Cosmología Básica.

Referencia Básica: Kolb & Turner (1990).

Ecuaciones de Friedmann:

$$d(\rho a^3) = -p da^3, \qquad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}$$

La fracción $H = \dot{a}/a$ se denomina **constante de Hubble**. Generalmente se estudian modelos tipo fluido perfecto, en que la densidad de energía está caracterizada por una ecuación de estado $p = w\rho$. El parámetro w de la ecuación de estado se supone constante. Distinguiremos tres tipos de fluido: polvo ($w = 0$), radiación $w = 1/3$ y quintaesencia $w < -1/3$.
Una notación muy conveniente es representar por Ω las densidades de materia en unidades de la densidad crítica $\rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$: Ω_b es la densidad bariónica, Ω_r de radiación, Ω_m de materia, $\Omega_k = -k/a^2H^2$ la curvatura y $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$ la densidad de energía del vacío (o constante cosmológica).

♠ Consideremos un modelo cosmológico con los siguientes parámetros: $k = 0$, $\Lambda = 0$.

1./ Demostrar que la evolución del factor de escala con el tiempo es: $a(t) \sim t^{-3(1+w)}$. Particularizar para $w = 0, 1/3, -1$ y explicar físicamente los resultados.

2./ Encontrar la evolución del factor de escala si existe una mezcla de materia y radiación, siendo $\Omega_r + \Omega_m = 1$

3./ El mismo modelo cosmológico dominado por la materia: $p = 0$. Encontrar la expresión de la distancia angular y de luminosidad en función del redshift de la fuente. Probar que la distancia angular tiene un máximo, pero la distancia de luminosidad no. Si una galaxia mide 10Kpc de radio, encontrar cuál es el mínimo ángulo que subtiende, y el redshift al que se produce.

♠ Consideremos ahora un modelo cosmológico constituido sólo por materia y con constante cosmológica $\Lambda \neq 0$. Supongamos que las densidades de materia y constante cosmológica son: $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$.

4./ Probar que la edad del universo es:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_\Lambda^{1/2} \ln \left[\frac{1 + \Omega_\Lambda^{1/2}}{(1 - \Omega_\Lambda)^{1/2}} \right]$$

Represéntese gráficamente t_0 como función de Ω_Λ. Si $t_0 = 13.4 \times 10^9$ años y $H_0 = 72 km/s\mathrm{Mpc}^{-1}$, qué valor debe tener Ω_Λ. Repasar la literatura de los años 80 y buscar qué es el **Globular Cluster Age Problem**.

5./ Para un modelo con materia y constante cosmológica, mostrar que existe una densidad crítica en que el modelo admite una solución estática ($a(t) = const$). Este modelo se denomina **Universo de Einstein**. Sin embargo, se puede demostrar que este modelo no es estable: una pequeña perturbación global en el factor de escala hace que el modelo se expanda o colapse exponencialmente rápido.

♠ Vamos a considerar ahora modelos cosmológicos con curvatura pero sin constante cosmológica.

6./ Un modelo cosmológico tiene una densidad total de materia $\Omega_m > 1$ (universo cerrado). Demostrar que el factor de escala puede escribirse como:

$$a(t) = a_o(1 - \cos\theta)\frac{\Omega_m}{2(\Omega_m - 1)} \qquad\qquad H_o t = (\theta - \sin\theta)\frac{\Omega_m}{2(\Omega_m - 1)^{3/2}}$$

Probar que el valor máximo de la expansión se obtiene cuando $k = (8\pi G/3)\rho a^2$, esto es, cuando $H = 0$.

7./ En un cierto momento, parecía que los cuásares estaban situados de forma preferente a redshift $z = 2$. Una posible explicación era que nuestro universo estaba dominado por la materia ($w = 0$), con curvatura positiva ($k = +1$) y con una constante cosmológica ligeramente mayor que en el Universo de Einstein (ejercicio anterior). Mostrar que en este modelo, el Universo se expande con ritmo decreciente hasta llegar a un determinado valor R_m, a partir del cuál el universo permanece un periodo largo de tiempo expandiéndose muy lentamente, antes de comenzar a expandirse de nuevo con un ritmo que asintóticamente se aproxima a $H = (\Omega/3)^{1/2}$.

Comentar por qué, si suponemos que R_m ocurre a $z = 2$, eso hace que los cuásares deban existir preferentemente ese redshift.