(2,\alpha)}^3 : [0,1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u^1, u^2) &\rightarrow (x^1 = u^1, x^2 = \alpha, x^3 = u^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{I_{(2,\alpha)}^3} f dx^1 \wedge \widehat{dx^2} \wedge dx^3 &= \int_{[0,1]^2} I_{(3,\alpha)}^* f(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge \widehat{dx^2} \wedge dx^3 \\
&= \int_{[0,1]^2} f(u^1, \alpha, u^2) du^1 du^2 = \int_{[0,1]^2} f(x^1, \alpha, x^3) dx^1 dx^3 \\
&= \int_{[0,1]^2} f(x^1, \alpha, x^3) dx^1 dx^3 \int_0^1 dx^2 = \int_{[0,1]^3} f(x^1, \alpha, x^3) dx^1 dx^2 dx^3
\end{aligned}$$

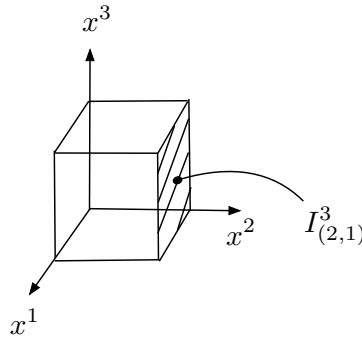


Figura 8.32 Cara (2, 1) del 3-cubo típico.

7.2

a) El teorema de Riemann-Green 7.2 dice

$$\int_{\partial c} \alpha dx + \beta dy = \int_c \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

tomemos $\alpha = -y$ y $\beta = x$, resulta

$$\int_{\partial c} -y dx + x dy = 2 \int_c dx \wedge dy = 2 \text{ \u00e1rea de } c$$

b) Tomando $\alpha = 0$ y $\beta = x$, resulta

$$\int_{\partial c} x dy = \int_c dx \wedge dy = \text{\u00e1rea de } c$$

y tomando $\alpha = -y$ y $\beta = 0$, resulta

$$-\int_{\partial c} y dx = \int_c dx \wedge dy = \text{\u00e1rea de } c$$

Finalmente sumando $\int_{\partial c} x dy$ y $-\int_{\partial c} y dx$ y dividiendo por 2 obtenemos (a).

7.3

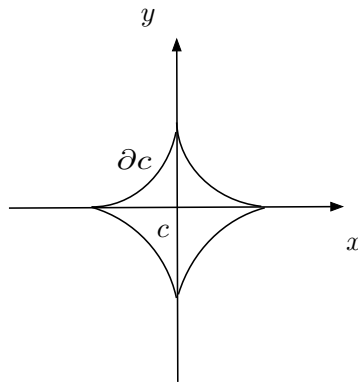


Figura 8.33 hipocicloide

Describimos la regi\u00f3n mediante el 2-cubo singular

$$c : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, u) \longrightarrow (x = ar \cos^3(2\pi u), y = ar \sin^3(2\pi u))$$

La frontera de c es

$$\partial c = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

donde $c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^2$ resultando

$$\partial c = c_{(1,1)}$$

ya que $c_{(2,0)} - c_{(2,1)} = 0$ y $c_{1,0} = 0$ (v\u00e9ase la figura 8.34).

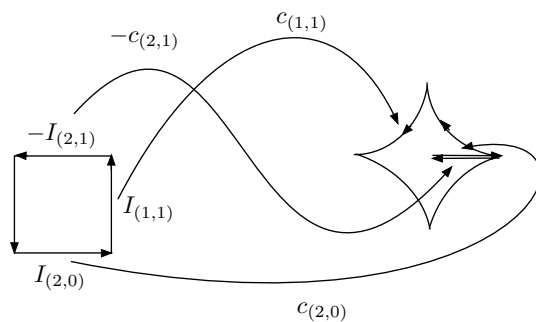


Figura 8.34 frontera del hipocicloide

De modo que

$$\begin{aligned} \partial c : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longrightarrow (x = a \cos^3 2\pi u, y = a \sin^3 2\pi u) \end{aligned}$$

Tendremos

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \int_{\partial c} -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} \left((a \sin^3(2\pi u)) (6\pi a \cos^2(2\pi u) \sin(2\pi u)) + (a \cos^3(2\pi u)) (6\pi a \sin^2(2\pi u) \cos(2\pi u)) \right) du \\ &= 3\pi a^2 \int_0^1 \cos^2(2\pi u) \sin^2(2\pi u) du = \frac{3\pi a^2}{4} \int_0^1 \sin^2(4\pi u) du \\ &= \frac{3\pi a^2}{4} \int_0^1 \frac{1 - \cos(8\pi u)}{2} du = \frac{3\pi a^2}{8} \end{aligned}$$

7.4

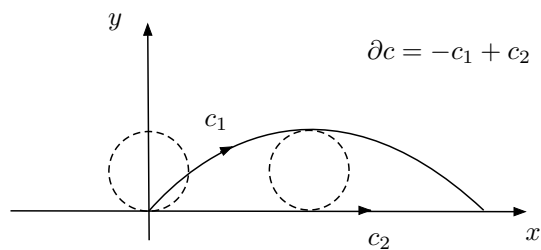


Figura 8.35 arco de cicloide

Claramente $\int_{c_2} x dy = \int_{c_2} y dx = 0$ pues $y = 0$ y $dy = 0$ en c_2 . Tenemos pues que el área según la fórmula del ejercicio 7.2 parte (b) queda reducida a

$$\text{Área} = \int_{-c_1} -y dx = \int_{c_1} y dx$$

o bien

$$\text{Área} = \int_{-c_1} x dy = - \int_{c_1} x dy$$

Ya que

$$\begin{aligned} x &= a(2\pi t - \sin(2\pi t)) \text{ y } dx = a(2\pi - 2\pi \cos(2\pi t)) dt = 2\pi a(1 - \cos(2\pi t)) dt \\ y &= a(1 - \cos(2\pi t)) \text{ y } dy = 2\pi a \sin(2\pi t) dt \end{aligned}$$

Utilizando el cambio $\theta = 2\pi t$

$$\begin{aligned} \int_{c_1} y dx &= 2\pi a^2 \int_0^1 (1 - \cos(2\pi t))^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos \theta + \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \\ &= a^2 \left[\theta - 2\sin \theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned} - \int_{c_1} x dy &= -2\pi a^2 \int_0^1 (2\pi t - \sin(2\pi t)) \sin(2\pi t) dt = -a^2 \int_0^{2\pi} (\theta - \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} (\theta \sin \theta - \sin^2 \theta) d\theta = -a^2 \int_0^{2\pi} \left(\theta \sin \theta - \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \\ &= -a^2 \left([-\theta \cos \theta]_0^{2\pi} + [\sin \theta]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} [\theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \right) \\ &= -a^2 (-2\pi - \pi) = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

7.5

Utilizando el resultado del ejercicio 7.2 tenemos

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \int_{\partial c} (x dy - y dx)$$

Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ resulta

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= r \cos \theta \sin \theta dr + r^2 \cos^2 \theta d\theta - r \sin \theta \cos \theta dr + r^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= r^2 d\theta \end{aligned}$$

Entonces teniendo en cuenta que $\theta = \frac{\pi}{2} t$

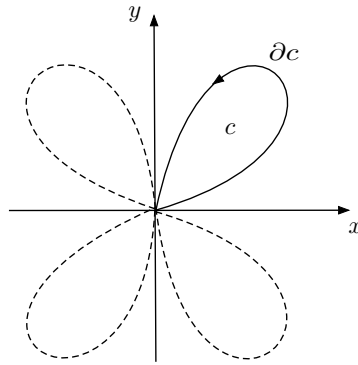


Figura 8.36 Rosa de 4 pétalos

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} (x dy - y dx) &= \int_{\partial c} r^2 d\theta \\ &= \frac{9\pi}{2} \int_0^1 \sin^2 \pi t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta \\ &= 9 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

por lo que el área encerrada por un bucle de la rosa de 4 pétalos es $\frac{9\pi}{8}$

7.6 La superficie se puede describir como la siguiente 2-cadena

$$\begin{aligned} c : [0, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u, v &\longrightarrow (x = 3u \cos(2\pi v), y = 3u \sin(2\pi v), z = 9 - 9u^2) \end{aligned}$$

y su frontera es (véase la figura 8.37)

$$\partial c = -c_{(1,0)} + c_{(1,1)} + c_{(2,0)} - c_{(2,1)} = c_{(1,1)}$$

pues $c_{(1,0)} = (0, 0, 9)$ y $c_{(2,0)} - c_{(2,1)} = 0$

$$\begin{aligned} \partial c : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longrightarrow (x = 3 \cos(2\pi v), y = 3 \sin(2\pi v), z = 0) \end{aligned}$$

Sean ω_F la 1-forma asociada a F y $\eta_{rot F}$ la 2-forma asociada a $rot F$. El teorema del rotacional de Stokes dice

$$\int_{\partial c} \omega_F = \int_c \eta_{rot F}$$

Calculamos

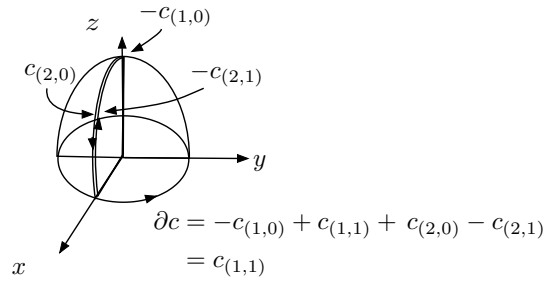


Figura 8.37 Paraboloides y su frontera

$$\int_{\partial c} \omega_F = \int_{[0,1]} (\partial c)^* \omega_F = \int_0^1 (F, T) dv$$

donde T es el campo tangente asociado a la curva ∂c . Tenemos

$$T = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{dv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\pi \sin(2\pi v) \\ +6\pi \cos(2\pi v) \\ 0 \end{bmatrix}$$

y sobre ∂c el campo F es

$$F = \begin{bmatrix} 2z \\ 3x \\ 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \cos(2\pi v) \\ 12 \sin(2\pi v) \end{bmatrix}$$

Entonces $(F, T) = 54\pi \cos^2(2\pi v)$ y

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega_F &= \int_0^1 54\pi \cos^2(2\pi v) dv = 54\pi \int_0^1 \frac{1 + \cos(4\pi v)}{2} dv \\ &= 27\pi \left[v + \frac{\sin(4\pi v)}{4\pi} \right]_0^1 = 27\pi \end{aligned}$$

Por otra parte calculamos

$$\int_c \eta_{rot F} = \int_{[0,1]^2} c^* \eta_{rot F} = \int_{[0,1]^2} (rot F, T_u \times T_v) du dv$$

donde T_u y T_v son los campos tangentes asociados a la superficie c . Tenemos

$$rot F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \\ \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cos(2\pi v) \\ 3 \sin(2\pi v) \\ -18u \end{bmatrix}$$

$$T_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\pi u \sin(2\pi v) \\ +6\pi u \cos(2\pi v) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_u \times T_v = \det \begin{bmatrix} 3 \cos(2\pi v) & -6\pi u \sin(2\pi v) & \frac{\partial}{\partial x} \\ 3 \sin(2\pi v) & +6\pi u \cos(2\pi v) & \frac{\partial}{\partial y} \\ -18u & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108\pi u^2 \cos(2\pi v) \\ 108\pi u^2 \sin(2\pi v) \\ 18\pi u \end{bmatrix}$$

entonces

$$(\text{rot } F, T_u \times T_v) = 432\pi u^2 \cos(2\pi v) + 216\pi u^2 \sin(2\pi v) + 54\pi u$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \int_c \eta_{\text{rot } F} &= \int_{[0,1]^2} (\text{rot } F, T_u \times T_v) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (432\pi u^2 \cos(2\pi v) + 216\pi u^2 \sin(2\pi v) + 54\pi u) \, du \, dv \\ &= 54\pi \int_0^1 u \, du = \frac{54\pi}{2} = 27\pi \end{aligned}$$

7.7

a) Pondremos $S = S_2 - S_1$ donde

$$S_1 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow (x = \cos(2\pi v), y = \sin(2\pi v), z = u)$$

y

$$S_2 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow (x = u \cos(2\pi v), y = u \sin(2\pi v), z = 1 + \sqrt{1 - u^2})$$

La frontera de S_1 es

$$\partial S_1 = -S_1 \circ I_{(1,0)}^2 + S_1 \circ I_{(1,1)}^2 + S_1 \circ I_{(2,0)}^2 - S_1 \circ I_{(2,1)}^2$$

donde

$$S_1 \circ I_{(1,0)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \rightarrow (x = \cos(2\pi v), y = \sin(2\pi v), z = 0)$$

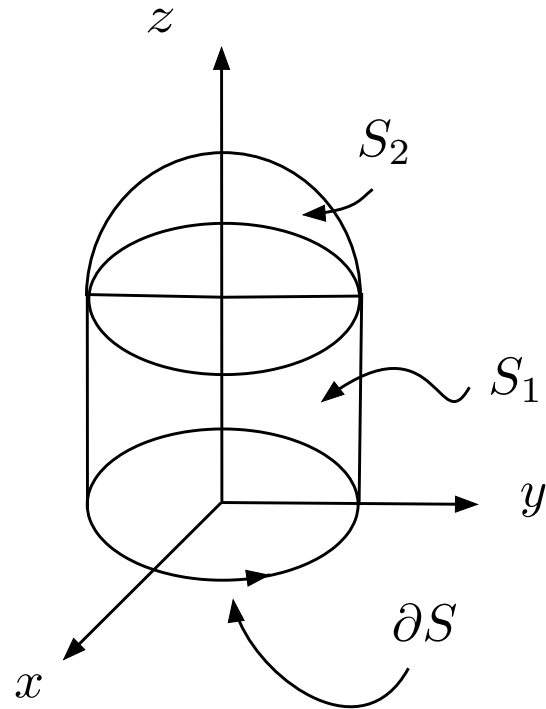


Figura 8.38 Cilindro con cubierta semiesférica

$$S_1 \circ I_{(1,1)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \rightarrow (x = \cos(2\pi v), y = \sin(2\pi v), z = 1)$$

$$S_1 \circ I_{(2,0)}^2 = S_1 \circ I_{(2,1)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \rightarrow (x = 1, y = 0, z = u)$$

por lo tanto $S_1 \circ I_{(2,0)}^2 - S_1 \circ I_{(2,1)}^2 = 0$ y la frontera

$$\partial S_1 = -S_1 \circ I_{(1,0)}^2 + S_1 \circ I_{(1,1)}^2$$

La frontera de S_2 es

$$\partial S_2 = -S_2 \circ I_{(1,0)}^2 + S_2 \circ I_{(1,1)}^2 + S_2 \circ I_{(2,0)}^2 - S_2 \circ I_{(2,1)}^2$$

cuyas caras son

$$S_2 \circ I_{(1,0)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \rightarrow (x = 0, y = 0, z = 2)$$

Por tanto la cara $S_2 \circ I_{(1,0)}^2$ queda reducida al punto $(0, 0, 2)$

$$S_2 \circ I_{(1,1)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \rightarrow (x = \cos(2\pi v), y = \sin(2\pi v), z = 1)$$

$$S_2 \circ I_{(2,0)}^2 = S_2 \circ I_{(2,1)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \rightarrow (x = u, y = 0, z = 1 + \sqrt{1 - u^2})$$

Por tanto

$$\partial S_2 = S_2 \circ I_{(1,1)}^2 + S_2 \circ I_{(1,0)}^2 = S_2 \circ I_{(1,1)}^2 + (0, 0, 2)$$

que a efectos de integración podemos suponer $\partial S_2 = S_2 \circ I_{(1,1)}^2$. Finalmente la frontera ∂S será

$$\partial S = \partial S_2 - \partial S_1$$

$$= S_2 \circ I_{(1,1)}^2 + S_1 \circ I_{(1,0)}^2 - S_1 \circ I_{(1,1)}^2 = S_1 \circ I_{(1,0)}^2$$

puesto que $S_2 \circ I_{(1,1)}^2 = S_1 \circ I_{(1,1)}^2$.

b) Aplicamos el teorema del rotacional de Stokes (véase 7.3 y 7.7)

$$\int_S (\text{rot } F, n) dA = \int_{\partial S} (F, \tau) ds$$

donde τ es el vector tangente unitario a la frontera ∂S y ds es el elemento de longitud.

$$\partial S : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \rightarrow (\cos(2\pi v), \sin(2\pi v), 0)$$

o bien introduciendo la variable $\theta = 2\pi v$

$$\partial S : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

Sobre esta frontera $z = 0$ y por tanto el campo vectorial F es $F = (F^1, F^2, F^3)^t = (x, y, 0)^t$ y $(\partial S)^* F = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^t$. Además $(\partial S)^* dx = -\sin \theta d\theta$ y $(\partial S)^* dy = \cos \theta d\theta$ de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} (F, \tau) ds &= \int_{\partial S} F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz \\
&= \int_{\partial S} x dx + y dy = \int_{[0, 2\pi]} (\partial S)^*(x dx + y dy) \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta = 0
\end{aligned}$$

7.8 Consideremos el volumen c correspondiente a la esfera unidad. Entonces ∂c es la superficie citada y podemos aplicar el teorema de Gauss-Ostrogradski 7.4

$$\int_{\partial c} (F, n) dA = \int_c \operatorname{div} F dV$$

donde dA es el elemento de área y dV designa el elemento de volumen. En coordenadas cartesianas

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} = 2 + 2y + 2z$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} (F, n) dA &= \int_c \operatorname{div} F dV = \int_c (2 + 2y + 2z) dx dy dz \\
&= 2 \int_c dx dy dz + 2 \int_c y dx dy dz + 2 \int_c z dx dy dz = \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

7.9

a) La divergencia de un campo $F = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3$ cuyas componentes están expresadas en la base ortonormal $\{e_i = \frac{1}{E_i} \frac{\partial}{\partial x^i}; i = 1, 2, 3\}$ correspondiente a las coordenadas ortogonales $\{x^1, x^2, x^3\}$ se escribe

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial F^1 \sqrt{E_2 E_3}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2 \sqrt{E_3 E_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3 \sqrt{E_1 E_2}}{\partial x^3} \right)$$

En coordenadas esféricas $E_1 = 1$; $E_2 = r^2 \sin^2 \varphi$; $E_3 = r^2$. Para el campo $F = \frac{1}{r^2} e_r$, tenemos $F^1 = \frac{1}{r^2}$, $F^2 = 0$, $F^3 = 0$. De modo que

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} e_r \right) = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \sin \varphi}{\partial r} = 0$$

para $r \neq 0$

b) Si $(0, 0, 0) \notin c$

$$\int_{\partial c} \frac{(e_r, n)}{r^2} dA = \int_c \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} e_r \right) dV = 0$$

Si $(0, 0, 0) \in c$ pongamos $c_\varepsilon = c - B_\varepsilon$ donde B_ε es la bola de centro $(0, 0, 0)$ y radio ε . Tendremos

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{c_\varepsilon} \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} e_r \right) dV = \int_{\partial c_\varepsilon} \frac{(e_r, n)}{r^2} dA \\
 &= \int_{\partial c} \frac{(e_r, n)}{r^2} dA - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{(e_r, n)}{r^2} dA
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial c} \frac{(e_r, n)}{r^2} dA &= \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{(e_r, n)}{r^2} dA \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} dA = \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 4\pi
 \end{aligned}$$

puesto que sobre ∂B_ε , $e_r = n$ de modo que $(e_r, n) = 1$ y también $r = \varepsilon$.

7.10 Sea η_F la 2-forma asociada a F . Tenemos por el teorema de Gauss-Ostrogradski 7.4

$$\int_{\partial c} \eta_F = \int_c \operatorname{div} F dV$$

donde dV es el elemento de volumen

Trabajando con coordenadas cartesianas: Pasamos $F = r e_r = r \frac{\partial}{\partial r}$ a coordenadas cartesianas poniendo

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$F = r e_r = r \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$$

y la divergencia es

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\int_{\partial c} \eta_F = \int_c \operatorname{div} F dV = \int_c 3 dV = 3 \int_c dV = 3 \text{ volumen de } c$$

Trabajando con coordenadas esféricas: $F = F^1 e_r + F^2 e_\theta + F^3 e_\varphi$ y

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F &= \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (F^1 \sqrt{E_\theta E_\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F^2 \sqrt{E_r E_\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (F^3 \sqrt{E_r E_\theta}) \right) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (F^1 r^2 \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F^2 r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (F^3 r \sin \varphi) \right) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (F^1 r^2 \sin \varphi) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 = \frac{3r^2}{r^2} = 3
\end{aligned}$$

7.11 Primera método: Utilizamos $\partial(\partial c) = 0$ para toda cadena c .
Aplicando el teorema de Stokes en su forma 7.7 tendremos

$$\int_S (\operatorname{rot} F, n) dA = \int_{\partial S} (F, \tau) ds = \int_{\partial(\partial c)} (F, \tau) ds = 0$$

done τ es el campo tangente unitario a ∂S .

Segundo método: Utilizamos $d(d\omega) = 0$ para toda forma ω .
Sea ω_F la 1-forma asociada al campo F ,

$$\omega_F = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$$

entonces para n el campo unitario normal a S

$$d\omega_F = \eta_{\operatorname{rot} F} = (\operatorname{rot} F, n) dA$$

donde $\eta_{\operatorname{rot} F}$ es la 2-forma asociada a $\operatorname{rot} F$. De modo que

$$\int_S (\operatorname{rot} F, n) dA = \int_S d\omega_F = \int_{\partial c} d\omega_F = \int_c d(d\omega_F) = 0$$

7.12

a) Si F es un campo conservativo la circulación de F a lo largo de un camino solo depende de los valores en los puntos extremos del camino. Si el camino es cerrado la circulación será nula.

Sea $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ un punto del dominio Ω donde está definido F . Consideremos un disco D de radio r y centro x_0 en Ω . Si n es el campo normal unitario al disco y τ es el campo tangente unitario a la frontera ∂D del disco

$$\int_D (\operatorname{rot} F, n) dA = \int_{\partial D} (F, \tau) ds = 0$$

pues ∂D es una curva cerrada. Esto es cierto para todo disco $D \in \Omega$, entonces podemos escribir

$$(\operatorname{rot} F, n)(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{A(D)} \int_D (\operatorname{rot} F, n) dA = 0$$

donde $A(D) = \pi r^2$ es el área del disco D . Tomando sucesivamente $n = e_1$, $n = e_2$ y $n = e_3$ los vectores de una base ortonormal tendremos $\text{rot } F(x_0) = 0$. Como x_0 es un punto cualquiera $\text{rot } F = 0$.

Nota: Hemos utilizado la propiedad del cálculo integral siguiente: Sea $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x - x_0\| \leq r\}$ y $f : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces

$$f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x^1, \dots, x^d) dx^1 \dots dx^d$$

donde $V(B_r(x_0))$ es el volumen de $B_r(x_0)$. En efecto, poniendo $m_r(f) = \min_{x \in B_r(x_0)} \{f(x)\}$ y $M_r(f) = \max_{x \in B_r(x_0)} \{f(x)\}$ tenemos

$$m_r(f) \leq f(x_0) \leq M_r(f)$$

por otra parte

$$m_r(f) \leq \frac{1}{V(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f \leq M_r(f)$$

Si la función f es continua al hacer tender $r \rightarrow 0$ tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} m_r(f) = f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} M_r(f)$$

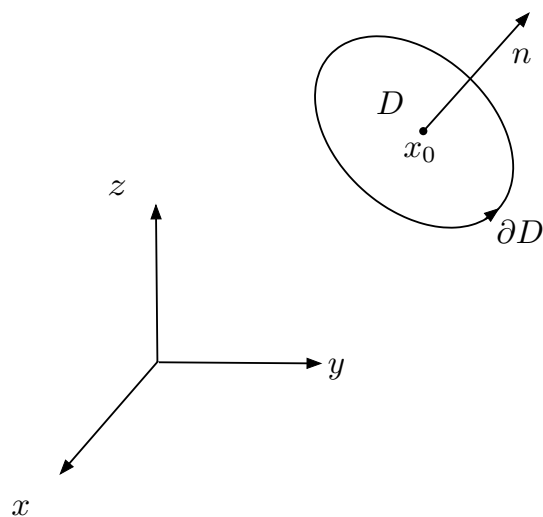
y también

$$\lim_{r \rightarrow 0} m_r(f) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f = \lim_{r \rightarrow 0} M_r(f)$$

por tanto

$$f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f$$

- b) Si F es conservativo, por la parte (a) F es irrotacional, por lo que existe una función φ tal que $F = \nabla\varphi$. Véase el corolario 6.1.

Figura 8.39 Disco en \mathbb{R}^3

Ejercicios del Capítulo 8

8.1

a) Para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_t(x, y) = (x \cos \omega t + y \sin \omega t, -x \sin \omega t + y \cos \omega t)$$

es biyectiva: En efecto, llamemos $\alpha = \omega t$ y supongamos que

$$\phi_t(x_1, y_1) = \phi_t(x_2, y_2)$$

es decir

$$(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) = (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha, -x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha)$$

lo que implica

$$\begin{aligned} x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha &= x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha \\ -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha &= -x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

la solución de este sistema (tomando como incógnitas x_1 e y_1) es $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$ siempre que el determinante del sistema de ecuaciones sea distinto de cero, lo que siempre ocurre pues

$$\det \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Para hallar ϕ_t^{-1} pongamos $\phi_t(x, y) = (u, v)$:

$$\begin{aligned}x \cos \alpha + y \sin \alpha &= u \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha &= v\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}x &= \det \begin{bmatrix} u & \sin \alpha \\ v & \cos \alpha \end{bmatrix} = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ y &= \det \begin{bmatrix} \cos \alpha & u \\ -\sin \alpha & v \end{bmatrix} = v \cos \alpha + u \sin \alpha\end{aligned}$$

entonces

$$\phi_t^{-1}(u, v) = (u \cos \alpha - v \sin \alpha, v \cos \alpha + u \sin \alpha)$$

b) Tenemos que demostrar que $\phi_{t+s}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$. Para $p = (x, y)$

$$\phi_{t+s}(p) = (x \cos(\omega(t+s)) + y \sin \omega(t+s), -x \sin \omega(t+s) + y \cos \omega(t+s))$$

como

$$\cos(\omega t + \omega s) = \cos \omega t \cos \omega s - \sin \omega t \sin \omega s$$

y

$$\sin(\omega t + \omega s) = \sin \omega t \cos \omega s + \sin \omega s \cos \omega t$$

de modo que

$$\begin{aligned}\phi_{t+s}(p) &= (x \cos \omega t \cos \omega s - x \sin \omega t \sin \omega s + y \sin \omega t \cos \omega s + y \sin \omega s \cos \omega t, \\ &\quad -x \sin \omega t \cos \omega s - x \sin \omega s \cos \omega t + y \cos \omega t \cos \omega s - y \sin \omega t \sin \omega s)\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\phi_s(\phi_t(p)) &= \phi_s(x \cos \omega t + y \sin \omega t, -x \sin \omega t + y \cos \omega t) \\ &= ((x \cos \omega t + y \sin \omega t) \cos \omega s + (-x \sin \omega t + y \cos \omega t) \sin \omega s, \\ &\quad (-x \cos \omega t - y \sin \omega t) \sin \omega s + (-x \sin \omega t + y \cos \omega t) \cos \omega s) \\ &= (x \cos \omega t \cos \omega s - x \sin \omega t \sin \omega s + y \sin \omega t \cos \omega s + y \cos \omega t \sin \omega s, \\ &\quad -x \cos \omega t \sin \omega s - x \sin \omega t \cos \omega s - y \sin \omega t \sin \omega s + y \cos \omega t \cos \omega s)\end{aligned}$$

8.2 Llamemos V al campo tangente asociado a ϕ . Si $\{x, y\}$ son coordenadas cartesianas se tendrá

$$V = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

Hallemos a y b .

$$\begin{aligned}a &= \frac{d\phi^1}{dt} = -\omega x \sin \omega t + \omega y \cos \omega t \\ b &= \frac{d\phi^2}{dt} = -\omega x \cos \omega t - \omega y \sin \omega t\end{aligned}$$

Ahora el punto p corresponde al valor $t = 0$, de donde $a(p) = \omega y(p)$ y $b(p) = -\omega x(p)$

$$V_p = \omega y(p) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p - \omega x(p) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p$$

es decir

$$V = \omega y \frac{\partial}{\partial x} - \omega x \frac{\partial}{\partial y}$$

8.3

- a) Sean las aplicaciones $\phi : U(p) \rightarrow U(q)$ y $\psi : U(q) \rightarrow U(r)$ difeomorfismos definidos en un entorno $U(p)$ y en un entorno $U(q)$ respectivamente con $q = \phi(p)$ y $r = \psi(q)$. Y sean $\phi_* : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_q$ y $\psi_* : \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_r$. Sea $\psi \circ \phi : U(p) \rightarrow U(r)$. Tenemos $(\psi \circ \phi)_* : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_r$. Se verifica

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$

En efecto, dado un vector $X_p \in \mathcal{T}_p$ para toda función $f \in \mathcal{F}_r$

$$(\psi \circ \phi)_* X_p(f) = X_p(f \circ \psi \circ \phi) = \phi_* X_p(f \circ \psi) = \psi_* \circ \phi_* X_p(f)$$

- b) Sea la aplicación $\phi : U(p) \rightarrow U(q)$ y su aplicación inversa $\phi^{-1} : U(q) \rightarrow U(p)$. Se tiene $\phi_* : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_q$ y $(\phi^{-1})_* : \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_p$. Como

$$\phi^{-1} \circ \phi = Id : U(p) \rightarrow U(p)$$

y

$$\phi \circ \phi^{-1} = Id : U(q) \rightarrow U(q)$$

de modo que

$$(\phi^{-1} \circ \phi)_* = Id : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_p$$

y

$$(\phi \circ \phi^{-1})_* = Id : \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_q$$

de donde finalmente

$$(\phi^{-1})_* \circ \phi_* = \phi_* \circ (\phi^{-1})_* = Id$$

es decir

$$(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$$

- c) Sean $\phi : U(p) \rightarrow U(q)$ y $\psi : U(q) \rightarrow U(r)$ como en el punto (a), para las aplicaciones “pull-back” entre los respectivos espacios de vectores tangentes tenemos

$$(\psi \circ \phi)^* = ((\psi \circ \phi)^{-1})_* = (\phi^{-1} \circ \psi^{-1})_* = \phi_*^{-1} \circ \psi_*^{-1} = \phi^* \circ \psi^*$$

- d) Con las notaciones del punto anterior eligiendo $\psi = \phi^{-1}$ tendremos $(\phi \circ \phi^{-1})^* = Id$ de donde

$$(\phi^{-1})^* \circ \phi^* = Id$$

y finalmente

$$(\phi^{-1})^* = (\phi^*)^{-1}$$

- e) Con la notaciones del apartado (a) consideramos las aplicaciones “push-forward” entre tensores

$$\phi_* : \Lambda_k(\mathcal{T}_p) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_q)$$

$$\psi_* : \Lambda_k(\mathcal{T}_q) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_r)$$

y sea $\omega_p \in \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$, tendremos

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)_* \omega_p((X_1)_r, \dots, (X_k)_r) &= \omega_p((\psi \circ \phi)^*(X_1)_r, \dots, (\psi \circ \phi)^*(X_k)_r) \\ &= \omega_p(\phi^* \circ \psi^*(X_1)_r, \dots, \phi^* \circ \psi^*(X_k)_r) = \phi_* \omega_p(\psi^*(X_1)_r, \dots, \psi^*(X_k)_r) \\ &= (\psi_* \circ \phi_*) \omega_p((X_1)_r, \dots, (X_k)_r) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$(\psi \circ \phi)_* = (\psi_* \circ \phi_*)$$

para las aplicaciones “push-forward” entre tensores.

- f) Para la aplicación “push-forward” entre espacios de tensores $(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$. En efecto, como $\phi^{-1} \circ \phi = Id : U(p) \rightarrow U(p)$ tendremos

$$(\phi^{-1} \circ \phi)_* = Id : \Lambda_k(\mathcal{T}_p) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{T}_p)$$

por la propiedad e)

$$(\phi^{-1} \circ \phi)_* = (\phi^{-1})_* \circ \phi_* = Id$$

de donde

$$(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$$

8.4

Para todo $p \in \Omega$ si f es una función en Ω y $T : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_k^l(\mathcal{T}_p)$ un campo tensorial k veces covariante y l veces contravariante

$$(L_X f T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(f T)_q - (f T)_p}{t}$$

como

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_t^*(fT)_q(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p)) - (fT)_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p))}{t} \\
&= \frac{(fT)_q((\phi_t)_*X_1(p), \dots, (\phi_t)_*X_k(p), (\phi_t)_*\omega^1(p), \dots, (\phi_t)_*\omega^l(p)) - (fT)_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p))}{t} \\
&= \frac{f(q)T_q((\phi_t)_*X_1(p), \dots, (\phi_t)_*X_k(p), (\phi_t)_*\omega^1(p), \dots, (\phi_t)_*\omega^l(p)) - f(p)T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p))}{t} \\
&= f(q) \frac{T_q((\phi_t)_*X_1(p), \dots, (\phi_t)_*X_k(p), (\phi_t)_*\omega^1(p), \dots, (\phi_t)_*\omega^l(p)) - T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p))}{t} \\
&+ \frac{f(q) - f(p)}{t} T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p)) \\
&= f(q) \frac{\phi_t^* T_q(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p)) - T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p))}{t} \\
&+ \frac{f(q) - f(p)}{t} T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega^1(p), \dots, \omega^l(p))
\end{aligned}$$

pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos

$$(L_X fT)_p = f(p)(L_X T)_p + (L_X f)_p T_p$$

8.5 La definición de derivada de Lie es

$$L_X Y_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* Y_{\phi_t(p)} - Y_p}{t} \quad (8.21)$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi : I_\delta \times U &\rightarrow \mathbb{R}^d \\
t, p &\rightarrow \phi(t, p) = (\phi_t^1(p) = x^1(t), \dots, \phi_t^d(p) = x^d(t))
\end{aligned}$$

es el grupo local uniparamétrico de transformaciones asociado al campo X definido en un entorno $U(p) \in \Omega$ de p . El campo asociado X viene dado por

$$X = \sum_{i=1}^d w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

donde las componentes w^i están relacionadas con el grupo uniparamétrico ϕ mediante la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = w^i(x^1(t), \dots, x^d(t)) \quad (8.22)$$

$$x^i(0) = x_0^i \quad (8.23)$$

donde $p = (x^1(0), \dots, x^d(0))$.

Podemos escribir 8.21 de la forma

$$(L_X Y)_p = \frac{d}{dt} (\phi_t^* Y_{\phi_t(p)})|_{t=0}$$

Sea $q = \phi_t(p) = (\phi_t^1(p), \dots, \phi_t^d(p))$. Vamos a calcular $(\phi_t^* Y)_p = \phi_t^* Y_q = (\phi_{-t})_* Y_q \in \mathcal{T}_p$. Sea

$$Y = \sum_{i=1}^d v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y

$$(\phi_{-t})_* Y = \sum_{i=1}^d \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

En el punto p

$$((\phi_{-t})_* Y)_p = \sum_{i=1}^d \tilde{v}^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}^i(p) &= (\phi_t^* Y)_p(x^i) = \left((\phi_{-t})_* Y_q \right)(x^i) \\ &= Y_q(x^i \circ \phi_{-t}) = \sum_j v^j(q) \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j}(q) \end{aligned}$$

donde hemos escrito abusando de la notación $x^i \circ \phi_{-t}^i = \phi_{-t}^i$. De modo que podemos escribir

$$\phi_t^* Y = (\phi_{-t})_* Y = \sum_{i,j} v^j \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Tendremos pues

$$\left. \frac{d}{dt} (\phi_t^* Y_{\phi_t(p)}) \right|_{t=0} = \sum_{i,j} \frac{d}{dt} \left(v^j \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j} \right) (\phi_t(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

Calculamos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(v^j \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{dv^j}{dt} \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j} + v^j \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j} \end{aligned}$$

Observando $v^j(\phi_t(p)) = v^j(x^1(t), \dots, x^d(t))$ siendo $x^1(t), \dots, x^d(t)$ la solución del problema (8.22-8.23)

$$\begin{aligned} \frac{dv^j}{dt} &= \sum_{k=1}^d \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \end{aligned}$$

En $t = 0$, $\phi_{-t}^i = \phi_t^i = x^i$ de modo que $\left. \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j} \right|_{t=0} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$ resultando

$$\left. \frac{dv^j}{dt} \frac{\partial \phi_{-t}^i}{\partial x^j} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \delta_j^i = \sum_{k=1}^d w^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k}$$

Por otra parte

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{d\phi_{-t}^i}{dt} = -\frac{\partial w^i}{\partial x^j}$$

Reuniendo los resultados anteriores

$$L_X Y = \sum_{k=1}^d (w^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - v^k \frac{\partial w^i}{\partial x^k}) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

es decir

$$(L_X Y)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f)$$

8.6 Sean X un campo vectorial en un abierto Ω de \mathbb{R}^d y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Expresamos el campo X en coordenadas

$$X = \sum_{i=1}^d v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Sea ϕ_t el flujo asociado a X , en un punto fijo x se expresa

$$\frac{d\phi_t^i}{dt}(x) = v^i(\phi_t(x)) \quad i = 1, \dots, d$$

(como en la ecuación $x = \phi_0(x)$ es fijo podemos poner también $\frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^i}(x) = v^i(\phi_t(x))$) Para $x \in \Omega$ escribimos $g(t, x) = \phi_t^* f(x) = f(\phi_t(x))$. Su diferencial (con respecto a las variables espaciales) es

$$dg = \sum_{j=1}^d \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^j$$

de modo que podemos poner, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} dg(x) &= d(\phi_t^* f)(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \phi_t)(x) dx^j \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j}(x) dx^j(x) \end{aligned}$$

- Derivamos respecto a t la diferencial dg : Calculamos el coeficiente de dx^j correspondiente a $\frac{d}{dt} d(\phi_t^* f)$. Para ello calcularemos la derivada respecto a t del coeficiente de dx^j :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j}(x)$$

El cálculo es,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j}(x) \\ &= \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t^k}{\partial t}(x) \frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j}(x) \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$+ \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(x) \quad (8.25)$$

donde hemos utilizado la ecuación del flujo y la igualdad de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$$

- Calculamos el coeficiente de dx^j correspondiente a $d\left(\frac{d}{dt}\phi_t^*f\right)$: Tenemos

$$\left(\frac{d}{dt}\phi_t^*f\right)(x) = \frac{d}{dt}f(\phi_t(x)) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t^i}{\partial t}(x)$$

Utilizando la ecuación del flujo

$$\frac{\partial \phi_t^i}{\partial t}(x) = \frac{d\phi_t^i}{dt}(x) = v^i(\phi_t(x)) \quad i = 1, \dots, d$$

resulta

$$\left(\frac{d}{dt}\phi_t^*f\right)(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) v^i(\phi_t(x))$$

ahora derivamos respecto a x^j

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) v^i(\phi_t(x)) \right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) v^i(\phi_t(x)) \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t^k}{\partial x^j}(x) v^i(\phi_t(x)) \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$+ \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_t(x)) \frac{\partial v^i}{\partial x^k}(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t^k}{\partial x^j}(x) \quad (8.27)$$

Las expresiones (8.24) y (8.26) son iguales pues

$$\sum_{i,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial \phi_t^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j} = \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \cdot \frac{\partial \phi_t^i}{\partial x^j} v^k$$

ya que los índices k e i son mudos y se pueden intercambiar y por la ecuación del flujo $v^k = \frac{\partial \phi_t^k}{\partial t}$.

Por otra parte las expresiones (8.25) y (8.27) son iguales ya que basta tener en cuenta la ecuación del flujo y derivarla respecto a x^j , en efecto si derivamos con respecto a x^j la ecuación del flujo

$$\frac{d\phi_t^i}{dt} = v^i \quad i = 1, \dots, d$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{d\phi_t^i}{dt} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial \phi_t^k}{\partial x^j}$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial \phi_t^k}{\partial x^j}$$

Hemos demostrado que el coeficiente de x^j es el mismo en $\frac{d}{dt} d(\phi_t^* f)$ y en $d \frac{d}{dt} (\phi_t^* f)$ por lo tanto coinciden.

8.6

- a) Si φ es continua en $Q \times I$ es uniformemente continua pues $Q \times I$ es un conjunto compacto en \mathbb{R}^{d+1} . Tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, para todo $x \in Q$ y para todo $t \in I$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(x, t+h) - \varphi(x, t)\| \leq \varepsilon$ para todo $|h| < \delta$. Resulta que la función

$$\psi(t) = \int_Q \varphi(x, t) dx$$

existe, pues la función $x \in Q \rightarrow \varphi(x, t)$ es continua en Q , por lo que es integrable y se verifica

$$\begin{aligned} |\psi(t+h) - \psi(t)| &= \left| \int_Q (\varphi(x, t+h) - \varphi(x, t)) dx \right| \\ &\leq \int_Q \|\varphi(x, t+h) - \varphi(x, t)\| dx \leq \varepsilon \cdot V(Q) \end{aligned}$$

donde $V(Q)$ es el volumen de Q . Esto prueba que $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

- b) Supongamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} : Q \times I \rightarrow \mathbb{R}$ existe y es continua. Esto quiere decir, aplicando la parte (a) del ejercicio que $\int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx$ existe y es continua. Queremos demostrar que

$$\frac{d\psi}{dt} = \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx$$

En efecto podemos escribir, utilizando la definición de derivada parcial, para todo $\varepsilon > 0$, para todo $x \in Q$ y para todo $t \in I$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$\left\| \frac{\varphi(x, t+h) - \varphi(x, t)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right\| \leq \varepsilon$$

Poniendo

$$\lambda(t) = \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx$$

tendremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h} - \lambda(t) \right| &= \left| \int_Q \left(\frac{\varphi(x, t+h) - \varphi(x, t)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right) dx \right| \\ &\leq \int_Q \left\| \frac{\varphi(x, t+h) - \varphi(x, t)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right\| dx \leq \varepsilon V(Q) \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = \lambda(t) = \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx$$

Referencias

1. S.K. Berberian, Introducción al espacio de Hilbert, Ed. Teide, (1970)
2. H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Theorie et applications, Ed. Masson, (1983)
3. Henri Cartan, Cours de Calcul Différentiel, Ed. Hermann, (1977)
4. Noel J. Hicks, Notas sobre geometría diferencial, Ed Hispano Europea, (1974)
5. Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba, Cálculo Vectorial, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, (1987)
6. Michael Spivak, Cálculo en variedades, Ed. Reverté, (1970)