

Documento de Planificación de la Actividad Docente

Alfredo Hernández Cabanillas

Sesión para una clase expositiva de Movimiento Armónico Simple (M.A.S)

1. Contexto

Se presenta este documento para organizar y planificar una clase expositiva dirigida a alumnos de 2º de Bachillerato sobre el movimiento armónico simple (MAS). Para entender los conceptos relacionados a MAS es necesario que los alumnos tengan algunos conocimientos previos matemáticos: trigonometría, derivadas y representación de datos sobre un sistema de coordenadas, físicos: leyes de Newton, movimiento circular uniforme y la ley de Hooke e introducción al trabajo experimental: unidades, sistema internacional, trabajo experimental en el laboratorio y elaboración de hipótesis. La mayoría de estos conceptos han sido tratados repetidamente en cursos previos a 2º de Bachillerato durante la ESO.

Es necesario que aprendan estos concepto de manera significativa de cara a los primeros cursos de la universidad, dónde la física es una asignatura común a los grados universitarios de ciencias e ingenierías, en dichos grados además ampliaran conocimientos y los aplicarán a situaciones determinadas, a lo largo de su carrera universitaria y vida laboral.

2. Objetivos

- 1) El principal fin de esta actividad docente es que los alumnos entiendan y describan al **movimiento armónico simple** como un tipo de movimiento caracterizado por tener un **periodo**, es decir el movimiento se cumple cada cierto tiempo, es primordial que los alumnos entiendan el concepto de **periodo** y relacionado con ello la **frecuencia**.
- 2) Trabajar aspectos básicos acerca del cómo se realiza un trabajo experimental. Deben adquirir la habilidad para aplicar el método científico, para ello deben observar, analizar y proponer modelos con los que predecir resultados experimentales.
- 3) Aprender a medir los fenómenos que se presentan en la sesión.
- 4) Encontrar similitudes entre sistemas distintos y a partir de los sistemas sencillos aprendidos en clase puedan aplicarlos a otros de mayor complejidad.

3. Material

La sesión se debería realizar en el laboratorio para que los alumnos estén en contacto con el material y les permita medir además de obtener los datos experimentales. Sin embargo si tenemos un grupo numeroso, los experimentos se podrían organizar en el aula habitual. En ese caso, la parte experimental sería llevada a cabo por el docente con alguna participación del alumnado.

Se necesitará:

- Pizarra
- Proyector para presentación digital
- Muelles
- Varias masas de 5g
- Cronómetro
- Calculadora
- Péndulo: cuerda con medidas y una masa esférica
- Soportes
- Spray
- Rollo de papel
- Botella
- Cuerda
- Arena
- cartulina

Los alumnos deberán disponer de cuaderno, bolígrafos y el móvil para utilizarlo como cronómetro y calculadora.

4. Descripción del desarrollo de la actividad docente.

Lo primero al hablar de movimiento armónico simple es preguntarles acerca del término periodicidad y que lo relacionen con algún fenómeno de la vida cotidiana.

La periodicidad es un elemento o fenómeno que se repite continuamente a lo largo del tiempo. Ejemplos de periodicidad: las figuras de los gatos chinos de la suerte (que mueve su mano hacia adelante y atrás), una campana al sonar, el aleteo de un pájaro, el péndulo de un reloj o el movimiento de una mecedora. Todos estos ejemplos realizan un movimiento que cada cierto tiempo pasa por un mismo punto repetidamente.

Una vez que tengan claro el concepto de periodicidad y que sepan que se trata de un tiempo. Se seguirá con el ejemplo de un MAS que describe un muelle y un péndulo.

4.1 Descripción cualitativa de un muelle.

Empezaríamos explicando el movimiento que describe un muelle debido a que su descripción analítica es más sencilla que en el caso del péndulo.

Primero comenzamos por un muelle en una posición horizontal.

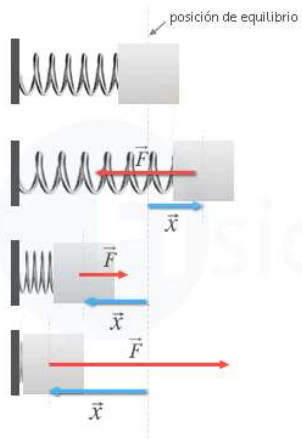


Figura 1 Fuerza elástica de un muelle horizontal.¹

Si se ejerce una fuerza sobre un cuerpo, con masa m , unido a un muelle desde su posición de equilibrio, aparece una fuerza de la misma intensidad y en sentido contrario denominada fuerza elástica del muelle, la cual intentará volver a la posición de equilibrio (Ley de Hooke) (Figura 1), repasaremos este concepto con los alumnos.

$$F = -kx$$

En el caso de que de pronto dejemos de ejercer la fuerza externa, la fuerza elástica producirá un movimiento repetitivo a lo largo del tiempo con respecto a la posición de equilibrio denominada movimiento armónico simple.

Ahora podríamos trasladar el caso a un muelle vertical sería exactamente lo mismo solo que en la posición de equilibrio depende de la masa que se coloque por la fuerza Peso (Figura 2)

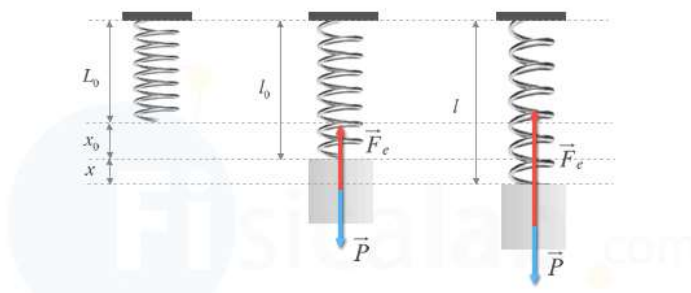


Figura 2. Fuerza elástica de un muelle en horizontal.¹

Al explicar el muelle en posición vertical, se puede hacer una pequeña demostración experimental a la clase para que observen como oscila.

¹ <https://www.fisicalab.com/apartado/dinamica-mas>

4.1.1 Observación.

Planteamos a la clase de que variables creen depende el periodo (T) del movimiento correspondiente al muelle, por ejemplo de la masa, de la gravedad de la constante del muelle, la amplitud de la elongación, etc.

$$T = f(m, k, g, \text{Amplitud de la elongación}, \dots)$$

Podemos empezar a descartar que el periodo no dependa de la amplitud de la elongación con una prueba experimental.

4.1.2 Descripción analítica

El siguiente paso se explicará la descripción analítica del muelle por su sencillez, como punto de partida están las leyes de Newton y a la ley de Hooke.

$$F = m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

Con esta expresión a los que llegamos es a:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

A lo que llegamos es a una ecuación diferencial de segundo grado, la cual es muy probable que nuestros alumnos no sepan resolver. Para resolverla utilizamos una estrategia visual a través de una demostración de cómo cambia la posición a lo largo del tiempo, la función $y(t)$.

Pondremos un bote de spray de pintura en un muelle y detrás un rollo de papel. Cuando el spray de pintura suba y baje, vamos moviendo el rollo de papel a velocidad constantes y observamos la figura que describe (Figura 3). Esto también se puede enseñar a través de programas por internet. (<https://www.fisicalab.com/apartado/mas-y-muelles>)

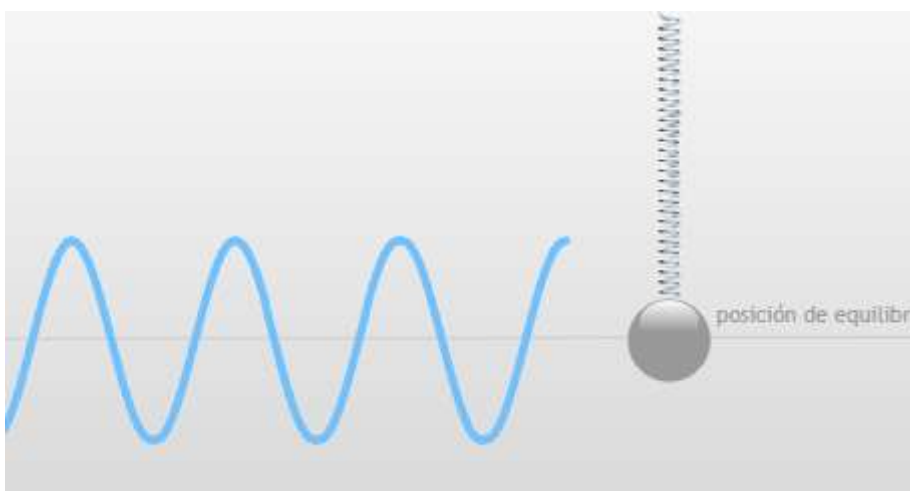


Figura 3

Al observar la gráfica que describe el muelle a lo largo del tiempo es de tipo trigonométrica

$$y(t) = A \cos(\omega t)$$

Siendo A la amplitud que depende de la fuerza inicial que se ejerza al estirar o comprimir el muelle y ωt la frecuencia angular.

Entonces si hacemos la derivada segunda

$$\frac{dy}{dt} = -A \omega \text{sen}(\omega t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

Si comparamos las expresiones y sabemos que $A \cos(\omega t) = y(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0$$

Llegamos a la conclusión de que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ahora los alumnos saben, por conocimientos previos con el movimiento circular uniforme, la relación que existe entre la velocidad angular y el periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Por lo que llegarían a la ecuación

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} ; T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Entonces quedaría demostrado analíticamente que el periodo de un muelle depende de la masa y de la constante del muelle

4.1.3 Demostrarla teoría

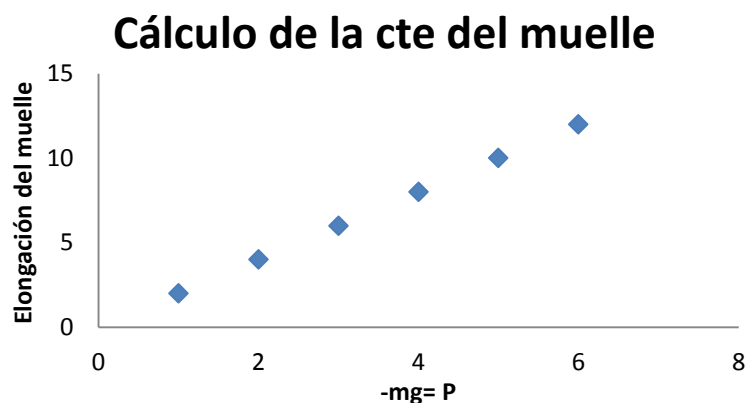
El siguiente paso sería demostrar la teoría y compararlo experimentalmente. Con el objetivo de hacer predicciones, plantearíamos al alumnado que es lo primero que se necesitan para poder hacer un modelo y cómo lo harían, ellos deberían responder que lo primero sería conocer la constante del muelle.

La constante del muelle se puede conocer a partir de la primera ecuación que relaciona la Ley de Newton con la Ley de Hooke, en la cual el peso producirá una elongación del muelle a una nueva posición de equilibrio.

$$F = mg = -k\Delta y$$

$$\Delta y = -\frac{g}{k} m$$

Entonces diseñaremos un experimento con un muelle en la que colocaremos distintas masas y mediremos la elongación. A continuación lo representaremos como el peso con respecto a la elongación del muelle en una gráfica sobre un sistema de coordenadas, donde la pendiente de la recta será $1/k$.



Una vez que ya hemos calculado la constante del muelle el siguiente paso sería realizar el mismo experimento. En este caso se anota el periodo para cada peso T_{exp} que a continuación habrá que comprobar con $T_{\text{analítica}}$ y así demostraremos que nuestro modelo funciona.

4.2 Descripción cualitativa de un péndulo

Como uno de los objetivos es ver similitudes entre distintos sistemas, otro ejemplo de movimiento armónico simple bastante didáctico sería el estudio de un péndulo. Un péndulo consiste en un sistema físico en el cual una cuerda está fija sobre una superficie y por el extremo se coloca una masa, al ejercer una fuerza sobre dicha masa este comienza a oscilar.

4.2.1 Observación

Entonces una vez mostrado el péndulo y como oscila, la primera pregunta sería ¿De qué variables depende el periodo? Ejemplo: la longitud de la cuerda, de la masa, de la gravedad, del ángulo inicial, radio de la esfera, etc. Ya hemos introducido el concepto de periodo anteriormente por lo que ahora simplemente sería recordarlo.

$$T = f(m, l, g, \text{forma o } R \dots)$$

Para descartar que el periodo no es función de la masa se puede hacer de dos maneras:

1. De forma experimental manteniendo la misma longitud de la cuerda, haríamos oscilar péndulos con distinta masa 10 periodos y mediríamos el tiempo que tardan en hacerlo. El resultado debería ser que tardan lo mismo por lo que el periodo no es función de las masas y queda descartada.

4.2.2 Análisis dimensional

2. Otra forma de comprobar de qué variables depende el periodo T es con un análisis dimensional

$$T = f(m, l, g)??$$

$$[T] = [m]^\alpha [l]^\beta [g]^\gamma ; s = kg^\alpha m^\beta \frac{m^\gamma}{s^{2\gamma}} ; s = kg^\alpha \frac{m^{\gamma+\beta}}{s^{2\gamma}}$$

Donde obtendríamos que $\alpha=0$; $\beta=1$ y $\gamma= -1/2$ a lo que llegaríamos que el periodo no depende de la masa y sólo es función de la longitud de la cuerda y de la gravedad.

$$T = f\left(\frac{l^{1/2}}{g^{1/2}}\right)$$

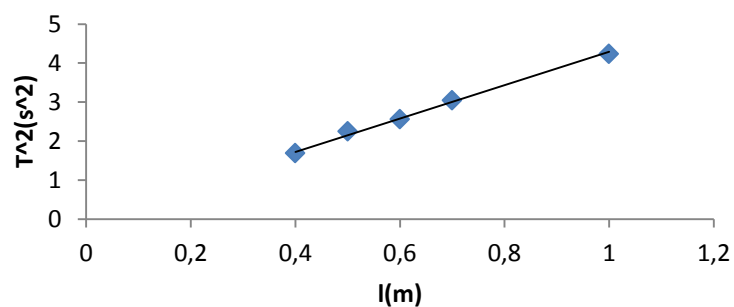
4.2.3 Experimentación

Ahora sabemos entonces que T es proporcional a \sqrt{l} . Para ver la relación existe entre T y l se puede hacer la experiencia en clase donde, para ello se realizan varias medidas del tiempo que tarda 10 oscilaciones (periodo del péndulo) a distintas longitudes de cuerda y recopilamos en una tabla y representamos en un sistema de coordenada T^2 frente a l, obtendremos una recta de este tipo.

$$T^2 = \frac{K^2}{g} l$$

l(m)	10T(s)	T ² (s ²)
0,4	13	1,69
0,5	15	2,25
0,6	16	2,56
0,7	17,46	3,048516
1	20,58	4,235364

Relación periodo longitud



Por lo que la pendiente de la recta nos daría la constante K

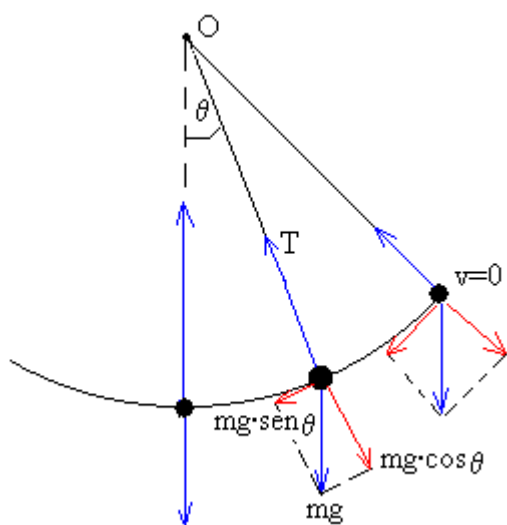
$$cte = \frac{K^2}{g}$$

Cte= 4.24 s²/m y g≈10 m/s² por lo tanto debería salir K aproximadamente 6.28 dependiendo del rigor experimental que se haya seguido.

La siguiente pregunta que deberíamos plantear a nuestros alumnos es ¿por qué sale ese número? ¿A qué se debe? Para responder esta pregunta habría que analizar la dinámica del péndulo.

4.2.4 Descripción analítica

Ahora que ya hemos planteado de qué variables depende el péndulo, para poder presentar a qué se debe ese valor de la constante tenemos que realizar una descripción analítica de la dinámica del péndulo. La diferencia que observamos con respecto al muelle es que ahora el movimiento lo describen dos componentes una x y otra y



Nuevamente nos vamos a las leyes de Newton

$$x: m \frac{d^2x}{dt^2} = -T \operatorname{sen}(\theta)$$

$$y: m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg + T \cos(\theta)$$

En x sólo actúa la componente x de la tensión de la cuerda T_x mientras que en y actúa el peso y la componente y de la tensión T_y .

Estamos entonces ante un sistema de ecuaciones diferenciales en la cual lo más seguro es que nuestros alumnos no lo sepan resolver. Pues bien el siguiente paso es explicarles que se puede hacer una aproximación, cuando el ángulo inicial θ es pequeño podemos decir que $\Delta y \ll \Delta x$, esto debe estar basada en la observación y debemos mostrárselos al alumnado y demostraremos como en estos casos el movimiento sobre el eje y es prácticamente despreciable con respecto al eje x.

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \quad -mg + T \cos(\theta) = 0; \quad mg = T \cos(\theta)$$

Si el ángulo inicial θ es pequeño, $\cos(\theta) \approx 1$ y por lo tanto $T = mg$, sustituimos la tensión en la posición x.

$$x: m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}(\theta)$$

Y sustituimos el seno del ángulo por concepto, llegando a la expresión final:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \frac{x}{l}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

Debemos hacer hincapié en la semejanza de esta expresión con la correspondiente el muelle.

Muelle

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

Péndulo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

La manera de resolver esta ecuación diferencial es de la misma manera que la anterior, se debe hacer de forma gráfica y se relaciona con el muelle. Para que vean la figura que describe un péndulo a lo largo del tiempo se puede llenar una botella de arena con un agujero pequeño en un extremo y por el otro una cuerda, lo hacemos oscilar y que la arena caiga sobre

un papel que vamos moviendo a una velocidad constante. La figura que se observará será muy similar a la Figura 3

Por lo que haciendo el mismo tratamiento analítico que en el caso del muelle llegaremos a la conclusión de que:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Y al sustituir igual que el muelle y la relación entre ω y el periodo T se obtendrá y ese 2π corresponde al valor de 6.28 que estábamos justificando.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

5. Actividades de consolidación y ampliación

1. Como actividad de consolidación podríamos plantearle el diseño de un experimento para medir una masa que no dependa de la gravedad
2. Otra actividad por grupos que monten un muelle horizontal en el cual tengan que eliminar el efecto del rozamiento y que comprueben que sus modelos siguen prediciendo el $T_{\text{exp.}}$.
3. Que resuelvan una serie de problemas, por ejemplo: de forma cualitativa qué ocurre cuando nos alejamos de las condiciones ideales o que le ocurre al péndulo si no hay gravedad y que razonen la respuesta.

Evaluación de la actividad docente y propuesta de mejora

Este apartado queda reservado para evaluar los resultados de la actividad docente y qué aspecto hay que mejorar.

Bibliografía

Información acerca de donde se ha sacado el material de la actividad y citas de la literatura.