



Principios de Mecánica.



Fernando Atrio-Barandela.

Física Teórica. Departamento de Física Fundamental.

Facultad de Ciencias. Universidad de Salamanca.

Plaza de la Merced s/n; 37008 Salamanca, Spain.

phn: ++34 923 294 437; fax: ++34 923 294 584

eml: atrio@usal.es, <http://web.usal.es/~atrio>





Indice.

1. Introducción. Análisis Dimensional.
2. Álgebra Vectorial.
3. Cinemática.
4. Leyes de Newton. Fuerzas
5. Fuerzas Conservativas. Trabajo y Energía
6. Movimiento armónico.
7. Sólido Rígido.



Bibliografía.

♠ Básicos:

- ◊ "Mecánica". M. Alonso & E.J. Finn. Fondo Educativo Interamericano (1970).
- ◊ "The Feynman Lectures on Physics". R.P. Feynman. Addison-Wesley (1966).
- ◊ "Physics". P.A. Typler. Freeman (1992).
- ◊ "Mecánica Newtoniana". A.P. French. Reverté (1978).
- ◊ "Física". Halliday & Resnick. J. Wiley (1966).
- ◊ "Problemas de Física General". F.J. Bueche. McGraw Hill (Serie Schaun, 1986).

♠ Avanzados:

- ◊ "Classical Mechanics. Point Particles & Relativity". Greiner. Springer Verlag (2004).
- ◊ "Mecánica". Symon. Reverté (1970).

♠ Complementarios:

- ◊ "Evolución de los Conceptos de la Física". A.B. Arons. Editorial Trillos (Méjico 1970).
- ◊ "La estructura de las revoluciones científicas". T.S. Kuhn. Fondo de Cultura Económica.



Preliminares Matemáticos.



Indice.

- 1. Sistemas de ecuaciones algebraicas.**
- 2. Series.**
- 3. Teorema de Taylor.**
- 4. Integrales indefinidas.**



Sistemas de ecuaciones algebraicas.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



Series.

♠ Serie Aritmética: $a_n = a_o + nd$. Suma de una serie aritmética:

$$\sum_{i=0}^N a_i = \frac{N}{2}(a_1 + a_N) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + a)}{2}$$

♠ Serie Geométrica: $a_n = a_o q^n$. Suma de una serie geométrica:

$$\sum_{i=0}^N a_i = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$$



Funciones

♠ Funciones Hiperbólicas:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

♠ y sus inversas:

$$\text{arsinh}x = \ln(x + \sqrt{[x^2 + 1]}); \quad \text{arcosh}x = \ln(x + \sqrt{[x^2 - 1]})$$



Teorema de Taylor

Teorema: Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$f(x) = f(x_o) + \frac{1}{1!}f'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2!}f''(x_o)(x - x_o)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_o)(x - x_o)^3 + \dots$$

Ejemplos de series de Taylor entorno a $x_o = 0$:

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$



Integrales indefinidas.

potencias	$\int x^n = (n + 1)^{-1}x^{n+1} \quad n \neq 1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x $
exponenciales	$\int e^x = e^x$	$\int a^x = \frac{a^x}{(\ln a)}$
trigonometricas	$\int \sin x dx = -\cos x$ $\int \sinh x dx = \cosh x$ $\int \tan x dx = -\ln \cos x $	$\int \cos x dx = \sin x$ $\int \cosh x dx = \sinh x$ $\int \tanh x dx = -\ln \cosh x$
racionales	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = a^{-1} \operatorname{arctanh}(x/a) \quad a \neq 0$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = a^{-1} \operatorname{arctanh}(x/a) \quad x < a$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$
irracionales	$\int \sqrt{a^2 + x^2} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ $\int \sqrt{a^2 - x^2} = \arcsin(x/a) \quad x < a$	$\int \sqrt{x^2 - a^2} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$



Problema I.

Calcular el desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor del punto x_o :

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 6 \quad (x_o = 1); \quad f(x) = \cos x \quad (x_o = 0); \quad f(x) = \tan x \quad (x_o = 0)$$

♠ Debemos calcular las diversas derivadas:

$$P(1) = 8; \quad P'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 2; \quad P'(1) = 11 \quad P''(x) = 12x^2 + 18x \quad P''(1) = 30;$$

$$P^{(3)}(x) = 24x + 18 \quad P^{(3)}(1) = 42; \quad P^{(4)}(x) = 24; \quad P^{(4)}(1) = 24$$

$$P(x) = 8 + 11(x - 1) + 15(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3 + (x - 1)^4$$

$$f(0) = 1; \quad f'(x) = -\sin x; \quad f'(0) = 0; \quad f''(x) = -\cos x \quad f''(0) = -1;$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x; \quad f^{(3)}(0) = 0; \quad f^{(4)}(x) = \cos x \quad f^{(4)}(0) = 1$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$f(x) = \tan x = x + \dots$$



Problema II.

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \cos^3 x dx; \quad \int \frac{e^x dx}{1 - e^x} dx; \quad \int \frac{dx}{x(1 + x^3)}; \quad \int \frac{dx}{\cosh ax}$$

♠ Resultados:

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\int \frac{e^x dx}{1 - e^x} = \int \frac{d(e^x)}{1 - e^x} = -\log(1 - e^x) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(1 + x^3)} = \int \frac{x^2 dx}{x^3(1 + x^3)} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u(1 + u)} = \frac{1}{3} \left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{1 + u} \right) = \frac{1}{3} (\ln(x^3) - \ln(1 + x^3)) + C$$

donde hemos efectuado y deshecho el cambio de variable $u = x^3$

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{de^x}{e^{2x} + 1} = 2 \arctan e^x + C$$