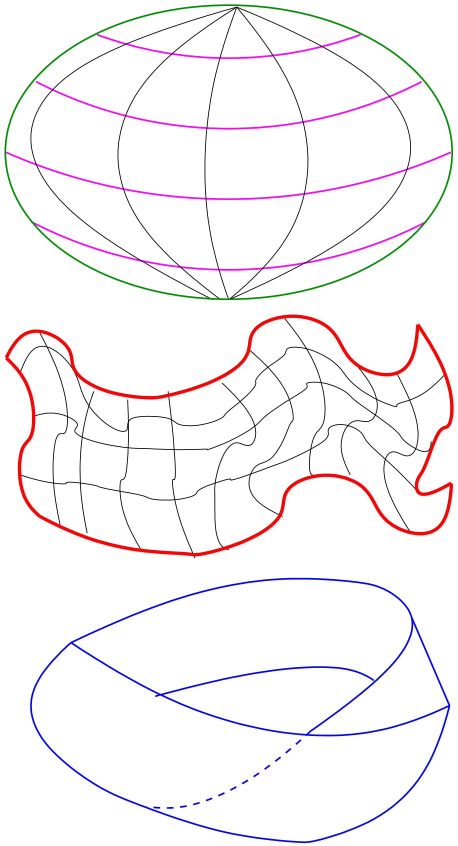
Geometría del Espacio.

Índice.

1. Superficies.
2. El espacio euclídeo tridimensional. Coordenadas Cartesianas.
3. Distancia entre dos puntos.
4. La Esfera y sus curvas geodésicas.
5. Meridianos y Paralelos.
6. Coordenadas Esféricas.
7. Trigonometría Esférica.
8. Fórmulas que resuelven el triángulo esférico.
9. Problemas.

Superficies.



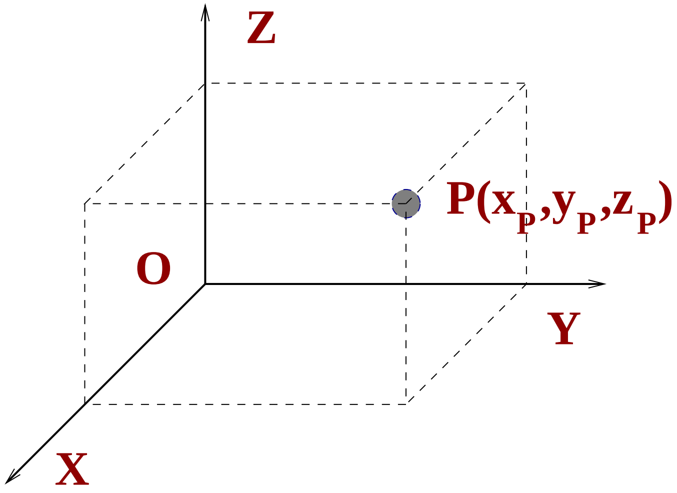
• Superficie: región del espacio definida por el movimiento de una línea. Ejemplo: El PLANO.

• Superficies abiertas si tienen al menos un borde; cerradas si encierran un volumen.

• Superficies abiertas orientable si tienen dos caras; no-orientables si tienen una sola cara.

• En una superficie bastan DOS COORDENADAS INTRINSECAS para especificar la posición de un punto. Sin embargo, si la superficie está incluida en un espacio, necesitaríamos TRES COORDENADAS EXTRINSECAS referidos a tres ejes distintos, cada uno referido a cada dirección en el espacio.

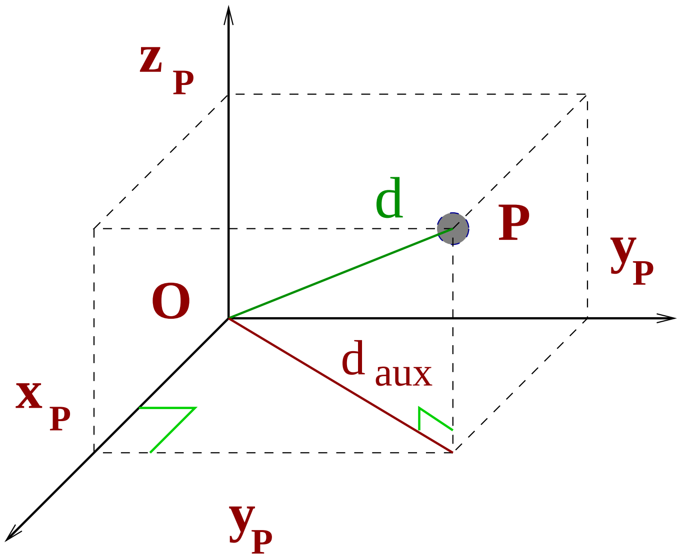
El espacio euclídeo tridimensional. Coordenadas Cartesianas.



♠ Para fijar la posición de un punto en el espacio necesitamos especificar su posición con respecto a otro punto fijo **O**, que llamamos **ORIGEN**. Para ello consideramos tres rectas perpendiculares $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ que pasan por el origen, denominadas **EJES DE COORDENADAS**. El espacio así definido se denomina **ESPACIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL**.
Los Planos definidos por los ejes se denominan **XY (Plano Fundamental), XZ, YZ**.

♠ A cada punto **P** del espacio le hacemos corresponder sus **COORDENADAS CARTESIANAS** asignandole tres números $(\mathbf{x_P}, \mathbf{y_P}, \mathbf{z_P})$. Estos tres números son la longitud de los lados del cuadrado definido por **O** y **P**. La diagonal del cuadrado que une el origen **O** con el punto **P** se denomina **VECTOR DE POSICION**.

Distancia entre dos puntos.



En coordenadas cartesianas es muy cómodo encontrar la distancia de un punto al origen de coordenadas, utilizando el teorema de Pitágoras: (x_P, y_P, d_{aux}) y (d_{aux}, z_P, d) forman dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{aligned} d_{aux}^2 &= x_P^2 + y_P^2 \\ d^2 &= z_P^2 + d_{aux}^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad d^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2$$

Esto es, la distancia al cuadrado es la suma de las coordenadas cartesianas al cuadrado.

La Esfera y sus curvas geodésicas.

◇ Una esfera es la superficie generada por la revolución de una semicircunferencia. Ejemplo: Si giramos un meridiano alrededor del eje de rotacion de la tierra, generamos la superficie de la tierra.

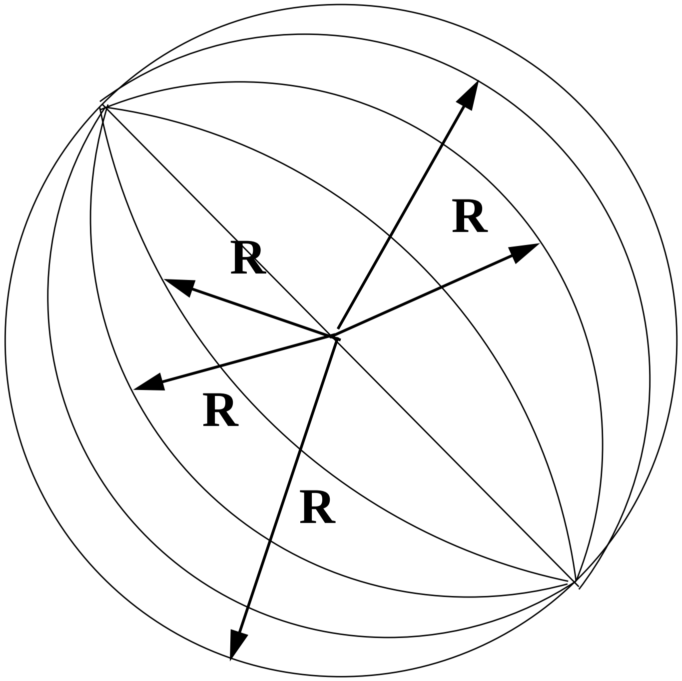
◇ Una esfera puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de uno dado llamado CENTRO. La distancia se llama RADIO de la esfera. Si (x, y, z) es un punto de una esfera con centro el origen de coordenadas y radio R, la ecuación de esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

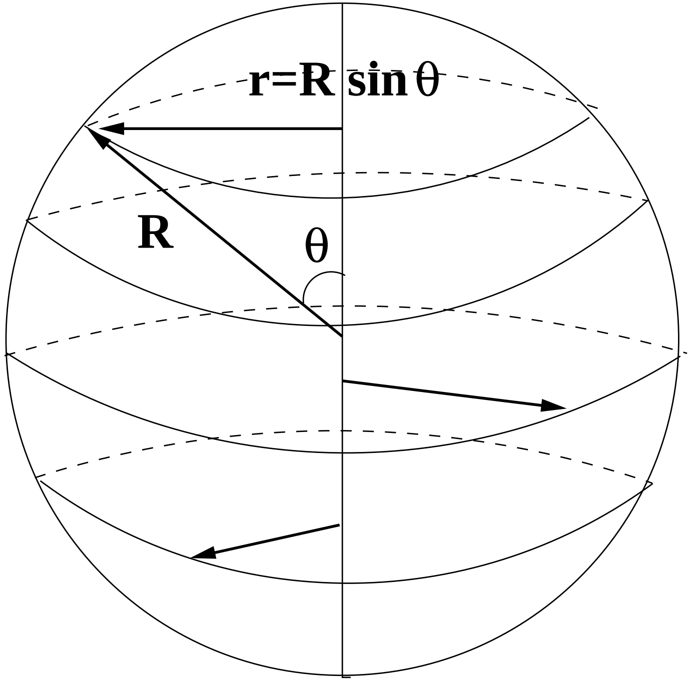
◇ Nos plantemos ahora el siguiente problema: dados dos puntos cualesquiera sobre la esfera, ¿Cuál es la línea que une esos dos puntos con la mínima distancia?. En la esfera, son los MERIDIANOS pero no los paralelos excepto el ECUADOR.

◇ Una línea geodésica es aquella que une dos puntos de una superficie con la mínima distancia. Las geodésicas son distintas para cada superficie.

Meridianos y Paralelos.

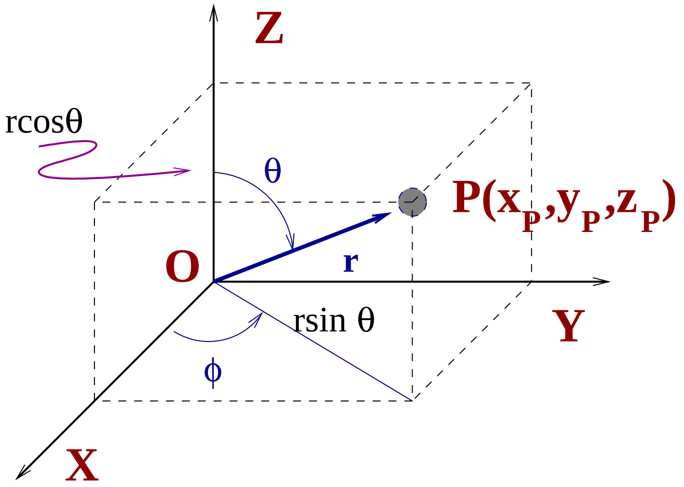


MERIDIANOS



PARALELOS

Coordenadas Esféricas.



♠ A cada punto del espacio podemos hacerle corresponder tres coordenadas definidas como: r distancia del punto P al origen O y los ángulos θ, **POLAR**, formado por la dirección del punto y el eje Z, y ϕ, **AZIMUTAL** formado por la proyección de la dirección del punto P sobre el plano fundamental y el eje X.

♠ Para las coordenadas esfericas necesitamos definir un PLANO FUNDAMENTAL, y un ORIGEN DE ANGULOS AZIMUTALES. Intuitivamente: las curvas $\theta = constante$ corresponden a paralelos, y las de $\phi = constante$ a paralelos.

♠ Las coordenadas cartesianas y esféricas están relacionadas:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$

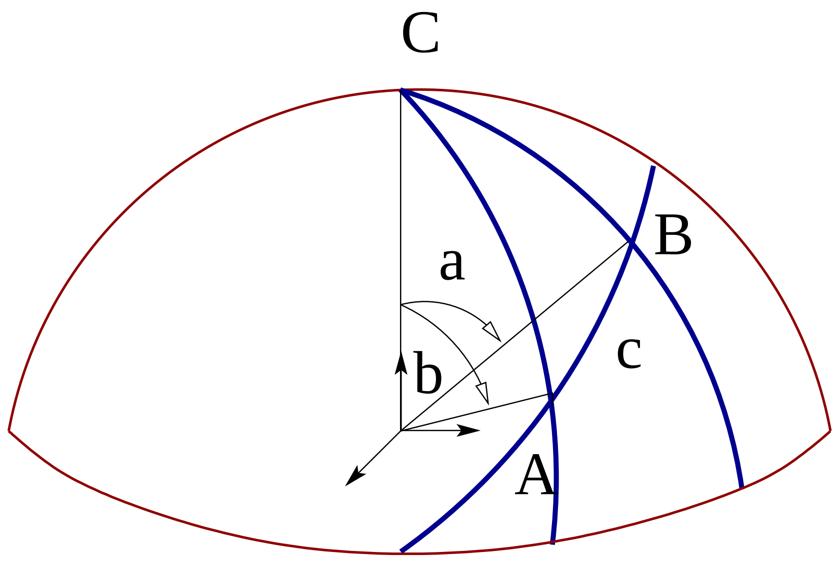
Definiciones:

• **Arco Máximo:** Cualquier arco de la circunferencia formada por el corte de la esfera de radio unidad con un plano que contiene el centro de la esfera.

• **Arco Pequeño:** Cualquier arco de la circunferencia formada por el corte de la esfera de radio unidad con un plano cualquiere que **NO** contiene el centro de la esfera.

• **Triángulo Esférico:** Región de la esfera de radio unidad delimitada por **arcos máximos**

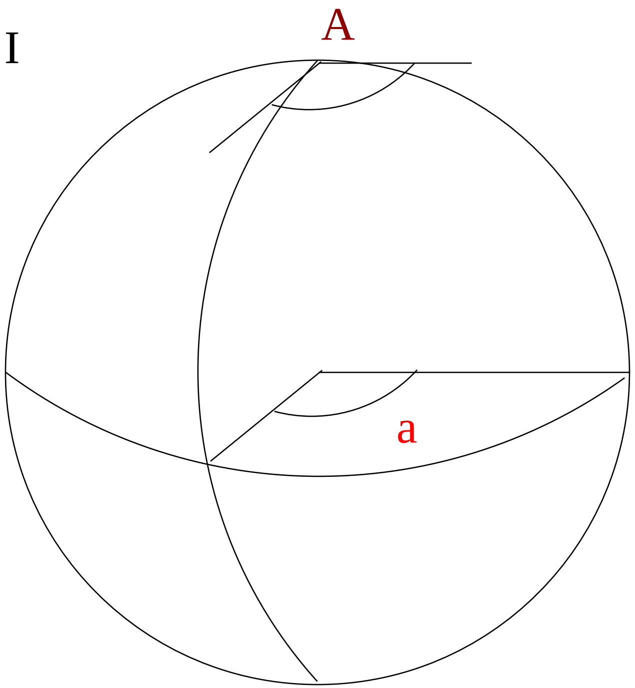
• **Sistemas de Coordenadas:** Conjunto de dos ángulos que especifican la posición de un objeto en la esfera celeste.



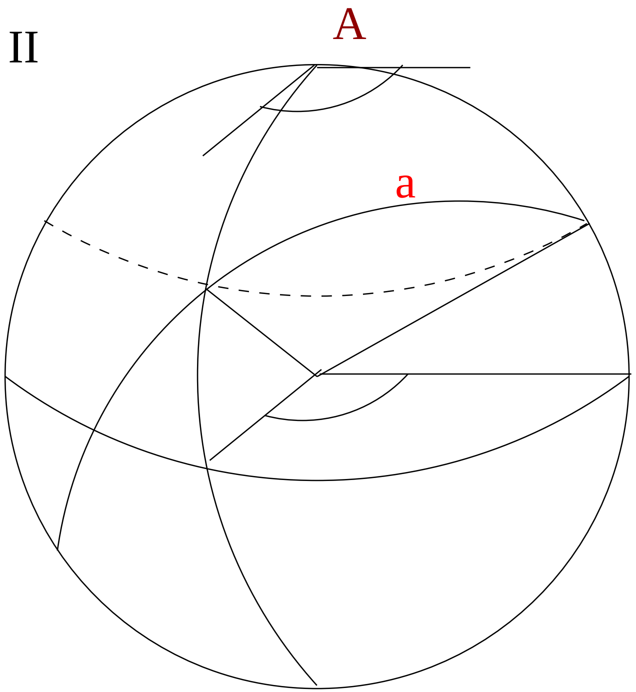
Triángulo esférico.

• **Ángulos Centrales:** Ángulos que subtienden los arcos de un triángulo esférico vistos desde el centro de la esfera (a,b,c).

• **Ángulos Interiores:** Ángulos que forman los arcos del triángulo entre sí (A,B,C).



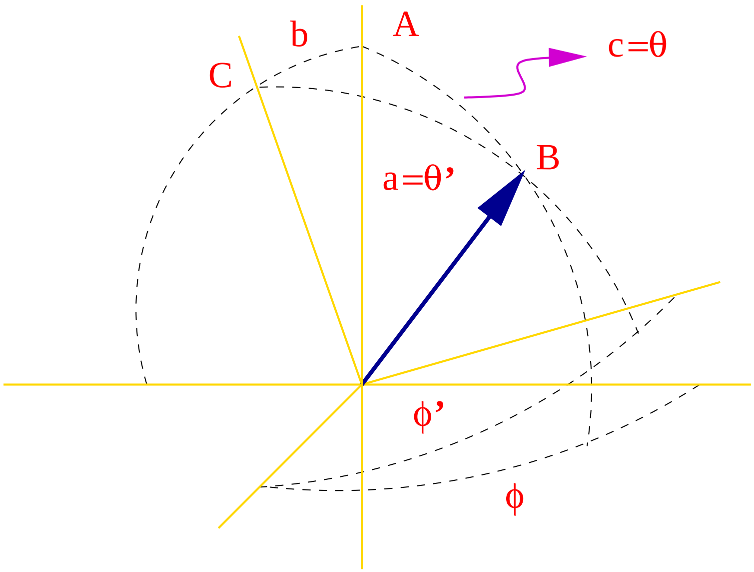
El angulo central ’a’ coincide con el angulo interior ’A’



El angulo central ’a’ no coincide con el angulo interior ’A’

Trigonometría Esférica: Coordenadas en esféricas.

Para resolver el triángulo esférico, es decir, para encontrar la relación entre sus ángulos interiores y centrales, vamos a proceder en tres pasos:

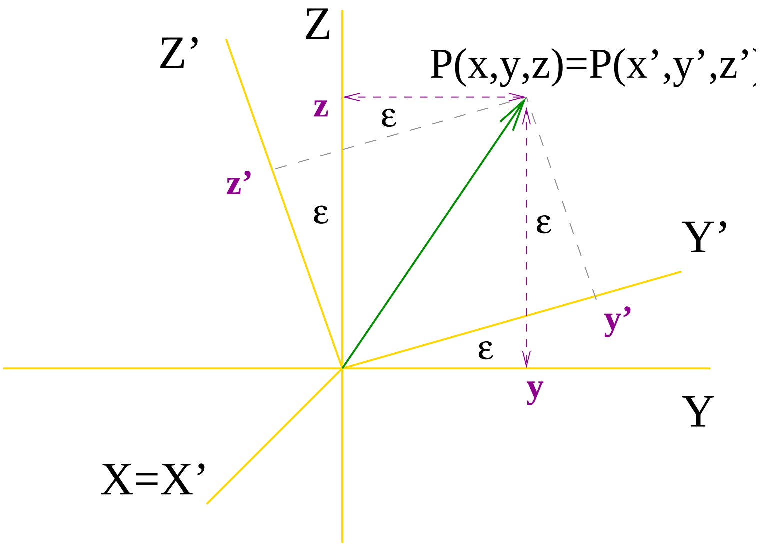


Consideremos cómo vendrían relacionadas las coordenadas cartesianas y esféricas de un vector de posición en dos sistemas de referencia distintos.

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\phi\sin\theta & x' &= \cos\phi'\sin\theta' \\
y &= \sin\phi\sin\theta & y' &= \sin\phi'\sin\theta' \\
z &= \cos\theta & z' &= \cos\theta'
\end{aligned}
$$

Trigonometría Esférica: Rotacion de ejes.

Ahora consideramos cómo se transforman las coordenas cartesianas cuando rotamos los sistemas de referencia un ángulo ϵ alrededor del eje X.



El vector de posición de un punto P dado, de coordenadas (x, y, z) en el sistema de coordenadas, tendrá coordenadas (x', y', z') en el nuevo sistema de referencia después de la rotación, siendo la relación entre ellas:

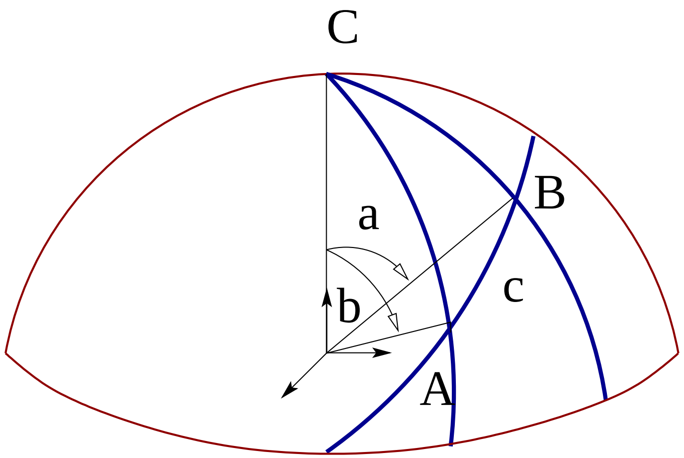
$$
\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \cos\epsilon + z \sin\epsilon \\
z' &= z \cos\epsilon - y \sin\epsilon
\end{aligned}
$$

Trigonometría Esférica: Resolución del triángulo esférico.

Simplemente, sustituyendo la expresión de las coordenadas cartesianas por las esféricas en cada sistema de referencia, encontramos la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
\cos\phi'\sin\theta' &= \cos\phi\sin\theta \\
\sin\phi'\sin\theta' &= \sin\phi\sin\theta\cos\epsilon + \cos\theta\sin\epsilon \\
\cos\theta' &= \cos\theta\cos\epsilon - \sin\phi\sin\theta\sin\epsilon
\end{aligned}$$

Fórmulas que resuelven el triángulo esférico.



En términos de los ángulos centrales e interiores, las fórmulas se reducen a:

$$
\begin{aligned}
\sin a / \sin A &= \sin b / \sin B = \sin c / \sin C \\
\cos B \sin a &= -\cos A \sin b \cos c + \cos b \sin c \\
\cos a &= \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c.
\end{aligned}
$$

Problemas.

• Calcular el radio del paralelo de una localidad que está a 30^o de distancia del Polo Norte. Lo mismo para una localidad que está a 30^o del Polo Sur. Tómese como radio de la tierra $R_T = 6378km$.

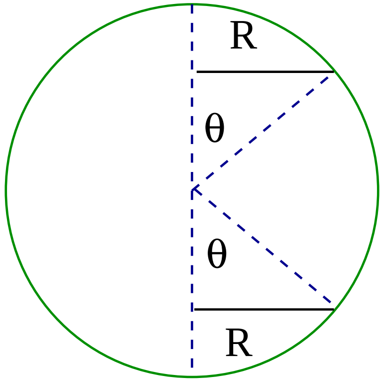
• Calcular la distancia existente entre un punto de coordenadas $(1, 1, 1)$ y el origen de coordenadas.¿Qué distancia existe entre el punto $(1, 1, 1)$ y el $(1, 0, 0)$?.

• Una esfera tiene un radio $R = 2m$; consideremos un punto de coordenadas $(1, 1, z_P)$. ¿Cuál es el valor de la 3^a coordenada para que el punto esté sobre la superficie de la esfera.

• En el ejercicio anterior, calcular cuál es el ángulo que forma el vector de posición del punto con el eje Z. Encontrar las coordenadas esféricas de dicho punto.

Solución Problema I.

• Calcular el radio del paralelo de una localidad que está a 30^o de distancia del Polo Norte. Lo mismo para una localidad que está a 30^o del Polo Sur. Tómese como radio de la tierra $R_T = 6378km$.



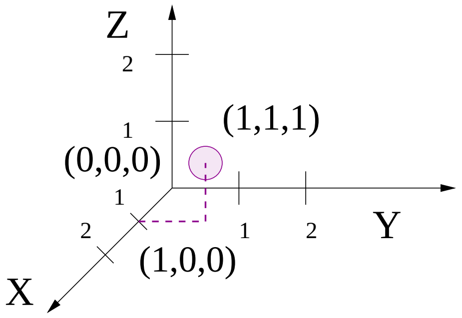
El problema nos pide calcular R, y nos dicen que $\theta = 30^o$. En la figura vemos que:

$$R = R_T \sin\theta = (6378\ km) \times 0.5 = 3189\ km$$

Por simetría, el paralelo de la localidad situada en el hemisferio sur también mide 3189km.

Solución Problema II.

• Calcular la distancia existente entre un punto de coordenadas $(1,1,1)$ y el origen de coordenadas.¿Qué distancia existe entre el punto $(1,1,1)$ y el $(1,0,0)$?.



La distancia al origen es:

$$d[(1,1,1) \rightarrow (0,0,0)] = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

en las unidades adecuadas (metros, por ejemplo). De la misma forma, la distancia

$$d[(1,1,1) \rightarrow (1,0,0)] = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

Solución Problema III.

• Una esfera tiene un radio $R = 2m$; consideremos un punto de coordenadas $(1, 1, z_P)$. ¿Cuál es el valor de la 3^a coordenada para que el punto esté sobre la superficie de la esfera.

Los puntos que están sobre la superficie de una esfera cumplen la condición:

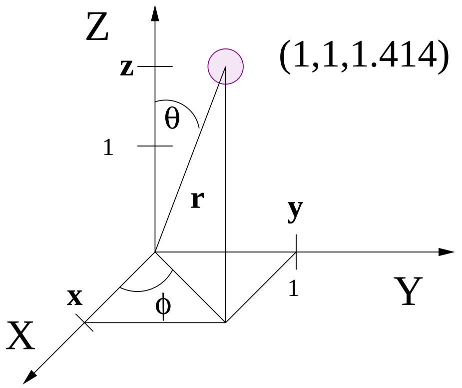
$$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = R^2$$

siendo R el radio de la esfera. En este caso tenemos:

$$1^2 + 1^2 + z_P^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 2 + z_P^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad z_P^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad z_P = \sqrt{2}\, metros$$

Solución Problema IV.

• En el ejercicio anterior, calcular cuál es el ángulo que forma el vector de posición del punto con el eje Z. Encontrar las coordenadas esféricas de dicho punto.



Las coordenadas esféricas son: (r, θ, ϕ). En la figura tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{z}{r}; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

Dado que los datos son: $x = 1$, $y = 1$, $z = \sqrt{2} = 1.41421$ tenemos:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2; \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^o; \quad \tan\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 45^o$$