Geometría del Plano.

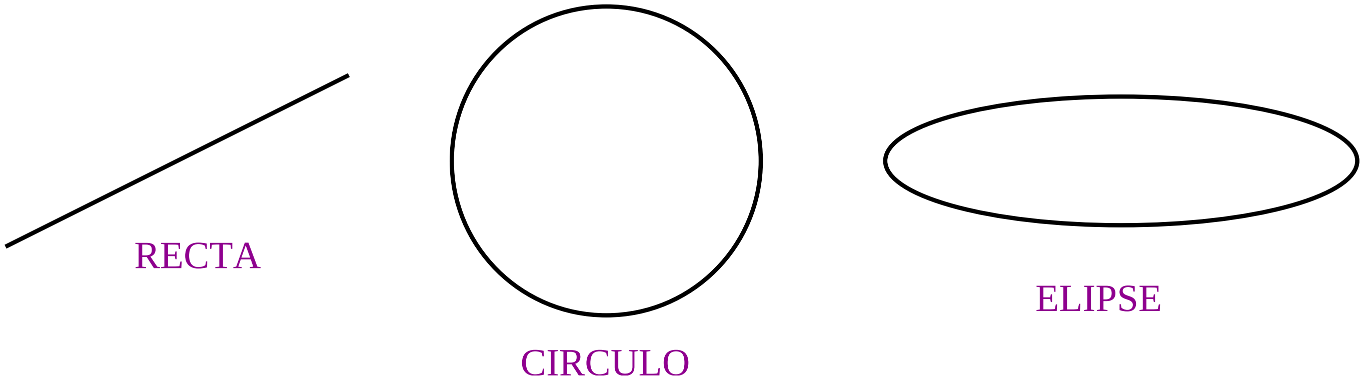
Indice.

Líneas y Curvas.

♣ Línea: es cualquier sucesión contínua de puntos.

♣ Recta: línea que no cambia de dirección; también es la línea que une dos puntos con la mínima distancia.

♣ Curva: cualquier línea no recta, abierta o cerrada. Suelen definirse por alguna propiedad. Por ejemplo, en la circunferencia, todos los puntos equidistan del centro.

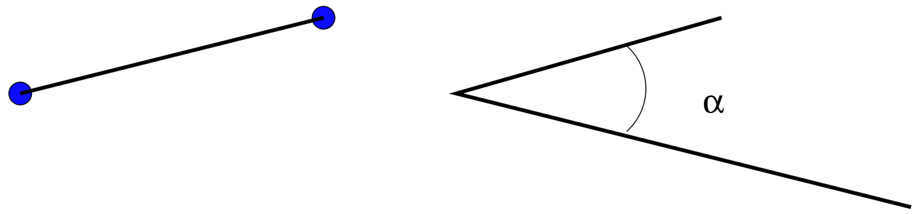


Ángulos en el plano.

♣ Segmento: es la línea que sigue el camino más corto uniendo dos puntos cualesquiera en el plano. Esos puntos definen el extremo del segmento.

♣ Ángulo: Cuando dos segmentos comparten un extremo, definen un ángulo. Representa el cambio de dirección exisente entre los dos segmentos. El extremo compartido se llama <u>Vértice</u>.

♣ Un ángulo depende de la abertura que existe entre dos segmentos, y no de la longitud de ellos. Por tanto, suelen definirse ángulos para dos segmentos iguales de longitud unidad.



Medida de un ángulo.

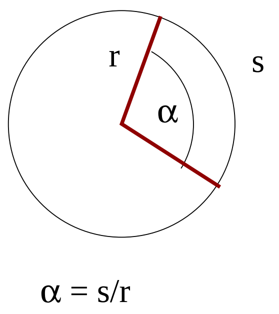
◇ La medida de un ángulo es la razón entre la longitud de los segmentos que lo definen y la longitud del arco de circunferencia que encierran. Así definido, la unidad de medida es el RADIAN.

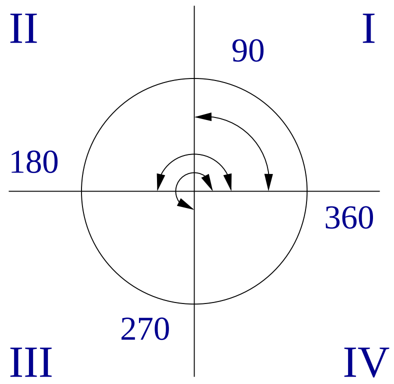
$$\alpha = s/r \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \in (0, 2\pi)$$

◇ La circunfenrencia define en el plano CUATRO CUADRANTES.
◇ Grado sexagesimal: sistema de unidades en las que el ángulo encerrado por la circunferencia completa es 360^o.

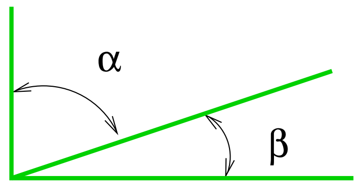
Midiendo EN RADIANES el ángulo α y conocido el radio r podemos obtener el arco s:

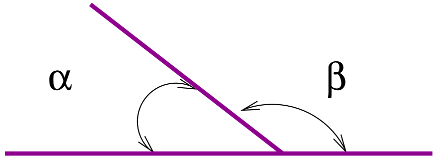
$$s = r\alpha$$

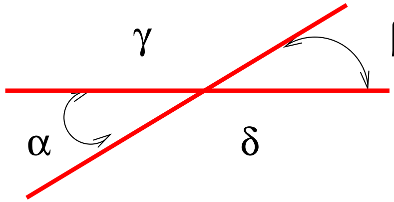


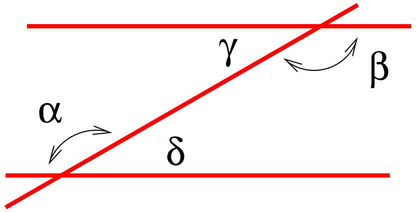


Tipos de Ángulos.









⊙ Complementarios; si suman 90^o:

$$\alpha + \beta = 90^o$$

.

⊙ Suplementarios; si suman 180^o:

$$\alpha + \beta = 180^o$$

.

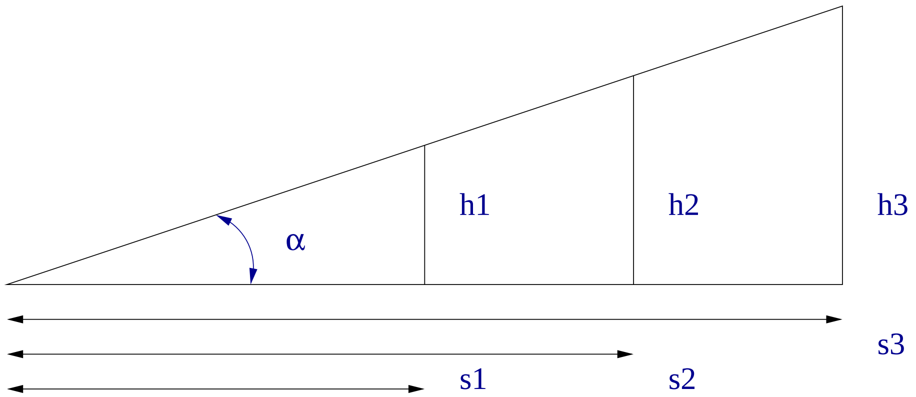
⊙ Opuestos por el vértice; si están comprendidos entre dos rectas que se cortan: $\alpha = \beta$; $\gamma = \delta$.

⊙ Alternos; formados por el corte de una recta con dos rectas paralelas: $\alpha = \beta$; $\gamma = \delta$.

Teorema de Tales.

◇ En general, es bastante incómodo medir un ángulo utilizando la definición: casi nunca podemos medir la longitud de la circunferencia comprendida entre dos segmentos iguales.

◇ Dado un triángulo rectángulo, el teorema de Tales establece que la RAZON ENTRE LOS CATETOS ES INDEPENDIENTE DE LA LONGITUD DE LA HIPOTENUSA.

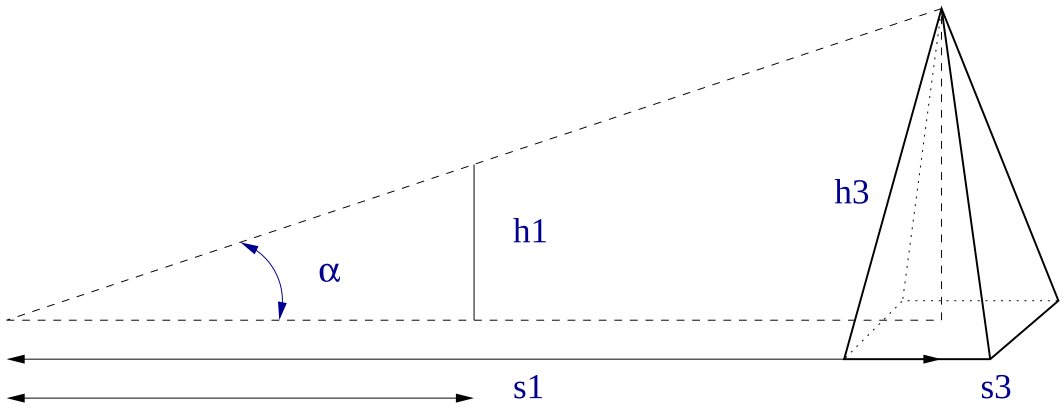


$$\tan\alpha = \frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2} = \frac{h_3}{s_3}$$

◇ Tenemos una idea intuitiva de tangente cuando hablamos de pendiente de una cuesta. Una pendiente del 7% corresponde a un ángulo de tangente $\tan\alpha = 7/100 = 0.07$.

Medida de la Altura de una Pirámide.

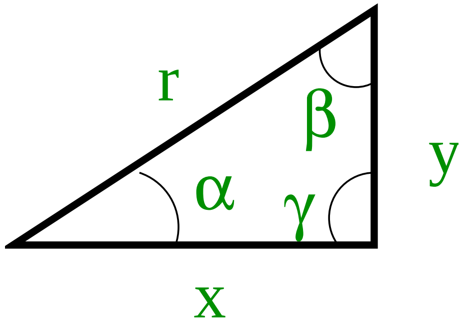
⊙ Tales utilizó su teorema para medir la altura de la Pirámide de Gizeh. Situaba un palo perpendicularmente al suelo, de forma que, visto desde el suelo el extremo del palo coincidiese con el vértice de la pirámide. A continuación medía la distancia al palo y la distancia a la base de la pirámide. Como la longitud del palo era conocida, de su teorema podía deducir la altura de la pirámide.



$$h_3 = \frac{h_1}{s_1} s_3$$

Teorema de Pitágoras.

♠ Triángulo rectángulo: es un triángulo en los que uno de sus ángulos es un ángulo recto, $\gamma = 90^o$. Los lados que definen el ángulo recto se denominan catetos y el otro lado hipotenusa.



♠ El teorema de Pitágoras establece una relación entre los lados del triángulo rectángulo:

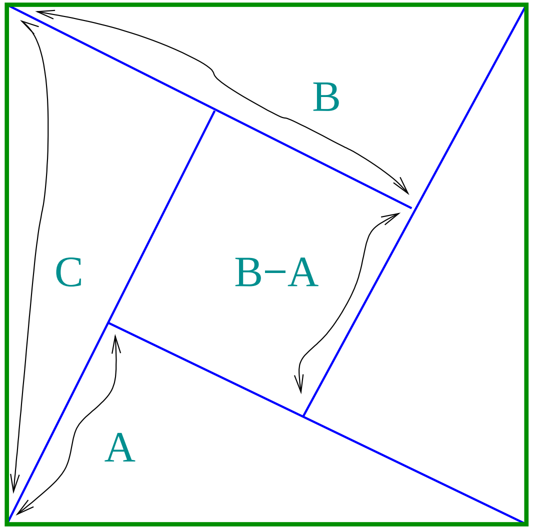
$$x^2 + y^2 = r^2$$

♠ Los ángulos de un triángulo cualquiera verifican siempre la siguiente regla:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

.

Demostración del Teorema de Pitágoras.

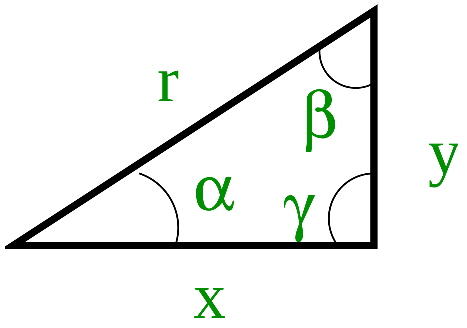


Utilizando la figura podemos demostrar el teorema de Pitágoras: (a) cada triángulo tiene de área $AB/2$, y hay cuatro (b) el cuadrado central tiene de área $(B-A)^2$ y (c) el cuadrado exterior tiene de área C^2. En consecuencia:

$$C^2 = 2BA + (B-A)^2 = 2BA + B^2 - 2BA + A^2 = B^2 + A^2;$$

lo que demuestra el teorema.

La Tangente de ángulos complementarios.



La definición de tangente es:

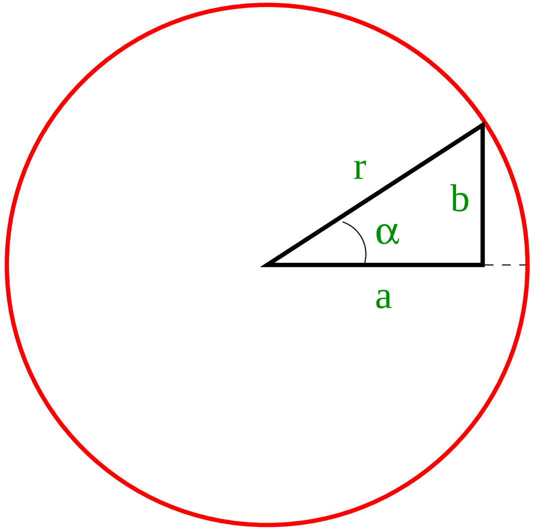
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \tan\beta = \frac{x}{y}$$

Por tanto:

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{yx}{xy} = 1$$

Dado que $\gamma = 90^o$, entonces $\alpha + \beta = 90^o$, es decir, la tangente de ángulos complementarios son inversas la una de la otra.

Trigonometría.



Junto a la tangente, se pueden definir otras funciones trigonométricas:

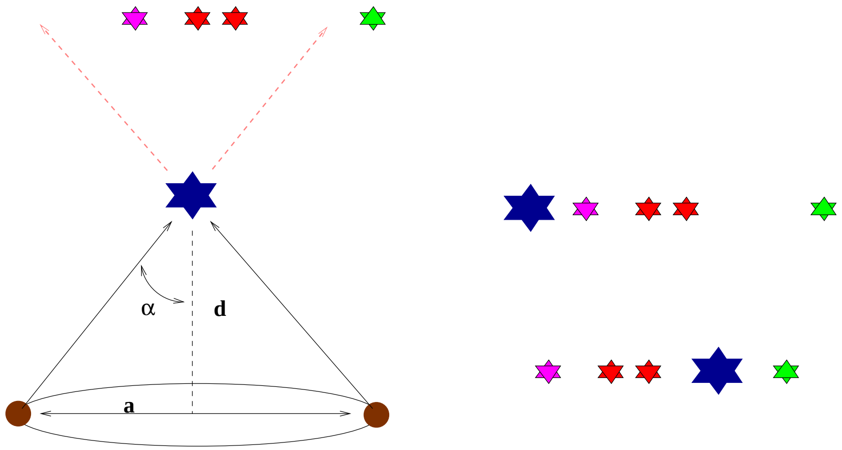
$$\sin\alpha = \frac{b}{r}; \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r}$$

El teorema de Pitágoras permite escribir:

$$a^2 + b^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

♠ Cuando se definen ángulos, los lados del segmento que definen el ángulo se consideran de longitud unidad: $r = 1$.

Paralaje.



Si una estrella cercana se desplaza con respecto al fondo de estrellas mucho más alejada, podemos medir su distancia como:

$$\tan\alpha = \frac{a}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{a}{\tan\alpha}$$

Una estrella se dice que está a una distancia de un parsec si $\alpha = 1''$ de arco cuando la medimos desde dos puntos diametralmente opuestos de la órbita de la tierra.

Las funciones trigonométricas y sus inversas.

• La importancia de las funciones trigonométricas es que nos permiten conocer los ángulos. Si determinamos el seno y el coseno de un ángulo, determinamos el ángulo. Si solo tenemos una función, el seno, el coseno o la tangente, tienen que decirnos en qué cuadrante está el ángulo.

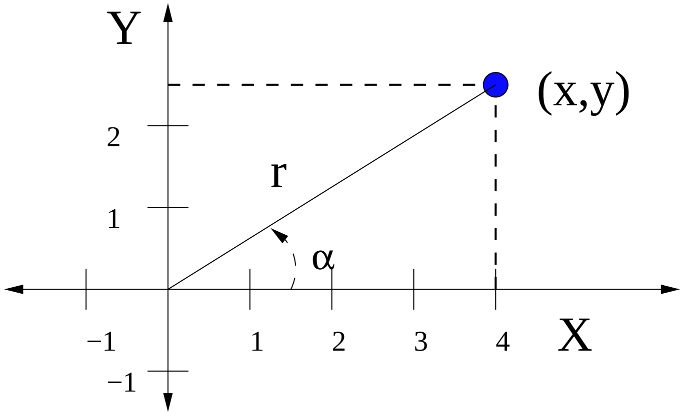
• Las funciones inversas son: **arco-seno, arco-coseno, arco-tangente**.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x\\ \sin\alpha = y\\ \tan\alpha = z\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} arccos(x) = \alpha\\ arcsin(y) = \alpha\\ arctan(z) = \alpha\end{array}\right.$$

• Estas funciones deben obtenerse utilizando calculadora o mediante tablas. No se pueden calcular con operaciones sencillas.

Sistemas de Coordenadas.

♠ Para representar curvas en el plano introducimos un sistema de ejes (X,Y), esto es, dos rectas perpediculares que se cortan en un punto denominado ORIGEN del sistema de coordenadas.

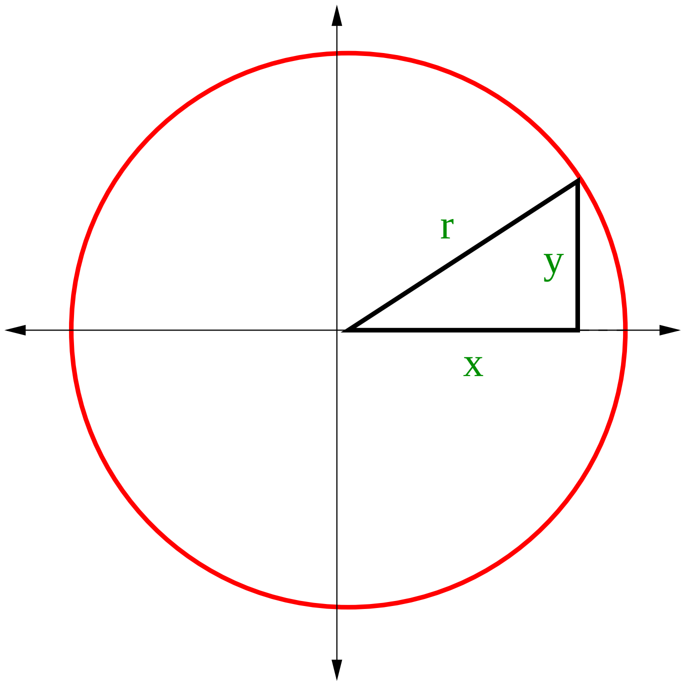


♠ A cada punto le hacemos corresponder un par de numeros. En el sistema de coordenadas **Cartesiano** es la distancia más corta a cada uno de los ejes (x,y). En el sistema de coordenadas **Polares** es la distancia más corta al origen de coordenadas y el ángulo que forma con el eje X: (r, α).

♠ Los ejes tienen una parte positiva y otra negativa.

La Circunferencia.

♣ Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado CENTRO.



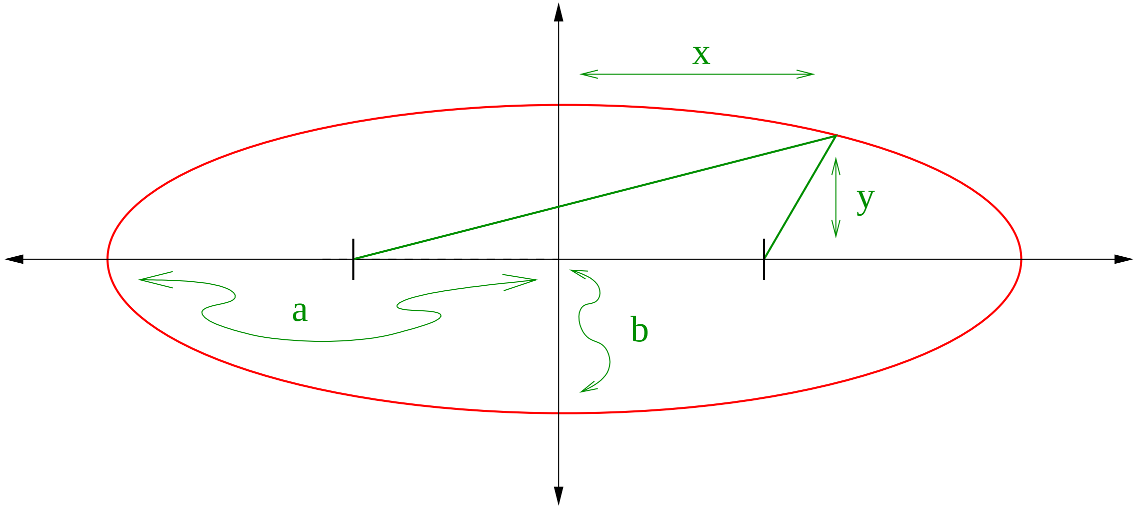
♣ Sea (x, y) las coordenadas de un punto sobre la circunferencia. Las distancias x, y definen los catetos de un triángulo rectángulo. Si r es la hipotenusa, por el TEOREMA DE PITAGORAS se deduce:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es la ecuación de la circunferencia.

La Elipse.

♣ Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados FOCOS) es constante.



La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

♣ 1^a Ley de Kepler: Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el SOL ocupando uno de los focos.

Problemas.

• Un triángulo equilátero es el que tiene todos sus lados (y ángulos) iguales. Calcular sus ángulos, y su seno, coseno y tangente.

• Un lápiz de longitud 20cm está colocado verticalmente, y proyecta una sombra de 25cm. Calcular la altura del sol (ángulo que forma el sol con el plano del horizonte) en ese momento.

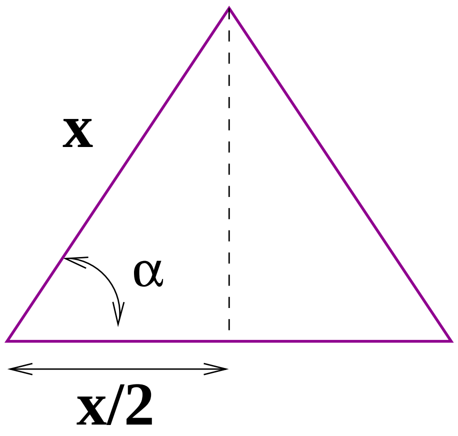
• Con una cuerda de 12m formamos un triángulo de lados 3m, 4m y 5m. Probar que dicho triángulo es un triángulo rectángulo. NOTA: Con la ayuda de este triángulo egipcios y babilionios construían las bases cuadradas para levantar sus edificios.

• Encontrar la relación entre el seno y el coseno de dos ángulos COMPLEMENTARIOS. Lo mismo pero para dos ángulos SUPLEMENTARIOS.

• En un sistema de coordenadas cartesiano, encontrar la distancia del punto (2,1) al origen de coordenadas. Encontrar el ángulo que forma con el eje. Encontrar la distancia del mismo punto al punto (4,2).

Solución Problema I.

• Un triángulo equilátero es el que tiene todos sus lados (y ángulos) iguales. Calcular sus ángulos, y su seno, coseno y tangente.



Dado que todos los ángulos son iguales:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha = 180^o \quad \Rightarrow \alpha = 180^o/3 = 60^o.$$

De las definiciones:

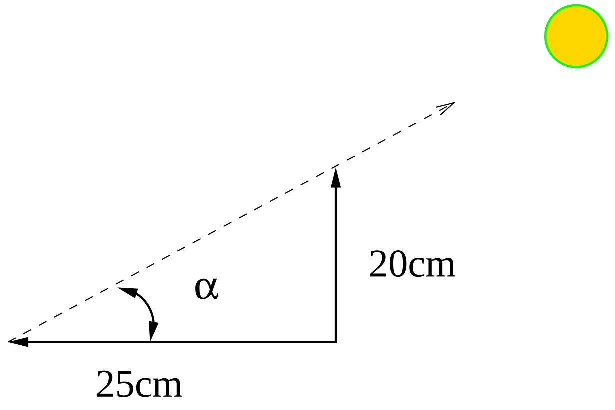
$$\cos\alpha = \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}; \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, la tangente:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Solución Problema II.

- Un lápiz de longitud 20cm está colocado verticalmente, y proyecta una sombra de 25cm. Calcular la altura del sol (ángulo que forma el sol con el plano del horizonte) en ese momento.



Con los datos que nos dan, podemos calcular la tangente del ángulo α:

$$\tan\alpha = \frac{20cm}{25cm} = 0.8$$

Utilizamos la calculadora para encontrar el ángulo α usando la función arco-tangente:

$$\alpha = arc\tan(0.8) = 0.675rad = 38.66^o = 38^o39'36''$$

Solución Problema III.

• Con una cuerda de 12m formamos un triángulo de lados 3m, 4m y 5m. Probar que dicho triángulo es un triángulo rectángulo. NOTA: Con la ayuda de este triángulo egipcios y babilionios construían las bases cuadradas para levantar sus edificios.

Es muy sencillo, basta mostrar que esos números verifican el teorema de Pitágoras.

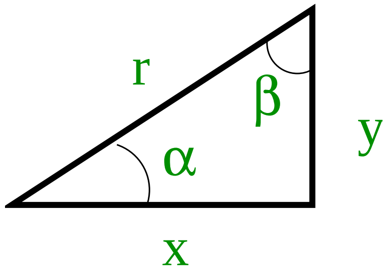
Dado que $5m$ es el lado mayor, debería ser la hipotenusa, y los otros dos los catetos. Así:

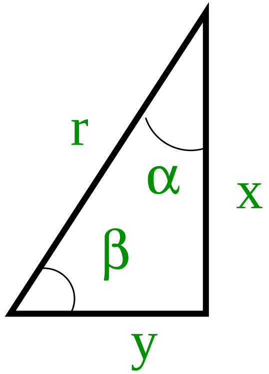
$$5^2 = 25; \quad 3^2 + 4^2 = 25 \qquad \Rightarrow \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

Como se verifica el teorema de Pitágoras, el triángulo de lados $3, 4, 5$ metros es un triángulo rectángulo.

Solución Problema IVa.

- Encontrar la relación entre el seno y el coseno de dos ángulos complementarios.



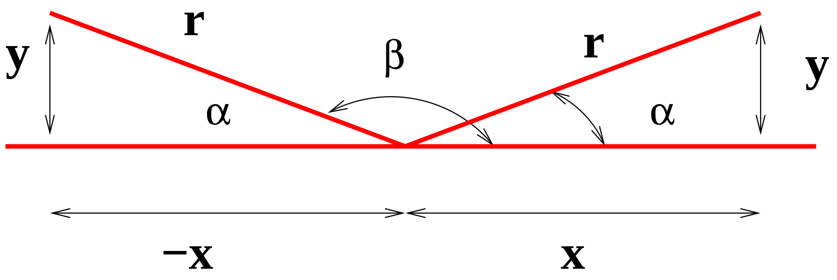


α y β son complementarios. De la definición:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = x/r \\ \\ \sin\alpha = y/r \\ \\ \cos\beta = y/r \\ \\ \sin\beta = x/r \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \cos\alpha = \sin\beta \\ \sin\alpha = \cos\beta \end{array}$$

Solución Problema IVb.

- Encontrar la relación entre el seno y el coseno de dos ángulos suplementarios.

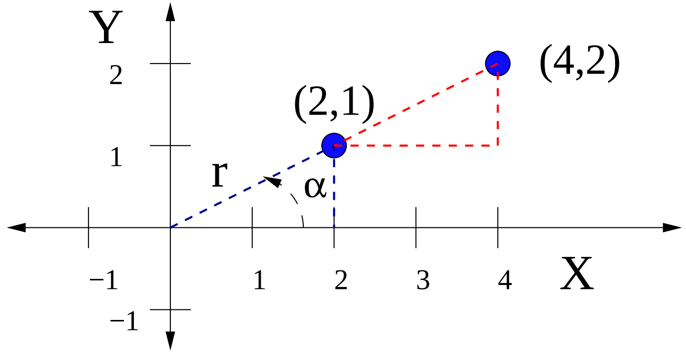


En la figura, α y β son suplementarios:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{x}{r} \\ \sin\alpha = \frac{y}{r} \\ \sin\beta = \frac{y}{r} \\ \cos\beta = -\frac{x}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin\alpha = \sin\beta \\ \cos\alpha = -\cos\beta \end{array}$$

Solución Problema V.

• En un sistema de coordenadas cartesiano, encontrar la distancia del punto (2,1) al origen de coordenadas. Encontrar el ángulo que forma con el eje. Encontrar la distancia del mismo punto al punto (4,2).

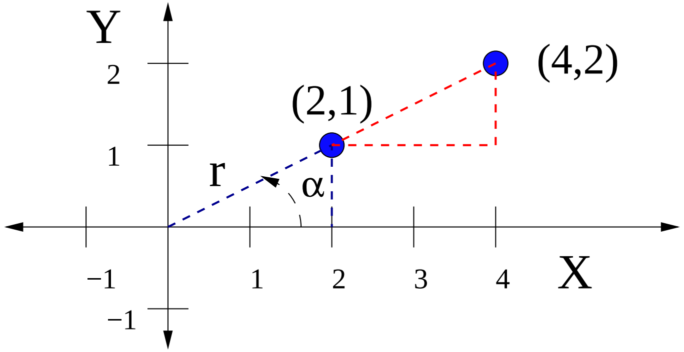


Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo azul:

$$r^2 = 2^2 + 1^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{5} = 2.236$$

El ángulo podemos encontrarlo como:

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(0.5) = 0.463648\ rad = 26.5651^o = 26^o\ 33'\ 54.36''$$



Para encontrar la distancia entre los puntos (2,1) y (4,2) volvemos a aplicar el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (4-2)^2 + (2-1)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{5} = 2.236$$