

Estudio del movimiento de oscilación de un muelle y un péndulo.

Descubrimiento de la ecuación del movimiento en función de los parámetros periodo y frecuencia.

Contexto

La actividad va dirigida a estudiantes de Física de segundo de Bachillerato, aunque me parece reseñable considerar que según la legislatura vigente el movimiento armónico simple (MAS) es un contenido de primero de bachillerato.

Es conveniente que los alumnos tengan afianzados o repasen contenidos de primero de bachillerato de dinámica, sobre todo la mecánica newtoniana, junto con la dinámica y cinemática del movimiento circular, ya que utilizaremos éste último como base para introducir el movimiento armónico simple. A su vez también es conveniente conocer o repasar el concepto de fuerzas elásticas para poder introducir la ley de Hooke (en caso de que no se haya visto).

En mi opinión sería adecuado incluirlo como primer tema de segundo de bachillerato, previo al movimiento ondulatorio, por tratarse éste último de un MAS que se mueve en el espacio, y previo también a la teoría de gravitación universal, ya que es necesario manejar diferentes parámetros comunes tanto del movimiento circular como del MAS, como son el periodo (T) y frecuencia (f), entre otros. Por tanto, el MAS nos sirve como nexo con el movimiento circular visto en primero, y enlace con los bloques de campo gravitatorio y ondas de segundo de bachillerato. Además, una vez se comprendan adecuadamente los parámetros del MAS en el muelle y en el péndulo así como las fuerzas que intervienen, podemos hacer también un estudio sobre los tipos de energía que presenta el sistema a lo largo del tiempo. Esto último estaría incluido en la parte de energía de un oscilador mecánico (principio de conservación de la energía mecánica) que actualmente también se ve en primero de bachillerato.

Estos contenidos de Física constituyen una base fundamental para cualquier estudiante de Ciencias, por lo que suelen estar incluidos en los temarios de bachillerato de Física, y vuelve a desarrollarse al menos durante el primer año de cualquier grado de Ciencias.

Objetivos

- Definir el tipo de movimiento de un péndulo y un muelle: establecer similitudes y diferencias.
- Definir los conceptos de periodo (T), frecuencia (f) y frecuencia angular (ω) del movimiento.
- Medir el periodo de un péndulo y un muelle modificando variables.
- Establecer las ecuaciones de posición del movimiento del péndulo y del muelle en función del tiempo.

Herramientas utilizadas

La experiencia se llevará a cabo en el laboratorio de Física donde se dispone de diversos montajes con muelles y péndulos.

Para que la actividad pueda ser aprovechada al máximo por los alumnos sería conveniente que pudieran realizarla idealmente en grupos de dos o tres personas como máximo. La actividad está limitada por el número de alumnos y el número de puestos que disponen del material de laboratorio adecuado. En caso de que el grupo de alumnos fuera elevado podrían hacerse desdobles para realizar la práctica.

También es necesario disponer de una pizarra para posibles anotaciones del profesor, y de un proyector para utilizar algunos vídeos como apoyo a las explicaciones.

Los alumnos deben llevar un cuaderno, material para escribir y la calculadora.

Temporalización

La duración de la actividad debe ocupar los 50 minutos de la clase, primando el trabajo experimental ya que éste no puede ser realizado por los alumnos en casa.

1. Introducción. Iniciación del tema con el planteamiento de una serie de preguntas utilizando ejemplos conocidos: movimiento en muelle y péndulo.
2. Definición de conceptos clave que describen el movimiento.
(15 minutos en la parte 1. y 2.)
3. Experimentación.
 - Medidas en muelle. (10 min)
 - Medidas en péndulo. (10 min)
 - Ecuaciones y gráficos. (15 min)

Desarrollo de la actividad

Para comenzar se les plantean a los alumnos una serie de preguntas sobre el movimiento que describe un muelle (en posición vertical) cuando colgamos de él una masa, y un péndulo cuando lo sepáramos de su situación de equilibrio y lo soltamos. Para ello el profesor puede usar el material de laboratorio, mostrando de forma general a los alumnos qué es lo que ocurre. Con esto se trata de que los alumnos describan de **forma cualitativa** cuáles son las características que observan en esos dos movimientos. El profesor puede guiar a los alumnos realizándoles de forma general diversas preguntas como:

- ¿Encontráis similitudes en ambos movimientos? ¿Y diferencias?
- ¿Cuál es la dirección del movimiento? ¿En cuántas dimensiones en cada caso?
- ¿Cuál es el sentido del movimiento?
- ¿Y el desplazamiento de la masa?
- ¿Qué ocurre con el desplazamiento a medida que pasa el tiempo?
- ¿Cuál es la posición final cuando acaba el movimiento? ¿Por qué?
- ¿Por qué paran de oscilar?
- ¿Conoces otros “osciladores” de este tipo?

El objetivo de esta primera parte es que los alumnos observen el movimiento y de forma guiada vayan conociendo las características que describen e influyen en el movimiento: oscilación, periodicidad, punto de equilibrio, fuerzas que intervienen (tensión, gravedad, peso, rozamiento). El término de periodicidad nos sirve para explicar los conceptos de periodo y frecuencia. En el caso del rozamiento nosotros no lo vamos a considerar para describir el movimiento, ya que complicaría demasiado las expresiones. Así que les explicamos que tratamos con sistemas ideales.

El periodo es el tiempo que tarda el sistema en hacer una oscilación completa, y puede expresarse de la siguiente forma:

$$T = \frac{1}{f}, \text{ y se mide en s.}$$

De esta forma podemos definir la frecuencia como el número de oscilaciones por unidad de tiempo, y se mide en s^{-1} (denominados también como Hz).

Con todo ello introducimos el nombre de este tipo de movimiento: movimiento armónico simple, y lo enlazamos con el movimiento circular, ya visto anteriormente. Para ello visualizamos un vídeo en el que se observa cómo el movimiento armónico simple es el que describe la proyección de un cuerpo que se mueve con movimiento circular uniforme sobre uno de los diámetros de la trayectoria circular que describe al girar.

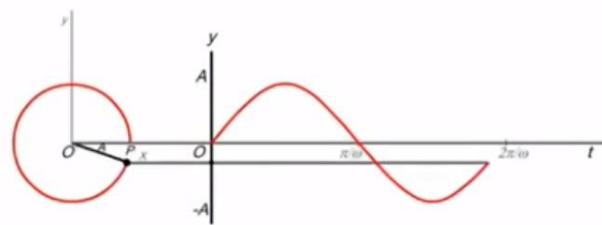


Figura 1. Vídeo recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=Cw9eFeVY74I>

Con esta visualización pueden conectar los contenidos ya vistos con los nuevos, definiendo así la amplitud del movimiento y el sistema de signos ($A, -A$), frecuencia angular y velocidad angular, tipo de representación del movimiento en el tiempo (sinusoidal, según la figura).

Es necesario que conozcan la diferencia entre la velocidad angular del MCU y la frecuencia angular del MAS, ya que en ambos casos tiene la misma notación (ω) pero son conceptos diferentes.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La velocidad angular está referida al MCU, y se define como el ángulo rotado por unidad de tiempo, por lo que sus unidades son rad/s. La frecuencia angular (o pulsación) suele asociarse al MAS y también se mide en rad/s, coincidiendo en determinadas ocasiones con el valor de la velocidad angular. Sin embargo, para oscilaciones con un ángulo muy pequeño en un péndulo, éstas son diferentes.

En el caso del muelle es necesario explicar que una de las fuerzas que interviene es la fuerza restauradora que se genera en un muelle para devolver el sistema hacia la posición de equilibrio

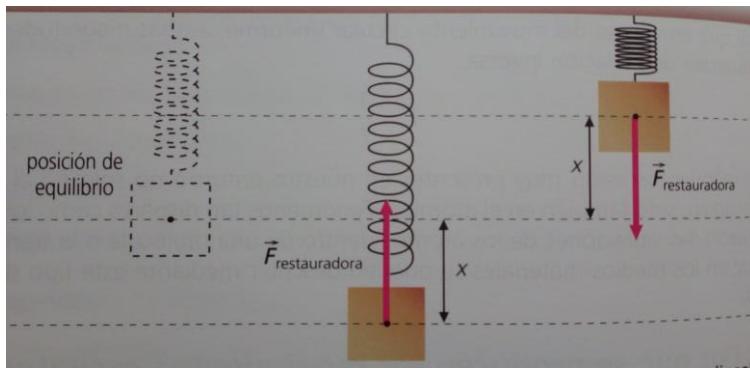


Figura 2. Libro “Inicia Física y Química 1º Bachillerato”. Oxford University Press España, S.A.

Esta fuerza es proporcional a la distancia de separación del punto de equilibrio (x), siendo esta expresión conocida como la ley de Hooke:

$$F_{recuperadora} = -Kx ; K \text{ es una constante de elasticidad propia de cada muelle (medida en N/m).}$$

Posteriormente se realizarán las medidas del periodo tanto en el muelle como en el péndulo para que conozcan de **forma cuantitativa y experimental** qué es lo que ocurre. Los alumnos deben rotar para realizar las mediciones en cada situación.

En el caso del muelle medirán el periodo para realizar 20 oscilaciones colgando masas de 10, 20, 30, 40 y 50 g, apuntando la elongación que sufre el sistema. De forma ideal sería conveniente que tuviéramos al menos dos tipos de muelles con diferente K para que observaran que ejerciendo una misma fuerza (F), qué sucede con x , y posteriormente pudieran calcular cuál es el valor de K . Para los dos muelles colgaríamos las cinco masas diferentes, apuntando las elongaciones correspondientes. Teniendo en cuenta la relación que conocemos de la Ley de Hooke, en este caso la fuerza recuperadora va a ser igual que el peso:

$$F_{recuperadora} = mg = -Kx$$

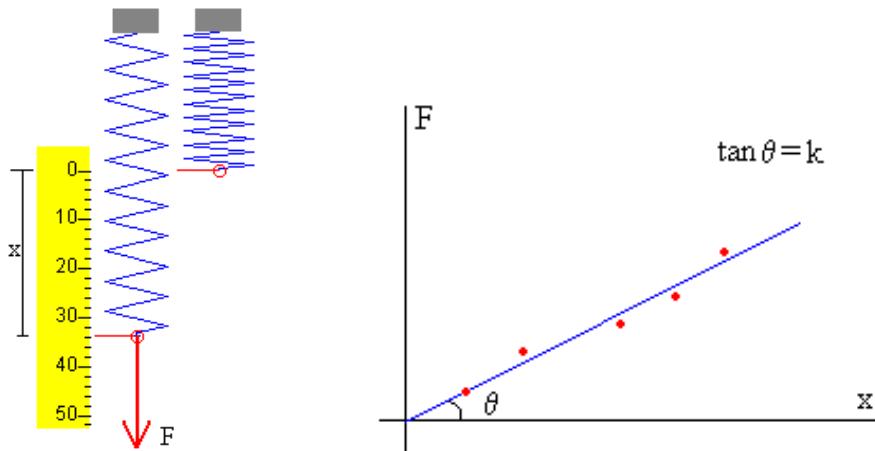


Figura 3. Recuperada de

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/muelle/muelle.htm>

Si representamos las elongaciones obtenidas frente a los pesos (F) obtenemos una recta donde la tangente del ángulo θ , es decir, la pendiente de la recta que obtenemos al hacer la regresión lineal es la K de nuestros muelles.

En el caso del péndulo medirán el periodo para realizar 20 oscilaciones colgando masas de 10, 20, 30, 40 y 50 g a una longitud constante (sería interesante poder cambiar la masa); y por otro lado, utilizando una masa constante deberán medir el periodo para realizar 20 oscilaciones variando la longitud (20, 30, 40, 50, 60 cm).

Las mediciones deben ser apuntadas de forma clara en un cuaderno de trabajo, y los alumnos deben sacar sus conclusiones. En el caso del péndulo deben observar que si mantienen la longitud constante el periodo no cambia, mientras que en el caso del muelle el cambio de masa sí influye en el periodo.

De esta forma llegamos a la parte donde una vez recogidos los datos el profesor procede a otorgar una **explicación analítica**, aportando a la vez los gráficos correspondientes de lo que está sucediendo en cada caso.

- Comenzamos por el muelle ya que las fuerzas que intervienen hacen el esquema más sencillo.

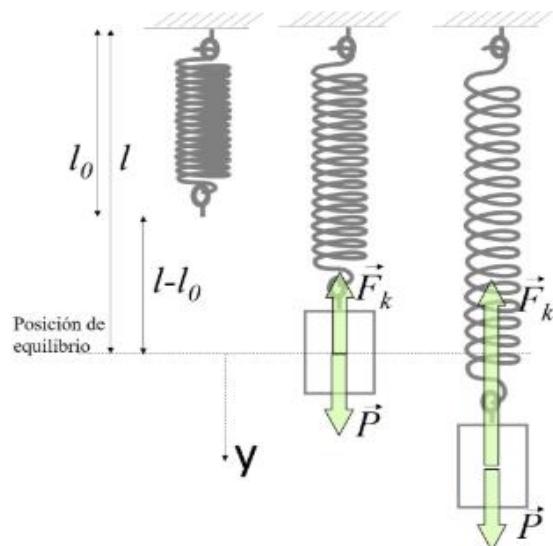


Figura 4. https://cursos-0-fc-ugr.github.io/Fisica/Oscilaciones_teor%C3%ADA.html

Cuando sobre nuestro muelle no cuelga ninguna masa su longitud será l_0 . Por otro lado, si colgamos una masa, m , el muelle se estira hasta alcanzar una posición de equilibrio donde se igualan la fuerza recuperadora y el peso, siendo su longitud $l-l_0$.

En esta situación de equilibrio el sumatorio de fuerzas debe ser 0, por lo que:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_k + \vec{P} = 0$$

Por tanto nos quedaría: $P = F_k$; $mg = -Kx$

De esta forma, podemos definir la ecuación del movimiento ya que conocemos las fuerzas que intervienen.

Si introducimos la segunda ley de Newton podemos poner la aceleración (en este caso, g) como la segunda derivada de la posición respecto del tiempo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx ; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

Para simplificar la ecuación introduciremos la variable que antes hemos denominado como ω (frecuencia angular o pulsación), la cual está relacionada con la constante del muelle y la masa por la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Por tanto podemos sustituir como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m} x ; \frac{d^2x}{dt^2} = \omega x$$

La solución de la ecuación diferencial que define el movimiento es la siguiente:

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

A su vez, anteriormente hemos definido $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, si sustituimos:

$$\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T} ; T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

De esta forma los alumnos pueden conocer las relaciones entre las variables, y comprobar a su vez si sus datos experimentales tienen sentido.

- Péndulo

Gracias a los datos experimentales los alumnos ya deben conocer cuáles son las variables que determinan el T, al menos deben haber comprobado que la l influye y la masa no.

Es necesario que el profesor aporte un esquema de las fuerzas que intervienen para que los alumnos puedan valorar si la gravedad puede influir en nuestro T. Para ello podemos realizar un esquema de este tipo:

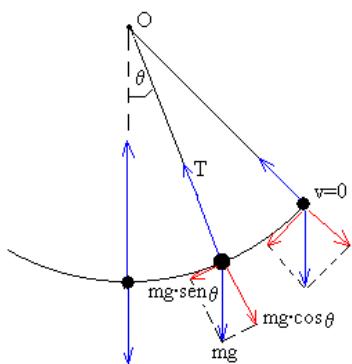


Figura 5. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm>

Para entender adecuadamente este esquema, que es más complejo que el del muelle, es necesario que tengan claros los conceptos de dinámica de fuerzas, descomposición vectorial y trigonometría que se ven en entre 4º de la ESO y 1º de bachillerato.

Una vez tengan claras las fuerzas que intervienen podemos realizar un análisis de unidades, sabiendo que el T se mide en segundos, e incluyendo las posibles variables que intervienen. Por tanto, la masa ya estaría descartada y quedaría de la siguiente forma:

$$[T] = [I] [g]$$

$$s = m^\alpha \frac{m^\beta}{s^{2\beta}}$$

$$s = \frac{m^{\alpha+\beta}}{s^{2\beta}}$$

Para que el periodo pueda tener unidades de segundos establecemos los valores de los superíndices:

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\beta = -1/2$$

$$\alpha = 1/2$$

De esta forma deducimos que el periodo depende del cuadrado de la longitud y de la gravedad:

$$T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Sin embargo, que el T sea proporcional a estos magnitudes puede implicar que exista una variable constante que todavía desconocemos, a la cual podemos llamar k.

$$T \propto k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Podemos hacer una regresión lineal donde representemos la variación de T en función de la longitud, siendo la pendiente de la recta $\frac{k}{g}$.

Para que la expresión anterior sea más fácil de representar tomamos los cuadrados a ambos lados de la ecuación, y agrupamos las variables según se correspondan como pendiente o variable independiente.

$$T^2 = \frac{k^2}{g} I$$

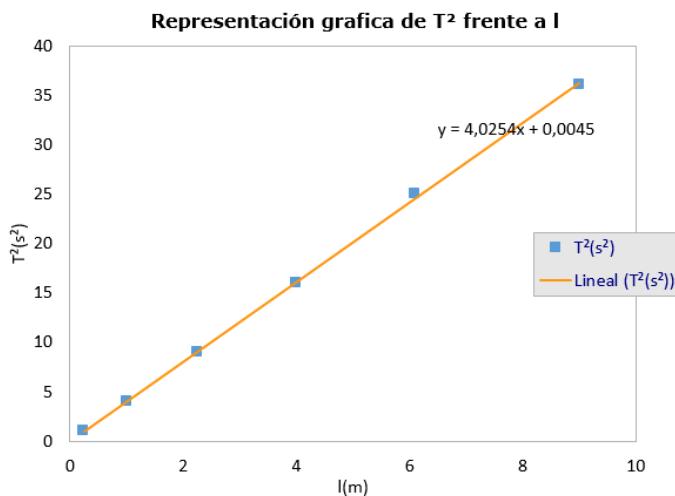


Figura 6. Gráfica extraída de una práctica llevada a cabo en la asignatura de Didáctica de la FYQ.

La pendiente de la recta sería 4,0254, por lo que si consideramos la gravedad como $9,8 \text{ m/s}^2$:

$$\frac{k^2}{9,8} = 4,0254; k = \sqrt{39,448} = 6,28$$

Por tanto ya conocemos el valor de nuestra constante adimensional:

$$T \propto 6,28 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Para reducir aún más la expresión podríamos pensar si el número 6,28 nos recuerda a la proporción de algún número estándar usado en matemáticas. Puesto que nosotros ya conocemos la respuesta podemos guiar a los alumnos, anunciándoles que la relación de nuestro número es con π , quedando:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Por último podemos definir la ecuación del movimiento, en este caso debemos considerar las dos dimensiones de los ejes x e y. Para ello recurrimos de nuevo al esquema anterior:

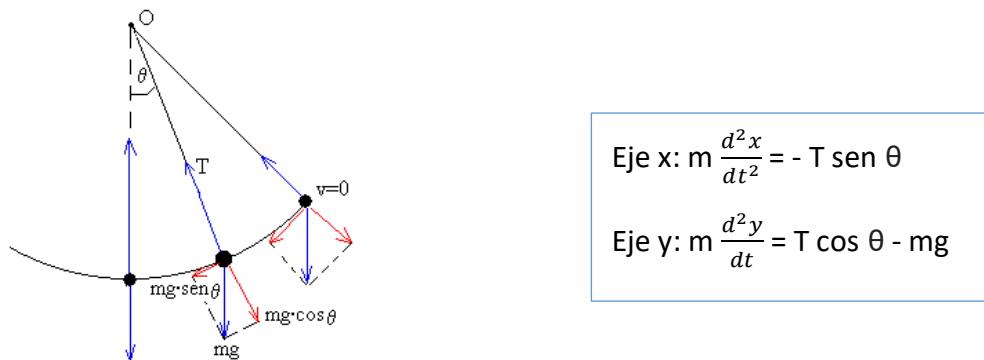


Figura 7. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm>

Para ángulos θ muy pequeños la excursión realizada en el eje y es muy pequeña, por lo que el $\cos\theta$ sería uno, y en este caso el movimiento se realizaría en una sola dimensión.

De esta forma se simplifica la ecuación diferencial que obtendremos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \left(\frac{x}{l}\right); \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0$$

La solución sería igual que en el caso del muelle:

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

La actividad se completaría volviendo a ver el vídeo del principio donde se justifica que el MAS es el que describe la proyección de un cuerpo que se mueve con movimiento circular uniforme sobre uno de los diámetros de la trayectoria circular que describe al girar, observando así la trayectoria sinusoidal.

Actividades de consolidación

- Es conveniente que los alumnos sean capaces de expresar la ecuación del MAS dependiendo de cuál sea la posición de partida para lo cual es necesario que conozcan adecuadamente las relaciones entre seno y coseno.

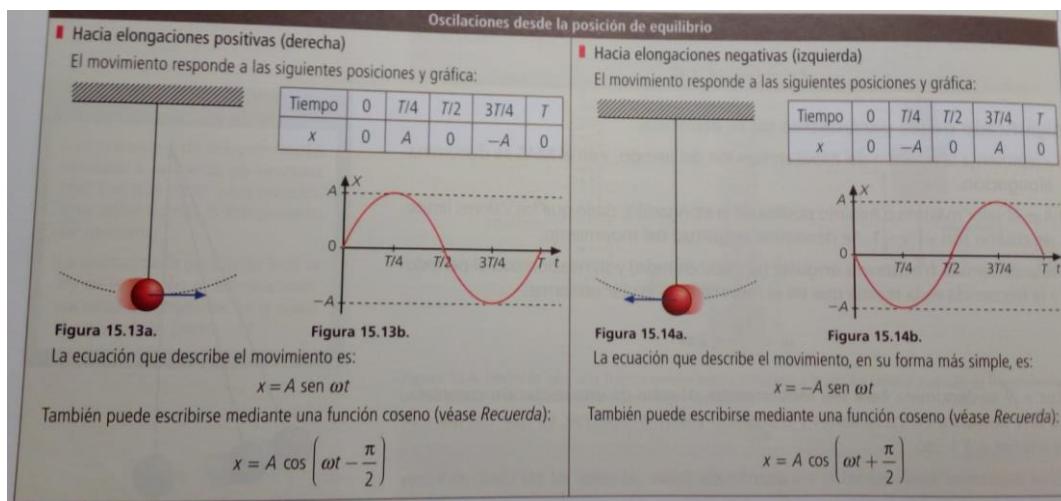
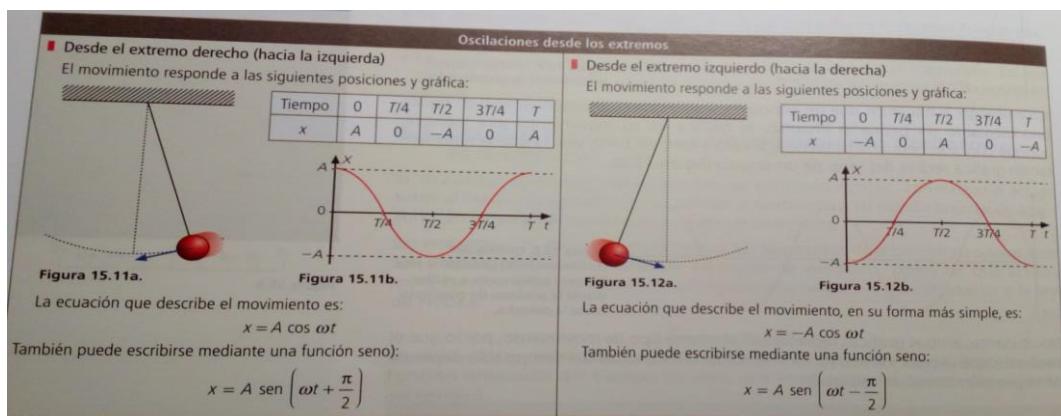


Figura 8. Recuperada de Libro “Inicia Física y Química 1.º Bachillerato”. Oxford University Press España, S.A.

- Sería interesante que utilizaran simuladores virtuales para conocer y visualizar las variaciones de la onda generada tras modular diferentes parámetros de la ecuación del movimiento con una simulación.

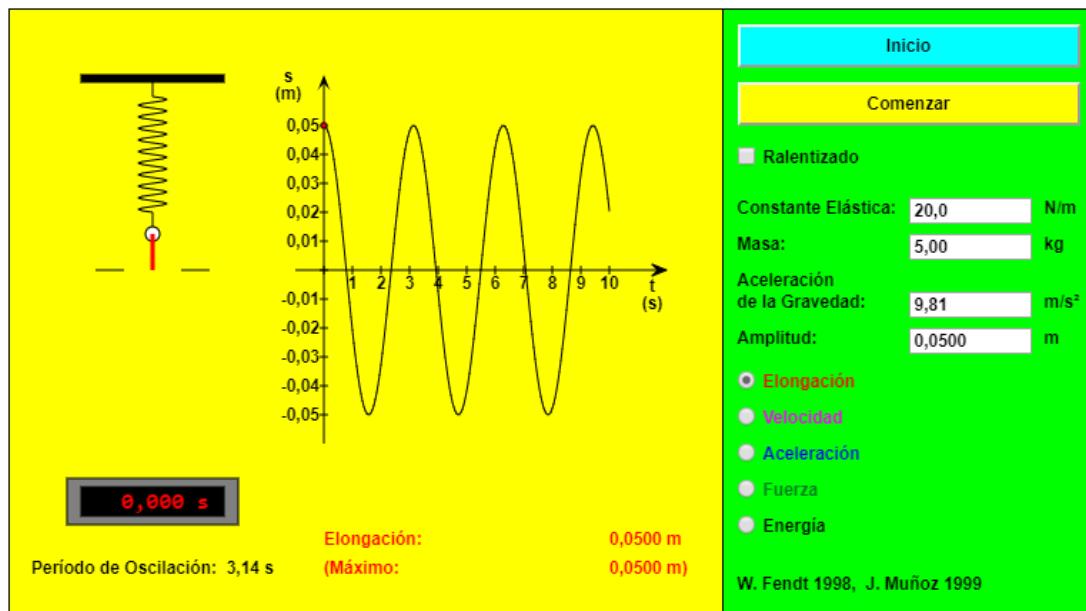


Figura 9. https://www.walter-fendt.de/html5/phes/springpendulum_es.htm

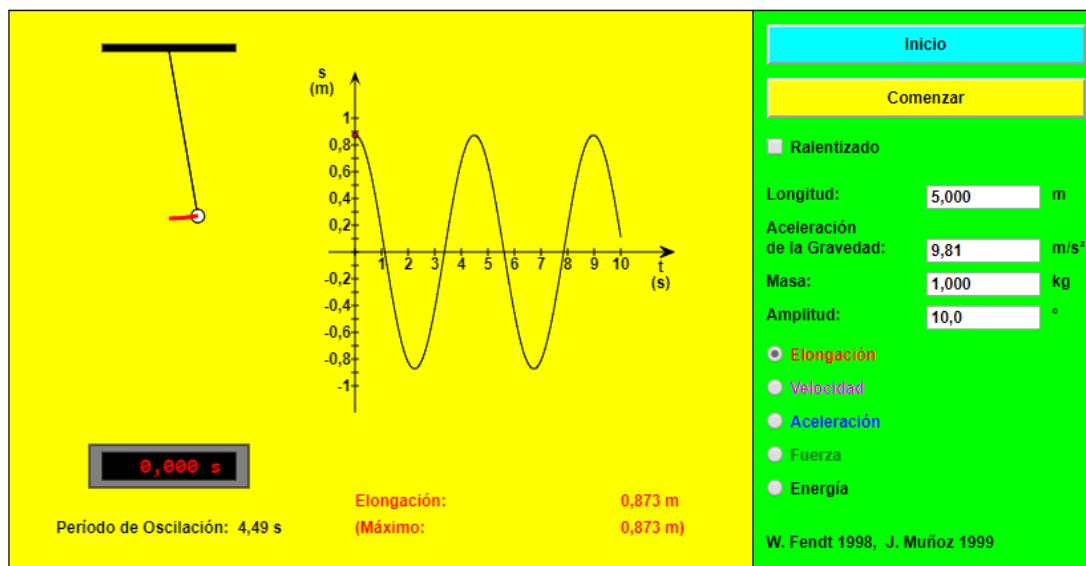


Figura 10. https://www.walter-fendt.de/html5/phes/pendulum_es.htm

Esta actividad puede realizarse también de forma previa a la experimentación para que descubran de una forma más fácil y visual qué es lo que ocurre al variar los parámetros. Sin embargo, sin lugar a dudas, la parte experimental me parece necesaria en este tipo de contenidos.

- También sería interesante que conocieran los diagramas de energía cinética y potencial en cada momento del movimiento, explicando por tanto los conceptos de fuerzas conservativas y no conservativas, enlazando con la conservación de la energía mecánica.

Evaluación alumnado

Es necesario informar a los alumnos sobre qué tipo de material es necesario que entreguen o realicen para esta actividad. Sería conveniente que llevaran un cuaderno de laboratorio donde apuntaran sus resultados y conclusiones, y que realizaran un informe sobre la experiencia. El límite sería de 5 folios por las dos caras, y se trataría más bien de plasmar por escrito la consecución de la experiencia, anotando las hipótesis previas y las conclusiones finales, así como los resultados numéricos y gráficas realizadas.

Evaluación actividad

Los informes de los alumnos podrían reflejar si realmente se han cumplido los objetivos principales de la actividad.

Las principales limitaciones que encuentro son el número de alumnos, el material de laboratorio disponible, y por tanto, la posibilidad de poder hacer desdobles. Por otro lado, teniendo en cuenta que las clases se realizan durante 50 minutos tendría que ir todo a un ritmo muy fijado para que diera tiempo a realizar y explicar todo, con lo que quizás sería conveniente poder hacer la práctica en dos sesiones.